李克正 著

群概形及其作用论

Group Schemes and Their Actions



群概形及其作用论

李克正　著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

群概形是代数几何与算术代数几何的重要课题。本书内容不仅包括群概形的基本理论，而且包括其他一些相关课题，其中有些是工具，有些是基本的应用，有些是这两方面兼而有之。除此之外，书中还有一些关于历史、数学语言、思想方法与几何直观等的“聊天”。

本书可用作研究生高等教科书，书中使用概形的语言作为基本语言，所需要的预备知识为代数几何的基础知识。

图书在版编目(CIP) 数据

群概形及其作用论/李克正著.—北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-49002-9

Ⅰ. ①群…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①群论–研究　Ⅳ. ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 322014 号

责任编辑： 陈朝晖
封面设计： 何凤霞
责任校对： 刘玉霞
责任印制： 丛怀宇

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市铭诚印务有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 155mm×235mm　**印　张：** 30.75　**字　数：** 488 千字
版　　次： 2018 年 8 月第 1 版　**印　次：** 2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价： 139.00 元

产品编号：051092-01

献给 *Arthur Ogus*，于先生七十寿辰

前　言

群概形是代数几何与算术代数几何的重要课题，也是一个强有力的工具，很多学生和研究者对此很需要。但是，这方面的文献浩如烟海，而且所采用的语言大相径庭，使初学者有相当大的困难。作者在大约二十年前已强烈感到在这方面很需要一本全面系统且采用统一语言的教科书，并开始着手准备。

在准备过程中发现困难很大，经常遇到一些文献中的断言有误或可疑，至于有漏洞的证明就更多了。因此，对于这方面的各课题都需要再研究，最好是系统地讲一遍甚至多遍。幸运的是，自 1998 年始，作者参加中国科学院晨兴数学中心算术代数几何讨论班十余年，后来又在首都师范大学讲授该方面的课程五年多，晨兴中心的同事们和首都师范大学的研究生们以严谨甚至苛刻的态度对待作者的报告，使得很多疑问得以澄清，很多错误得以及时纠正。

在这段时期，作者曾与很多专家就本书的各课题做了深入的讨论，其间还访问了台湾理论研究中心、马普数学所、苏黎世高工和东京大学，这些都很有助于本书的准备。

在经过十余年的准备后，作者开始本书的写作，在写作过程中又多次讲授其中的内容，并根据反馈意见修订。

本书可看作研究生高等教科书。书中使用概形的语言作为基本语言(与此对照，许多其他教科书不完全使用概形的语言)。所需要的预备知识为代数几何的基础知识 (例如 Hartshorne 的 [H]，Grothendieck 的 [EGA] 更佳)。本书的内容不仅包括群概形的基本理论，而且包括其他一些相关课题，其中有些是工具 (主要是第 IV 章和第 V 章)，有些是基本的应用 (主要是第 VI.2 节，第 VII.4 节和第 IX 章)，有些是这两方面兼之 (主要是第 VI.1 节和第 XI 章)。这些都是很多研究者所需要的基本内容。读者可能感觉这些课题有不同的的深度和难度。除了主要课题外，书中还有一些关于历史、数学语言、思想方法与几何直观等的“聊天”，这些内容比起主要课题来要容易得多，有时还很初等。其中有些聊天可能只是作者个人的观点。读者可以略过这些聊天而不损失主要课题的任何内容。

尽管书中的大部分内容可见于文献，但很少采用文献中的处理，这不仅是为了避免错误，更是因为一本书的篇幅不允许冗长的证明，且需要采

取统一的语言甚至记号。这显然是一个十分艰巨的任务，在写作中必然会出现很多缺点和错误，甚至严重的错误。如果没有同事们和学生们的帮助，是不可能完成的。尽管如此，书中的缺点和错误仍是无法避免的，只能待出版后根据读者的意见进一步修改。

本书在写作上力求自足，力求精炼，尽可能给读者以方便，但阅读本书需要很大的努力和耐心。

书中各章节有一些习题，这些习题基本上都是作者在讲学中积累的，远非充足，但有助于对正文的理解，其中有些结果是有用的。

作者希望感谢下列专家，他们曾就本书中的课题与作者进行了富有启发性的讨论：Pierre Berthelot, Spencer Bloch, 翟敬立, Gerd Faltings, 扶磊, Gerard van der Geer, 橋本喜一郎 (Kiichiro Hashimoto), 伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama,), Luc Illusie, 桂利行 (Toshiyuki Katsura), 黎景輝 (King Fai Lai), Vikram Mehta, 宮西正宜 (Masayoshi Miyanishi), 森重文 (Shigefumi Mori), Niels Nygaard, 小田忠雄 (Tadao Oda), Arthur Ogus, Frans Oort, Richard Pink, 徐飞, 徐克舰, 杨富中, Yuri Zarhin；希望感谢中国科学院晨兴数学中心、台湾理论研究中心、马普数学所、苏黎世高工和东京大学提供了很好的研究环境和条件；感谢晨兴中心算术代数几何讨论班的同事们和首都师范大学的研究生们对本书的贡献。

本书是使用天元软件写的，为此必须感谢不幸病逝的朋友、代数几何学家肖刚，他所编制的天元软件是 TEX 的接口软件，不仅可以用于中文，而且有很强的画图功能，迄今尚无其他排版软件可达到；还应感谢另一位朋友、代数几何学家陈志杰，他将天元软件推进为通用和方便的版本并长期维护。他们二位对作者都曾经常指导。

作者希望感谢国家自然科学基金的长期资助 (实际上作者自 1987 年回国以来一直在国家自然科学基金重点项目或数学天元基金项目资助下工作)，由于国家自然科学基金的评审重质量而不是重数量，作者可以长期集中精力于较深入的研究工作，而不必急于发表阶段性的结果。否则，耗时十余载写一本书是不可想象的。

李克正
2018 年 8 月

目　录

第0章　引言

在今天, 概形理论已经是整个代数几何的基础和语言。概形理论的建立至少有两个动因: 一是建立一种适合于研究数论的几何, 因此考虑一般的交换环而不仅仅是域上的代数; 二是将微分引入到函数中, 因此允许环中有幂零元。

但是, 迄今为止代数几何的核心课题是代数簇, 它是建立在域上的, 而且没有幂零函数。这使得很多人对于使用概形的理由难以理解, 一些人 (包括一些专家) 甚至认为概形理论没什么用, 主张学生不要学。

如果不是很深入地理解概形, 可能只是看到它是原有几何“空间”概念的推广。其实不然, 至少我们可以举出概形的两个非常重要的具体意义, 一是模空间理论, 二是群概形。

模空间理论自黎曼开始, 黎曼建立的椭圆曲线的模空间是复解析空间, 尚无幂零函数, 也没有建立在 $\mathbb{Z}$ 上。它的点代表复数域上的椭圆曲线, 可以理解为丢番图方程, 由此可以理解其有理数解, 但离其整数解仍很遥远。要研究丢番图方程的整数解, 至少也要理解其“模素数 p”的解, 这已经超出复数的范围。而今天的模空间理论已经可以建立在 $\mathbb{Z}$ 上, 故更直接地适用于数论。另一方面, 离开幂零函数就不可能有无穷小变形理论, 而无穷小变形是一个强大的工具, 对于模空间尤其如此。

将概形应用到群论, 则不仅是给出强有力的工具, 而且**发现**了一个自然的事实, 即“无穷小群”的存在。如果简单地考虑带有代数几何结构的群, 就得到“群簇”的概念, 而如果仅考虑特征 0 的域, 则任何群概形都是约化的, 所以只研究群簇也就够了; 但在特征 $p > 0$ 的域上, 一个群概形不一定是约化的, 甚至可能只有一个点但有不平凡的切空间, 这就是所谓“无穷小群”。那么, 是否可以避开不约化的情形而仅考虑群簇呢? 如果这样做, 我们就不能建立“对偶性” (这可以理解为将有限阿贝尔群的对偶理论几何化), 例如 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的群簇结构的对偶就是无穷小群。我们知道, 对偶性是数学中最基本和重要的原理之一, 因此回避无穷小群是不明智的。

我们下面讨论的课题既要涉及群概形, 又要涉及模空间, 因此概形的上述具体意义都将展现出来。

群概形的历史至少可以追溯到 19 世纪中期的椭圆函数、格、椭圆曲线、模形式等。一百多年的发展, 使该领域有极为丰富的内容, 且与其他领域有极为深刻的联系。就其研究课题而言, 至少有线性群簇、阿贝尔簇、平展群概形、无穷小群、群概形的作用和表示、商空间、齐性空间、皮卡概形、阿尔巴内塞簇、丢多涅模、自同构群概形、分类与模空间、志村簇等, 而与其有深刻联系的领域包括代数、数论、李群与李代数、代数几何、复几何、动力系统甚至数学物理。

粗糙地说, 群概形是有代数几何结构的群, 因此在研究中需要兼顾其群结构与几何结构, 以及它们之间的联系。在群论中, 表示是基本的研究方法和工具, 也是联系群与其应用的基本桥梁, 而表示与作用是等价的。在群概形理论中, 作用同样是基本的研究方法和工具, 也是联系群概形与其应用的基本桥梁; 但有所不同的是, 表示与作用一般不等价, 因为自同构群未必有适当的群概形结构 (详见例 Ⅸ.1.2), 因此本书的主题是群概形及其作用, 而不是群概形及其表示, 尽管有时表示也是有意义的。

本书各章节的内容及其相互关联简述如下:

基本的预备知识为代数几何基础, 学过 Hartshorne [H] 的 I-Ⅲ 章基本够了, 若学过 [EGA] 当然更好。对于 [H] 中缺乏或不够深入的内容, 在第 I 章中做了一个较系统的整理作为补充, 包括纤维丛 (平坦性、光滑性、预层的语言、有理映射等), 微积分 (高阶微分、导数与微分算子、外微分与德拉姆复形等), 射影概形的希尔伯特多项式 (一般及多个可逆层的希尔伯特多项式、次数公式、半连续性与消失定理等), 除子与相交类 (除子族及其性质、线性系、泛除子、相交类的基本性质等)。

第 Ⅱ 章为群概形、同态、核、作用、安定子等基本概念, 方法基本上是初等的, 但也有一些较深入的结果 (如引理 1.3, 引理 1.4, 引理 1.6 等)。

第 Ⅲ 章系统地讲群概形的微积分和群概形作用的微积分, 这是基本的和强有力的工具。第 1 节为群概形的微积分, 包括不变微分、李代数与不变微分算子环等, 由此即可得到一些较深入的结果; 第 2 节为群概形作用的微积分, 包括群概形作用诱导的典范微分层同态、李代数同态、微分算子环同态、德拉姆复形等; 第 3 节为切丛与诱导作用, 定义了环概形、模概形并给出广义切丛作为模概形的基本性质, 然后给出群概形的作用在切丛上诱导的线性作用; 第 4 节为关于交换群概形的较深入讨论。

群概形对模空间理论的建立有重要的作用, 而且很多模空间具有群概形结构; 另一方面, 模空间也是研究群概形的重要和强有力工具。因此, 我们用一章 (第 Ⅳ 章) 系统地讲模空间理论的基础。其中第 1 节讲模空间的基本概念和思想, 并举例说明如何应用; 第 2 节讲希尔伯特概形; 第 3 节讲变形的概念、变形与模空间的联系, 并举例说明变形理论的强大。后面各章都或多或少地用到模空间的方法和思想。

商的存在性和构造是代数几何中重要而困难的问题, 在群概形及其作用中尤为重要; 推出是商的推广。第 Ⅴ 章专门讨论这一课题。第 1 节讲商与推出的基本概念, 并给出一个基本的判别准则; 第 2 节给出射影情形商与推出存在的一个充分条件, 并讨论了有理商; 第 3 节讨论仿射情形, 特别是有限情形商与推出存在的条件, 并给出格罗滕迪克下降原理。

第 Ⅵ 章将商与推出作为工具应用于群概形。第 1 节讲群概形作用的商, 给出商与微积分的联系, 对射影情形、有限仿射作用情形和半稳定情形给出商存在的充分条件, 并初步讨论了齐性概形, 将这些应用于域上的情形给出域上的群概形及其作用的一些基本性质; 第 2 节讲皮卡概形, 给出皮卡概形的存在性和基本性质, 并讨论群概形的作用在皮卡概形上的诱导作用。

第 Ⅶ 章为阿贝尔簇与阿贝尔概形, 这方面的内容很丰富。第 1 节为刚性及其应用, 并给出阿贝尔簇与同态的一些基本性质; 第 2 节为对偶理论, 建立于皮卡概形理论之上, 给出阿贝尔概形的对偶的存在性与基本性质, 并进一步深入讨论极化等, 给出黎曼-罗赫定理等深刻定理, 并对特征 $p > 0$ 情形定义了一般的移位态射; 第 3 节用 l-进表示深入讨论自同态环与极化等; 第 4 节为阿尔巴内塞簇的基本理论, 包括阿贝尔簇的极小性、曲线的雅克比簇、阿尔巴内塞簇的存在性与一些基本性质; 作为附录, 第 5 节给出复阿贝尔簇的解析理论概要供参考。

在特征 $p > 0$ 的情形, 丢多涅模是研究交换群概形的一个基本工具, 这方面的理论相当庞大, 且甚为复杂。第 Ⅷ 章专门讨论这一课题。第 1 节讲交换形式群、p-可除群与塞尔对偶; 第 2 节讲维特环、维特概形与基本性质; 第 3 节通过“丢多涅元”建立丢多涅模的基本理论, 并定义一般基上的丢多涅模概形; 第 4 节讲对偶与拟极化, 其中对偶是构造性地给出的; 第 5 节讨论丢多涅模的结构和分类, 给出源晶体的结构, 并初步讨论

了丢多涅模与拟极化丢多涅模的同构分类。

对于一般的射影概形, 自同构群概形是一个重要的相关对象, 也经常是一个有力的工具。第 IX 章专门讨论这一课题。第 1 节给出自同构群概形的一些基本性质和例子, 并对几个特殊情形给出自同构群概形的结构; 第 2 节为自同构群概形的微积分, 给出自同构群概形的变形的基本定理和自同构群概形的微积分的基本定理, 并给出对阿贝尔簇和齐性概形的一些应用; 第 3 节讨论保持某些几何结构的自同构群概形, 由此可以将自同构群概形的某些方法应用于非射影情形, 特别是线性情形; 第 4 节应用自同构群概形证明阿贝尔簇的变形的基本定理 (这个定理原有的证明并非如此, 但应用自同构群概形可使证明大为简化)。

第 X 章主要是给出域上的有限型群概形的结构。这方面的结果基本上都是经典的 (完成于 20 世纪 50 年代), 但要改为用现代的语言证明, 有时颇不容易。由于有了前几章的准备, 可以避免冗长的证明。

第 XI 章为阿贝尔簇的模空间理论。作为直观的预备, 首先简述了复解析方法及一些结果; 然后用代数几何方法建立了阿贝尔簇的粗糙和精细模空间以及曲线的模空间, 并初步给出模空间的一些性质。

书中各章节有一些习题, 做这些习题有助于对正文的理解, 且其中一些结果是有用的。

第 I 章　代数几何的一些预备

第 1 节　纤维丛

1. 纤维丛的基本概念

拓扑学中的纤维丛是指局部平凡族。详言之，一个拓扑空间的连续映射 $f: X \to S$ 称为 S 上的一个*纤维丛*，如果存在一个拓扑空间 F，使得对任一点 $s \in S$ 有一个开邻域 $U \subset S$ 及一个同胚 $\phi: f^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} F \times U$，满足 $f|_{f^{-1}(U)} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$。此时 F 称为这个纤维丛的*纤维*。$F \times S$ 当然是一个纤维丛，称为*平凡的纤维丛*。一般的纤维丛虽然局部 (即在足够小的开集 $U \subset S$ 上) 结构和 $F \times S$ 一样，但整体结构却可能不同。例如设 S 为圆周，F 为线段，则有两个熟知的纤维丛，一是环带，另一是默比乌斯带 (图 1)。这两个纤维丛是显然不同的，因为前者是双侧的而后者是单侧的。

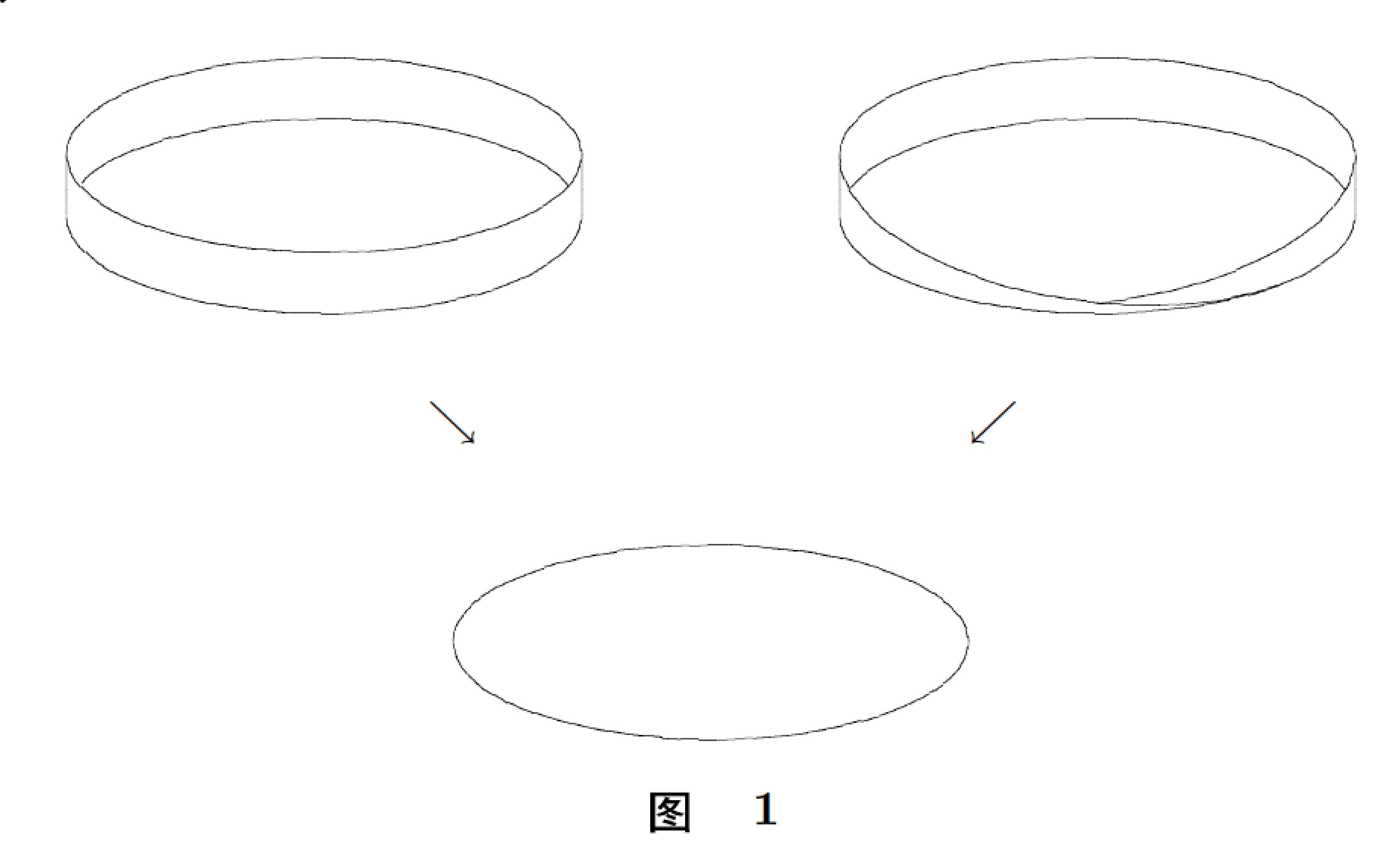


图　1

在代数几何中也会遇到类似的情形，特别是向量丛的情形。

例 1. 设 k 是代数闭域，$S = \mathbb{P}^1_k$，齐次坐标为 $(X_0 : X_1)$，$T = \mathbb{A}^2_k$，坐标为 x_0, x_1，则 $T \times_k S \cong \mathbb{A}^2_S$ 为 S 上的平凡平面丛，它有一个子丛

$$L = \{(x_0, x_1, X_0 : X_1) | x_0X_0 + x_1X_1 = 0\} \subset T \times_k S \tag{1}$$

这是 S 上的一个非平凡直线丛。

在 $k=\mathbb{C}$ 的情形, 为了直观地理解 L, 我们考虑它的实点集 (即坐标为实数的点集)。注意 S 的实点集为 $P^1_{\mathbb{R}}$, 它同胚于圆; 而 L 的实点集组成 $P^1_{\mathbb{R}}$ 上的一个实直线丛, 它像默比乌斯带那样, 是单侧的。与此对照, 一个平凡实直线丛 $\mathbb{R}\times P^1_{\mathbb{R}}$ 则为圆柱面, 是双侧的。

例 2. 设 X 为代数闭域 k 上的拟射影代数集, $\mathcal{F}$ 为 X 上的秩 n 局部自由层。取 X 的开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i}\cong O_X^n|_{U_i}$ $(\forall i\in I)$, 对任两个 $i,j\in I$, 我们有同构 $\phi_i:\mathcal{F}|_{U_i}\to O_X^n|_{U_i}$ 和 $\phi_j:\mathcal{F}|_{U_j}\to O_X^n|_{U_j}$, 而 $O_X^n|_{U_i\cap U_j}$ 在 $U_i\cap U_j$ 上的自同构 $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ 由一个系数在 $O_X(U_i\cap U_j)$ 中的可逆 $n\times n$ 矩阵 A_{ij} 给出 $(\forall i,j\in I)$, 且对任意 $i,j,l\in I$, 在 $O_X(U_i\cap U_j\cap U_l)$ 上有

$$A_{ij}A_{jl}=A_{il} \tag{2}$$

而 $\mathcal{F}$ 在同构之下由所有矩阵 A_{ij} 唯一决定。令 $T_i=\mathbb{A}_k^n\times U_i$ $(\forall i\in I)$。对任意 $j\neq i\in I$, 简记 $T_i|_{U_i\cap U_j}=T_i\times_{U_i}(U_i\cap U_j)$ (即 $U_i\cap U_j$ 在 T_i 中的原象), 则 A_{ij} 定义了一个 (线性) 同构

$$f_{ij}:T_j|_{U_i\cap U_j}\to T_i|_{U_i\cap U_j} \tag{3}$$

且对任意 $i,j,l\in I$, 在 $T_l|_{U_i\cap U_j\cap U_l}$ 上有

$$f_{ij}\circ f_{jl}=f_{il} \tag{4}$$

由此可知所有 T_i 按 (3) “粘”成一个代数集 T, 它是 X 上的一个纤维丛, 每个点 $x\in X$ 上的纤维为 n 维向量空间, 所以叫作 (秩为 n 的) *向量丛*。上面说明了向量丛与局部自由层等价。

特别地, 若 $\mathcal{F}$ 为可逆层 (即 $n=1$), 则 T 称为 *直线丛*。例如对 $X=\mathbb{P}_k^n$, 每个 $O_X(d)$ 给出一个直线丛。例 1 中的直线丛 L 就是由 $O_S(1)$ 给出的。

更一般地, 设 S 为诺特概形, $\mathcal{M}$ 为 S 上的凝聚层。记 $\mathbf{Sym}(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 在 O_S 上的对称积, $\mathbb{A}(\mathcal{M})=\mathbb{A}_S(\mathcal{M})=\mathbf{Spec}(\mathbf{Sym}(\mathcal{M}))$, 当 $\mathcal{M}$ 为平坦 (即局部自由) 层时称为 S 上的 *向量丛*, 此时它在 S 上平坦。特别地, 当 $\mathcal{M}$ 的秩 $n=1$ (即 $\mathcal{M}$ 为可逆层) 时, 称 $\mathbb{A}(\mathcal{M})$ 为 *直线丛*。易见 $\mathcal{M}\mapsto\mathbb{A}(\mathcal{M}^\vee)$ 给出 S 上秩 n 局部自由层的同构类与 S 上秩 n 向量丛的

同构类之间的一一对应 (其逆由 $\mathcal{S}ect_p$ 给出, 其中 $p:\mathbb{A}(\mathcal{M}^\vee)\to S$ 为投射)。特别地, S 上的一个直线丛等价于一个可逆层。

若 $f:T\to S$ 为诺特概形的态射, 易见 $\mathbb{A}_S(\mathcal{M})\times_S T\cong\mathbb{A}_T(f^*\mathcal{M})$。

但对一般情形, 像拓扑学中那样的纤维丛定义在代数几何中并不很合适, 我们来看一个典型例子。

例 3. 在 $S=\mathbb{C}-\{0,1\}$ 上的平凡射影平面丛 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\times S$ 中, 由方程 $X_2^2X_0=X_1(X_1-X_0)(X_1-\lambda X_0)$ (λ 为 S 的坐标变量) 定义的代数子集 X 给出一个子丛 $f:X\to S$, 它在拓扑意义下是环面丛 (即它的纤维是像救生圈那样的环面), 但在代数几何与复几何中它不是局部平凡的, f 在两个点 $\lambda,\lambda'\in S$ 上的纤维 (解析或代数) 同构当且仅当 λ' 等于 λ, $1/\lambda$, $1-\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $\lambda/(\lambda-1)$ 或 $1-1/\lambda$。所以对任何开子集 $U\subset S$, $f^{-1}(U)$ 都不同构于 U 与某条曲线的积, 换言之 $X\to S$ 作为代数曲线族或作为黎曼曲面族不是局部平凡的。

2. 平坦性

为了适应多方面 (如分类学、变形理论、数论等) 的应用, 在代数几何中需要推广纤维丛的概念。经过长时期的探索, 今天人们知道平坦态射是纤维丛在代数几何中的一种很好的推广, 而且需要将其定义在一般概形上。

例如令 $S=\mathbb{C}$ (比例 3 中的 S 多一个点), 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\times S$ 中由方程 $X_2^2X_0=X_1(X_1-X_0)(X_1-\lambda X_0)$ 定义的曲线簇 X_λ 在 S 上是平坦的, 但它在 $0\in S$ 上的纤维是退化的 (为伪球面), 即使在拓扑意义下也不是纤维丛。

例 4. 设 $f_1,...,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]$。考虑丢番图方程 $f_1=...=f_r=0$, 它在代数几何上对应于概形 $X=\mathrm{Spec}R$, 其中 $R=\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]/(f_1,...,f_r)$。若 R 是 $\mathbb{Z}$-平坦的 (即 $\mathbb{Z}$-无挠的), 则可将 X 看作 $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上的纤维丛。

设 P 是概形 S 的一个点, 不妨设 $P\in\mathrm{Spec}R\subset S$, 即为 R 中的一个素理想。令 $\kappa(P)=R_P/PR_P$, 则 $\mathrm{Spec}\kappa(P)$ 可以看作由一个点 P 组成的

S 的子概形, 记作 $\{P\}$。

设 $f: X \to S$ 与 $g: Y \to S$ 为概形的态射, 则可以定义它们的**纤维积**(亦称为 f 和 g 的"**拉回**"(pull-back)) $X \times_S Y$ (见 [H, Theorem Ⅱ.3.3]), 它是一个概形且有两个态射("投射") $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X$, $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$, 满足

i) $f \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$;

ii) 对任意概形 Z 及任意态射 $p: Z \to X$, $q: Z \to Y$, 若 $f \circ p = g \circ q$, 则有唯一态射 $\phi: Z \to X \times_S Y$ 使得 $p = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$, $q = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$。

例如当 $S = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$, $Y = \mathrm{Spec}B$ 时, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}A \otimes_R B$。在一般情形 $X \times_S Y$ 是由形如 $\mathrm{Spec}A \otimes_R B$ 的开集粘成的。

特别地, 若 $X = Y = Z$, $f = g$ 且 $p = q = \mathrm{id}_X$, 则得"对角态射" $\Delta: X \to X \times_S X$ 使得 $p \circ \Delta = q \circ \Delta = \mathrm{id}_X$。我们一般假定 Δ 为闭嵌入。若拓扑空间的积都带有积拓扑, 则对角映射为闭嵌入就等价于豪斯道夫分离性公理 (T_2 公理)。但对于察里斯基拓扑, $X \times Y$ 的拓扑一般不是 X 与 Y 的拓扑的积。事实上, 察里斯基拓扑连 T_1 公理也不满足。但通过假定 Δ 为闭嵌入, 可以把 T_2 公理变相地加到概形中, 所以我们把它称作分离性公理。

一个有限型分离态射 $f: X \to Y$ 称为**紧的**(proper), 如果它是"泛闭映射", 即对任意态射 $Y' \to Y$, 投射 $\mathrm{pr}_2 : X \times_Y Y' \to Y'$ 是 (察里斯基拓扑的) 闭映射。这个定义将拓扑学中的紧致概念引入代数几何中。

引理 1. 一个态射 $f: X \to Y$ 为闭嵌入当且仅当它是紧的且对角态射 $\Delta: X \to X \times_Y X$ 是同构。

证. 必要性是显然的, 以下证明充分性。

先考虑 $Y = \mathrm{Spec}(k)$, k 为域的特殊情形, 此时由 Δ 是同构可见 $\dim(X) = \dim(X \times_k X) = 2\dim(X)$, 从而 $\dim(X) = 0$, 再由 f 是紧的可见 f 是有限的。令 $d = \deg(f)$, 则 $\deg(X \times_k X/k) = d^2$, 再由 Δ 是同构可见 $d = d^2$, 从而 $d = 1$, 即 f 是同构。

现在考虑一般情形。由上述特殊情形可见 f 是集合意义下的一一映射, 故由 f 是紧的可见 f 是有限的。这样只需证明对任意 $x \in X$, $f^* : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ 是满射。简记 $A = O_{Y,f(x)}$, $B = O_{X,x}$, $p \subset A$ 为极大

理想, $k=A/p$。注意 B 作为 A-模是有限生成的, 记 $M=B/f^*(A)$, 也是有限生成的 A-模。对于正合列 $A\to B\to M\to 0$, $\otimes_A B$ 得正合列

$$B\xrightarrow{1\otimes_A \mathrm{id}_B} B\otimes_A B\to M\otimes_A B\to 0 \tag{1}$$

由于 $\Delta^*: B\otimes_A B\to B$ 是同构, 而 $\Delta^*\circ(1\otimes_A \mathrm{id}_B)=\mathrm{id}_B$, 可见 $1\otimes_A \mathrm{id}_B$ 是同构, 从而 $M\otimes_A B=0$。对此 $\otimes_A k$, 并注意由上述特殊情形有 $B/pB\cong k$, 得

$$0=(M\otimes_A B)\otimes_A k\cong(M\otimes_A k)\otimes_k(B\otimes_A k)\cong(M/pM)\otimes_k(B/pB)\cong M/pM \tag{2}$$

由中山正引理得 $M=0$。证毕。

对偶地可以定义“推出” (push-out)。设 $p:T\to X$, $q:T\to Y$ 为态射。若存在概形 S 及态射 $f:X\to S$, $g:Y\to S$ 满足

i) $f\circ p=g\circ q$;

ii) 对任意概形 Z 及任意态射 $f':X\to Z$, $g':Y\to Z$, 若 $f'\circ p=g'\circ q$, 则有唯一态射 $\psi:S\to Z$ 使得 $f'=\psi\circ f$, $g'=\psi\circ g$,

则称 S 为 p 和 q 的**推出**。但在概形范畴中推出一般不存在。我们在后面将看到几类推出存在的特殊情形 (见第 V 章)。

纤维积可以看作 (一个因子的) **平凡纤维丛**, 例如在例 3 中, $\mathbb{P}^2\times S$ 是 S 上的一个平凡纤维丛, 而 X 是它的一个非平凡子丛。在代数几何中的纤维丛一般都是平凡丛的子丛。

设 $f:X\to S$ 为概形态射, $P\in S$, 则 $X\times_S\{P\}$ 可以看成 $f^{-1}(P)$ 的概形结构, 称作 X 在 P 点上的**纤维**。一个 f 的**截口** (*section*) 是指一个态射 $g:S\to X$ 使得 $f\circ g=\mathrm{id}_S$。若 $T\to S$ 为态射, 则 $f\times_S \mathrm{id}_T: X\times_S T\to T$ 称作 f 在 T 上的**基变换** (*base change*)。

并非所有态射都可以看作纤维丛, 我们来看两个例子。

例 5. 设 S 为 x-y 平面, X 为三维空间中的二次曲面 $xz=y$, $f:X\to S$ 为投射。对于一点 $P=(x,y)\in S$, 若 $x\neq 0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一点; 但若 $x=y=0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一条直线。这种情况称为“爆发” (blow up), 即某个纤维的维数特别大, 大于 f 的相对维数 (即 $\dim(X)-\dim(S)$)。显然不应把这样的态射看作纤维丛。

例 6. 仍设 S 为 x-y 平面, X 为三维空间中的平面 $z = 1$ 外加一点 $(0,0,2)$, $f: X \to S$ 为投射。对于一点 $P = (x,y) \in S$, 若 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一点, 但若 $x = y = 0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为两点。这种情况称为"挠"(torsion), 即某个纤维的次数 (degree) 特别大。这样的态射也不应看作纤维从。

上面两个例子都是典型的不平坦态射。若 $S = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$, 而 $f: X \to S$ 由一个同态 $R \to A$ 诱导, 则 A 可以看作一个 R-代数, 此时我们说 f 平坦的意思是 A 为平坦 R-代数, 即对任意 R-模单同态 $g: M \to N$, $g \otimes_R \mathrm{id}_A : M \otimes_R A \to N \otimes_R A$ 为单射。在一般情形我们说 f 平坦的意思是它在仿射开子概形上的限制都平坦。若 f 是平坦的, 则 f 的许多性质 (如相对维数、次数以及下面将看到的许多指数) 在基变换下保持, 特别地在纤维上保持。

由于上述原因, 我们对纤维从的一个基本要求就是平坦性。而在很多情形下, 仅有平坦性就够了。因此, 在代数几何中常研究推广了的纤维从。

平坦性是一个不很直观的概念: 一个环 R 上的模 M 称为**平坦模**, 如果对任意 R-模的单同态 $\phi: N' \hookrightarrow N$, 诱导同态 $\phi \otimes_R \mathrm{id}_M : N' \otimes_R M \to N \otimes_R M$ 是单同态。设 $\mathcal{F}$ 为一个概形 S 上的 O_S-模层, 若任一点 $s \in S$ 上的茎 $\mathcal{F}_s$ 是 $O_{S,s}$ 上的平坦模, 则称 $\mathcal{F}$ 在 S 上是**平坦的**。若 $\mathcal{F}$ 是拟凝聚层, 这等价于对任意仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset S$, $\mathcal{F}(U)$ 为平坦 R-模。因此一个概形的态射 $f: X \to S$ 为平坦的当且仅当对任意 $x \in X$, $O_{X,x}$ 是平坦 $O_{S,f(x)}$-模 (此时亦称 X 在 S 上平坦)。

关于平坦模的许多命题可以翻译成几何的语言, 我们罗列一些下面将要用到的 (参看 [Ma, Chapters 2, 8] 或 [L1, Ⅶ & ⅩⅢ.5])。

引理 2. 设 S 为诺特概形, X, Y 为有限型 S-概形, $\mathcal{F}$ 为 X 上的拟凝聚层。

i) 若 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ 为 X 上拟凝聚层的正合列, 其中 $\mathcal{F}''$ 在 X 上平坦, 则 $\mathcal{F}'$ 在 X 上平坦当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 X 上平坦。 X 上的平坦模层在 O_X 上的张量积是平坦的。

ii) $\mathbb{A}^n_S$ 和 $\mathbb{P}^n_S$ 在 S 上平坦。S 上的向量从在 S 上平坦。开嵌入是平

坦态射。

iii) 若 $\mathcal{F}$ 在 X 上平坦, 则对任意 S-态射 $f: Y \to X$, $f^*\mathcal{F}$ 在 Y 上平坦。

iv) 若态射 $X \to S$ 平坦则态射 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ 平坦 (简言之“基变换保持平坦性”)。平坦态射的合成是平坦态射。若 $X \to S$ 平坦而 $\mathcal{F}$ 在 X 上平坦, 则 $\mathcal{F}$ 在 S 上平坦。

v) 若 $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, 则 $\mathcal{F}$ 在 X 上平坦当且仅当 $\mathcal{F}$ 是局部自由的 (例如可逆的)。

vi) 设 X,Y 在 S 上平坦, $f: X \to Y$ 为 S-态射。若对任一点 $s \in S$, f 在 s 上的纤维 $f_s : X_s \to Y_s$ 平坦, 则 f 平坦。

vii) 设 X 在 S 上平坦, $f : Y \to X$ 为闭嵌入, 其理想层为 $\mathcal{I}$ $(= \ker(O_X \to f_*O_Y))$。若对任意点 $s \in S$, $\mathcal{I}_s \to (O_X)_s$ 是单射, 则 Y 在 S 上平坦。

viii) 若 X 在 S 上平坦且 S 是连通的, 则 X 在 S 上的所有非空纤维具有相同的维数。

ix) 若 $f: X \to Y$ 为平坦 S-态射，则 f 为开映射。

x) 若 X 是正则的且 $X \to S$ 是平坦满射, 则 S 是正则的; 若 S 是正则连通的, $X \to S$ 的纤维都是正则的且纤维的每个分支的维数都等于 $\dim(X) - \dim(S)$, 则 X 是正则的且 $X \to S$ 平坦; 若 S 是正则连通的且 $X \to S$ 是有限的, 则 $X \to S$ 平坦当且仅当 X 是 C.M. 且 X 的分支维数都等于 $\dim(S)$。

xi) 若 $X \to S$ 为有限型的且 $\mathcal{F}$ 为凝聚层, 则 $\{x \in X | \mathcal{F}_x$ 在 S 上平坦$\}$ 为 X 中的开集。

xii) 设 $X \to S$ 为有限型的，$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 为 X 上的凝聚层的同态, 其中 $\mathcal{E}$ 在 S 上平坦。则 ϕ 在 S 上的纤维都是单射当且仅当 ϕ 是单射且 $\mathrm{coker}(\phi)$ 在 S 上平坦。

注意对于一般的态射 $X \to S$ (S 不可约), 一个点 $s \in S$ 上的纤维若非空则维数不小于一般点上的纤维维数。

例 7. 令 V_1 为 x-y-z 空间中的曲线 $x = t(t-1), y = t^2(t-1), z = t$, 则 V_1 在 x-y 平面的投影的像为 V_2: $x = t(t-1), y = t^2(t-1)$。 V_1 的函数

环同构于 $k[t]$, 而 V_2 的函数环可以看作是 $k[t]$ 的子环 $k[t(t-1),t^2(t-1)]\cong k[x,y]/(y^2-xy-x^3)$。投射 $V_1\to V_2$ 将 V_1 中的两个点 $t=0,1$ 映到 V_2 的同一个点, 而在其余各处是一一映射。令 W 为直线 (函数环为 $k[u]$), $X_1=V_1\times W$ (函数环为 $A_1\cong k[t,u]$), $X_2=V_2\times W$ (函数环为 $A_2\cong k[x,y,u]/(y^2-xy-x^3)$), 则包含同态 $f:A_2\to A_1$ 诱导的投射 $\hat{f}:X_1\to X_2$ 是闭映射而不是开映射, 因为 $\hat{f}(U(t-u))$ 为 X_2 去掉一条曲线再加上两个点, 不是开集 (图 2)。故由引理 2.ix) 可见 $\hat{f}$ (从而 f) 不平坦, 再由引理 2.iv) 可见投射 $V_1\to V_2$ 也不平坦。

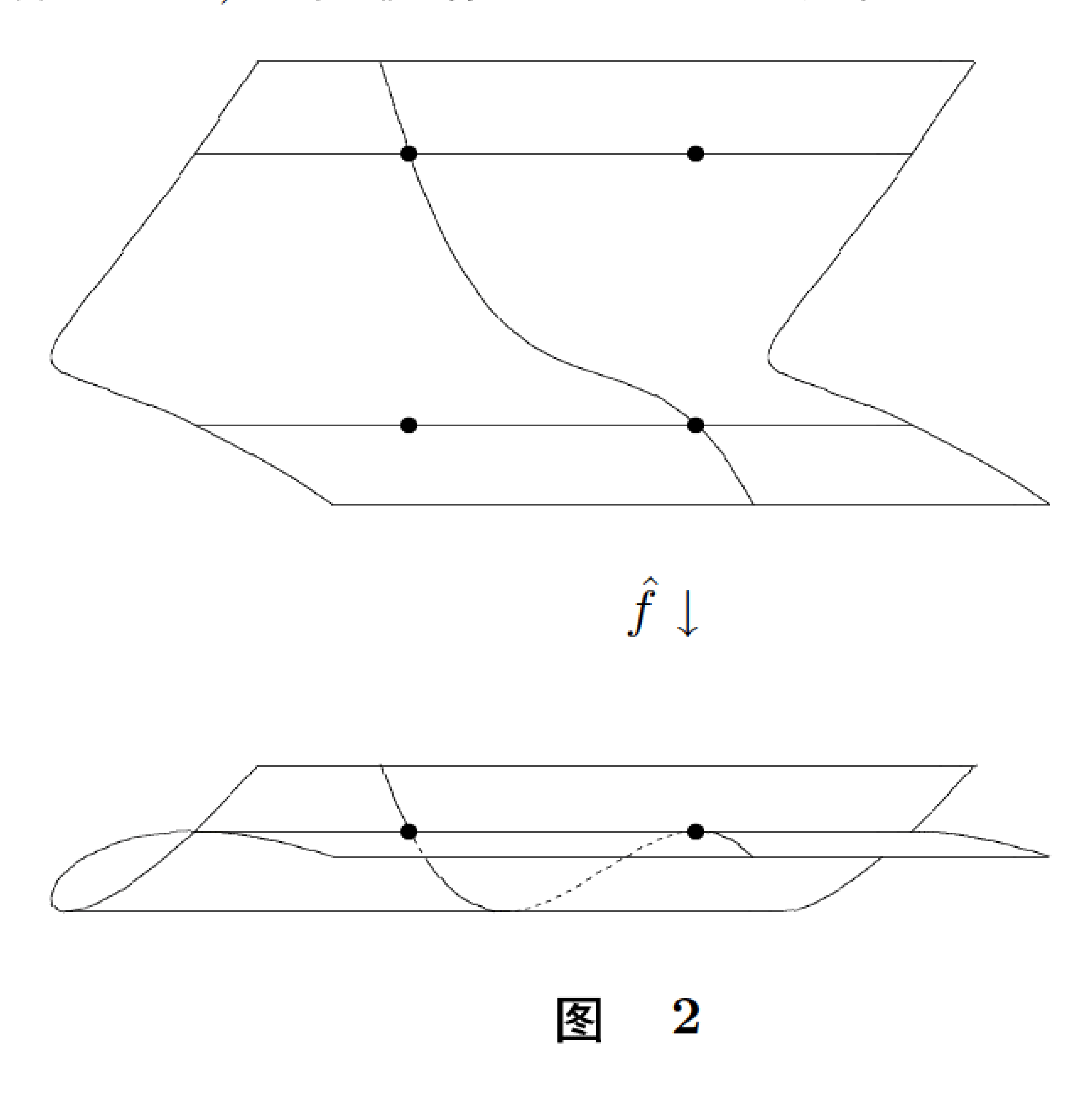


图 2

例 8. 设 $f:X\to S$ 是有限平坦的, 为简明起见不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$, $X=\mathrm{Spec}A$, 且 S 是连通的而 f 为满射。此时存在整数 n 使得 A 作为 R 模是局部自由秩 n 的, 我们称 n 为 f 的次数(或 X 在 S 上的次数), 记为 $\deg f$。对任一素理想 $P\subset R$, 有 $f^{-1}(P)\cong\mathrm{Spec}B$, 其中 $B=A\otimes_R\kappa(P)$ 为阿廷 $\kappa(P)$-代数, 且 $\dim_{\kappa(P)}B=\deg f$。注意 $B\cong B_1\times\cdots\times B_r$, 其中 $B_1,...,B_r$ 为阿廷局部环, 记其剩余类域分别为 $K_1,...,K_r$, 则有 $\deg f=\sum_i l(B_i)[K_i:\kappa(P)]$ (一个熟知的例子是 $S=\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, $X=\mathrm{Spec}A$, 其中 A 是 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Q}$ 的一个有限扩域中的整闭包, 另一个常见的例子是一个域上的光滑完备曲线间的非平凡态射)。

平坦性迄今仍是一个有些神秘的概念, 下面的例子说明平坦性有时

很复杂。

例 9. 设 k 为域, $X \cong Y \cong \mathbb{A}_k^3$, 其坐标分别为 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3。对 1,2,3 的任一置换 σ, 在 $X \times_k Y$ 中定义子簇 $H_\sigma = \{x_1 = y_{\sigma 1}, x_2 = y_{\sigma 2}, x_3 = y_{\sigma 3}\}$, 则每个 H_σ 在 X 上平坦, $\bigcup_\sigma H_\sigma$ 也在 X 上平坦, 但 $H_{(1)} \cup H_{(123)} \cup H_{(132)}$ 却在 X 上不平坦。

迄今为止对于平坦性的最接近直观的理解是: 一个模是平坦的当且仅当它是有限生成的自由模的直极限 (参看 [ZhangC1])。

3. 光滑性

我们还需要了解切空间、切从、光滑性等概念。

在整体微分几何中, 切空间是由导数定义的: 设 X 是微分流形, $x \in X$, 记 $O_{X,x}$ 为 X 上在 x 附近有定义的可微函数组成的局部环, 则 X 在 x 处的一个导数是指一个线性映射 $D: O_{X,x} \to \mathbb{R}$, 满足

$$D(ab) = \bar{a}Db + \bar{b}Da \quad (\forall a, b \in O_{X,x}) \tag{1}$$

其中 $\bar{a} = a(x)$, 而 X 在 x 处的切空间 $T_{X,x}$ 由所有这些导数组成。在复几何中对于复解析空间也采用类似的切空间定义。

令 $m_x \subset O_{X,x}$ 为极大理想, 即在点 x 取值 0 的函数组成的理想。我们来说明, X 在 x 处的一个导数等价于一个线性映射

$$m_x/m_x^2 \to \mathbb{R} \tag{2}$$

首先注意, 由 (1) 可见对任意常数 $c \in \mathbb{R}$ 有 $Dc = 0$, 且对任意 $a \in m_x^2$ 有 $Da = 0$, 这样就给出线性映射 $O_{X,x}/m_x^2 \to \mathbb{R}$, 而 m_x/m_x^2 为 $O_{X,x}/m_x^2$ 的线性子空间, 这就给出一个线性映射 (2); 反之, 若给定 (2), 注意作为线性空间 $O_{X,x}/m_x^2 \cong \mathbb{R} \oplus m_x/m_x^2$, 可以将 (2) 扩张到 $O_{X,x}/m_x^2$ (只要令其在 $\mathbb{R} \oplus 0$ 上取值 0 即可), 从而得到一个线性映射 $D: O_{X,x} \to \mathbb{R}$, 不难验证 D 是一个导数: 注意对任意 $a \in O_{X,x}$ 有 $a = \bar{a} + a'$, 其中 $a' \in m_x$, 而 $Da' = Da$。对任意 $a, b \in O_{X,x}$ 有 $ab = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b' + \bar{b}a' + a'b'$, 而 $a'b' \in m_x^2$, 故有 $D(ab) = \bar{a}Db' + \bar{b}Da' = \bar{a}Db + \bar{b}Da$。由上所述有

$$T_{X,x} \cong Hom_{\mathbb{R}}(m_x/m_x^2, \mathbb{R}) \tag{3}$$

上述切空间的定义看上去与通常“具体的”切空间很不一样, 例如平面 $X=\mathbb{R}^2$ 中的曲线 $C: f(x,y)=0$ 在一点 (x_0,y_0) 处的切线由方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}(x_1-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}(y_1-y_0)=0 \tag{4}$$

给出。如果我们把平面 X 本身看作它在其中任一点 (x_0,y_0) 处的切空间 (但原点换为 (x_0,y_0)), 则切向量 (x_1-x_0,y_1-y_0) 所对应的导数 D 满足 $Dx=x_1-x_0$, $Dy=y_1-y_0$, 而 (4) 的左边是 Df, 就是说 D 是 C 的切向量当且仅当 $Df=0$, 这正和上述切空间的定义一致。但注意我们这里定义的切空间是 (在同构之下) 与局部坐标的选取无关的。

上面的定义可以搬到代数几何中来。但在代数几何中 (尤其是在概形的定义中) 常是“先有函数后有空间” (例如仿射代数集可以由它的函数环的极大理想集给出), 切空间和微分空间 (在微分几何中定义为切空间的对偶) 的定义次序也要反过来。

首先我们来定义微分。由于在一般域上不能用取极限的方法定义导数, 我们采用 19 世纪末德国学派的方法, 基本想法是: 设 x 是代数集的一个局部函数, 它的微分是一个新变量 dx, 而 $dx^2=0$。我们记 $x'=x+dx$, 它可以看作 x 的一个“无穷小”变化, 而微分 $dx=x'-x$, 从而对任意代数函数 $f(x)$, 可以定义 $df=f(x')-f(x) \pmod{dx^2}$, 这和传统的定义是一致的, 因为在 x 是实或复变量的情形, $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+O(\Delta x^2)$ 而 $df=f'(x)dx$。如果我们把 x 和 x' 看作 x 的两个“拷贝”, 就可以得到下面这样的定义。

设 X 是代数闭域 k 上的仿射代数集, 函数环为 R 。令 $A=R\otimes_k R$, $\mu: A\to R$ 为同态 $\mu(a\otimes_k b)=ab$, $I=\ker(\mu)$, 则 I 由所有 $1\otimes_k x-x\otimes_k 1$ $(x\in R)$ 生成。我们将 $1\otimes_k x$ 和 $x\otimes_k 1$ 分别看作 x 的两个“拷贝” (相当于上面的 x' 和 x), 则可记 $dx=1\otimes_k x-x\otimes_k 1 \pmod{I^2}$。于是我们记 $\Omega^1_{R/k}=I/I^2$, 称为 R 的微分模, 而从 R 到 $\Omega^1_{R/k}$ 有一个微分映射 d, 将 $x\in R$ 映到 $1\otimes_k x-x\otimes_k 1$ 在 $\Omega^1_{R/k}$ 中的象。注意 d 是 k-线性的但一般不是 R-线性的, 且满足 $d(ab)=adb+bda$。

更一般地, 设 S,X 为诺特概形, $\pi: X\to S$ 为分离态射。令 $\Delta: X\to X\times_S X$ 为对角态射, $\mathcal{I}$ 为 $\Delta(X)$ 的定义理想层, 注意它是 $X\times_S X$ 上的一个凝聚层。定义 X 在 S 上的相对微分层为 $\Omega^1_{X/S}=\Delta^*\mathcal{I}$ (为 X 上的

凝聚层), 其对偶 $\mathcal{T}_{X/S}=\mathcal{H}om_{O_X}(\Omega^1_{X/S},O_X)$ 称为**相对切层**。易见 O_S-线性映射 $\mathrm{pr}_2^*-\mathrm{pr}_1^*$ 将 O_X 映入 $\mathcal{I}$, 从而诱导"微分映射" $d:O_X\to\Omega^1_{X/S}$ (对任意开集 $U\subset X$ 及任意截口 $a,b\in O_X(U)$ 有 $d(ab)=adb+bda$)。如果 $\Omega^1_{X/S}$ 是局部自由的, 则它对应的向量丛 (如例 2) 称为**相对微分丛**, 其对偶 $\mathcal{T}_{X/S}$ 对应的向量丛称为**相对切丛**, 记为 $\mathbb{T}_{X/S}$。对任意 $x\in X$, 记 $\kappa(x)=O_{X,x}/m_x$, 定义 $X\to S$ 在 x 处的**相对切空间**为

$$T_{X/S,x}=Der_S(O_{X,x},\kappa(x))\cong Hom_{\kappa(x)}(m_x/m_x^2,\kappa(x)) \tag{5}$$

它不一定同构于 $\mathcal{T}_{X/S}$ 在点 x 的纤维。

引理 3. 设 $f:X\to Y$ 为 S-概形的态射, 则

i) 存在 O_X-模层的典范正合列

$$f^*\Omega^1_{Y/S}\xrightarrow{\phi}\Omega^1_{X/S}\to\Omega^1_{X/Y}\to 0 \tag{6}$$

其中 ϕ 由 f 诱导 ($f^*\Omega^1_{Y/S}$ 是 $\Omega^1_{Y/S}$ 在 X 上的拉回)。

ii) 若 f 是闭嵌入, $\mathcal{I}$ 为 $f(X)\subset Y$ 的定义理想层, 则有 O_X-模层的典范正合列

$$f^*\mathcal{I}\xrightarrow{\delta}f^*\Omega^1_{Y/S}\xrightarrow{\phi}\Omega^1_{X/S}\to 0 \tag{7}$$

其中 δ 的定义是对任意开子集 $U\subset Y$ 及任意截口 $a\in\mathcal{I}(U)$, $\delta(f^*a)=f^*(da)$。

iii) 对任意基变换 $t:T\to S$ 有典范同构

$$\Omega^1_{X\times_S T/T}\cong(\mathrm{id}_X\times_S t)^*\Omega^1_{X/S} \tag{8}$$

证明很简单, 只要约化为仿射情形再用交换代数即可(参看 [L1, XVI])。

例 10. 设 $X=\mathbb{A}^n_k$ (函数环为 $k[x_1,...,x_n]$), $Y=\mathbb{P}^n_k$ (齐次坐标为 $(X_0:...:X_n)$), 则 $\Omega^1_{X/k}\cong O_X^{\oplus n}$, 由 $dx_1,...,dx_n$ 生成, 而存在正合列

$$0\to\Omega^1_{Y/k}\to O_Y(-1)^{\oplus n+1}\to O_Y\to 0 \tag{9}$$

(参看 [H, Theorem Ⅱ.8.13])。

例 11. 设 X 为域 k 上的代数簇, $x \in X$ 为 k-点。令 $T = \mathrm{Spec} k[t]/(t^2)$, 则 X 在点 x 的一个切向量等价于一个 k-态射 $T \to X$, 其闭点映到 x (参看 [H, Ex. Ⅱ.2.8])。

设 S 为诺特概形, X, Y 为 S-概形, 我们记 $\mathrm{Mor}_{S-\text{概形}}(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的 S-态射的集合; 若 $\phi : X' \to X$ 为 S-态射, 则 $g \mapsto g \circ \phi$ 给出一个映射 $\mathrm{Mor}_{S-\text{概形}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{S-\text{概形}}(X', Y)$。设 $S = \mathrm{Spec} R$, $T = \mathrm{Spec}(B)$ 和 $T_0 = \mathrm{Spec}(B_0)$ 为仿射 S-概形, $f : B \to B_0$ 为 R-代数满同态。若 $\ker(f)$ 是幂零理想, 则称 $\hat{f} : T_0 \to T$ 为 T_0 的一个*无穷小扩张*。为方便起见, 称只有一个闭点的概形为*局部概形*。注意局部概形都是仿射的。

定义 1. 设 $X \to S$ 为诺特概形的分离态射。若对 S 上的任意局部概形的无穷小扩张 $T_0 \to T$, $\mathrm{Mor}_{S-\text{概形}}(T, X) \to \mathrm{Mor}_{S-\text{概形}}(T_0, X)$ 是满射 (单射, 一一映射), 则称 X 在 S 上 (或态射 $X \to S$) 是*光滑的* (*无分歧的*, *平展的*)。

易见上述各性质在基变换下保持 (即若 $X \to S$ 是光滑的, 无分歧的或平展的, 则对任意 S-概形 S', $X \times_S S' \to S'$ 也是光滑的, 无分歧的或平展的), 在 X 的局部化下也保持 (即对 X 的任一局部化 X_1, 若 $X \to S$ 是光滑的, 无分歧的或平展的则 $X_1 \to S$ 亦然), 且有传递性 (即若 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 都是光滑的, 无分歧的或平展的则 $g \circ f : X \to Z$ 亦然)。

一个概形 S 称为*正规的* (*正则的*, *C.M.*), 如果对每一点 $s \in S$, $O_{S,s}$ 是整闭整环 (正则局部环, 科恩-麦考莱环)。若 S 是特征 0 的域 K 上的概形, 则 S 是正则的当且仅当 S 在 K 上光滑, 但这对特征非零的域不成立 (此时 K-光滑性比正则性强)。特别地, 若 C 为域 K 上的曲线, 则 C 正规等价于 C 正则 (参看 [L1, 命题 XV.2.2]), 此时对每个闭点 $x \in C$, $O_{C,x}$ 为离散赋值环 (参看 [L1, 命题 XV.2.2 及引理 Ⅳ.3.1]), 故对任意整的有限型 K-概形 X, 任意 K-态射 $f : X \to C$ 若不是将 X 映到一个点则必为平坦的。

引理 4. 设 X 为域 k 上的概形, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。若 $X\otimes_k \bar{k}$ 是整的, 正规的, C.M. 或正则的, 则对任意域扩张 $k'\supset k$, $X\otimes_k k'$ 是整的, 正规的, C.M. 或正则的。

(参看 [L1, 推论 XVI.2.3]。) 此时我们说 X 是几何整的, 正规的, C.M. 或正则的。

引理 5. 设 $X\to S$ 为诺特概形的态射。

i) $\mathbb{A}^n_S$ 和 $\mathbb{P}^n_S$ 在 S 上光滑。

ii) 任一闭子概形 $Y\subset X$ 在 X 上是无分歧的。 X 的任意局部化在 X 上是平展的。

iii) 设 $e: k\subset K$ 为域扩张, $S=\mathrm{Spec}(k)$, $X=\mathrm{Spec}(K)$。若 e 是有限扩张, 则下列条件等价:

a) $K\supset k$ 是可分扩张;

b) $\Omega^1_{X/S}=0$;

c) X 在 S 上为平展的;

d) $\mathrm{Spec}(K\otimes_k \bar{k})$ 是既约的, 其中 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包 (换言之 X 是几何既约的)。

而若 e 为有限生成的域扩张, 则下列条件等价:

a) K 在 k 上是可分生成的;

b) X 在 S 上光滑;

c) $\mathrm{Spec}(K\otimes_k \bar{k})$ 是既约的, 其中 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包 (换言之 X 是几何既约的);

d) $\dim_K \Omega^1_{K/k}=\mathrm{tr.deg}(K/k)$。

此外在任何情形都有 $\dim_K \Omega^1_{K/k}\geqslant \mathrm{tr.deg}(K/k)$。

iv) (**雅可比判据**) 设 $X\to S$ 为光滑态射, $i: Y\hookrightarrow X$ 为闭子概形, 其理想层为 $\mathcal{I}$, 则 Y 在 S 上光滑当且仅当 (引理 3.ii) 中的) $\delta: i^*\mathcal{I}\to i^*\Omega^1_{X/S}$ 具有局部分拆 (即在任意仿射开子概形 $U\subset Y$ 上有 $i^*\Omega^1_{X/S}(U)\cong i^*\mathcal{I}(U)\oplus\Omega^1_{Y/S}(U)$)。

v) 设 $X\to S$ 为有限型分离态射, 则下列条件等价:

a) X 在 S 上光滑;

b) X 在 S 上平坦, $\Omega^1_{X/S}$ 为局部自由且其秩处处等于局部纤维维数;

c) $X \to S$ 平坦且具有几何正则纤维 (即对任意 $s \in S$, $X_s \otimes_{\kappa(s)} \overline{\kappa(s)}$ 是正则的, 其中 $\overline{\kappa(s)}$ 是 $\kappa(s)$ 的代数闭包)。

此外, 一个域 k 上的有限型几何正则概形是正则的; 而当 k 是完全域时, k 上的有限型正则概形是几何正则的。

vi) 设 $f : X \to Y$ 为光滑 S-概形的 S-态射, 则下列条件等价:

a) f 是光滑的;

b) 典范同态 $\phi : f^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Y/S}$ 具有分拆 (即 ϕ 是单射且 $\mathrm{coker}(\phi)$ 是局部自由的);

c) 对任意 $s \in S$, $f_s : X_s \to Y_s$ 是 ($\mathrm{Spec}(\kappa(s))$ 上的) 光滑态射。

这些都可以归结为交换代数的定理 (参看 [L1, XVI])。

引理 6. 设 $f : X \to Y$ 为诺特概形的有限平展态射, 其中 Y 是连通的, 则存在有限平展覆盖 (即满态射) $Y' \to Y$ 使得 $X \times_Y Y'$ 为有限多个 Y' 的拷贝的无交并。

证. 我们需要用到下述事实: 设诺特概形 S 的理想层 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ 满足 $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}$, 则存在唯一 $a \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 使得 $a^2 = a$ 且 $\mathcal{I} = a\mathcal{O}_S$, 从而 S 为 $V(a)$ 和 $V(1-a)$ 的无交并 (参看 [L1, 习题 VIII.7])。

由于 Y 连通而 f 平坦, 可令 $d = \deg(f)$, 对 d 用归纳法, 证明存在有限平展覆盖 $Y' \to Y$ 使得 $X \otimes_Y Y'$ 为 d 个 Y' 的拷贝的无交并。当 $d = 1$ 时 f 为同构, 取 $Y' = Y$ 即可。以下设 $d > 1$。

令 $S = X \times_Y X$, $\mathcal{I}$ 为 $\Delta(X) \subset S$ 的理想层, 则由 $\Omega^1_{X/Y} = 0$ 有 $\mathcal{I} = \mathcal{I}^2$, 从而 S 分解为 $\Delta(X)$ 和另一个闭子概形 S' 的无交并。注意 $\mathrm{pr}_2 : S' \to X$ 也是有限平展的, 且次数为 $d-1$, 故由归纳法假设存在有限平展覆盖 $Y' \to X$ 使得 $S' \times_X Y'$ 为 $d-1$ 个 Y' 的拷贝的无交并。从而

$$X \times_Y Y' \cong S \times_X Y' = (\Delta(X) \times_X Y') \coprod (S' \times_X Y') \tag{10}$$

为 d 个 Y' 的拷贝的无交并。证毕。

4. 预层的语言

对于一个给定的基概形, 以下记 $\mathfrak{Sch}_S$ 为 S 上的**分离**概形的范畴。我们知道, 一个 S-概形 X 给出一个预层 $\underline{X}:\mathfrak{Sch}_S\to((\text{sets}))$: 对任一 S-概形 T, $\underline{X}(T)=\text{Mor}_S(T,X)$; 对任意 S-态射 $\phi:T\to T'$, $\underline{X}(\phi)=\phi^*$, 即对任意 $\alpha\in\underline{X}(T')$ 有

$$\underline{X}(\phi)(\alpha)=\phi^*(\alpha)=\alpha\circ\phi \tag{1}$$

由米田引理, $\underline{X}$ 在唯一同构之下决定 X; 而一个 S-态射 $f:X\to Y$ 等价于一个自然变换 $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$。注意若 $g:Y\to Z$ 是另一个 S-态射, 则有

$$\underline{g\circ f}=\underline{g}\circ\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Z} \tag{2}$$

对任意域 k, X 的一个 k-点是指一个态射 $\text{Spec}(k)\to X$, 这个概念可以推广到一般的概形 T: X 的一个 T-点是指一个态射 $T\to X$; 如果我们在 $\mathfrak{Sch}_S$ 中讨论, 则 X 的一个 T-点是指一个 S-态射 $T\to X$。按这样的理解, $\underline{X}(T)$ 即为 $X\to S$ 的所有 T-点组成的集合。特别地, 一个 S-点就是 $X\to S$ 的一个截口。而一个 T-点等价于 $\text{pr}_2:X\times_S T\to T$ 的一个截口。

令 $\mathfrak{AffSch}_S\subset\mathfrak{Sch}_S$ 为 S 上的所有仿射概形组成的子范畴, 则 $\underline{X}$ 诱导一个预层 $\mathfrak{AffSch}_S\to((\text{sets}))$, 仍记为 $\underline{X}$。下述断言与上面略有不同, 不完全是抽象废话。

引理 7. 一个 S-概形 X 给出的预层 $\underline{X}:\mathfrak{AffSch}_S\to((\text{sets}))$ 在唯一同构之下决定 X; 而一个 S-态射 $f:X\to Y$ 等价于一个自然变换 $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ (这里 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$ 都是指 $\mathfrak{AffSch}_S$ 上的预层)。

证. 易见对任意两个 S-态射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 若将 $\underline{X}$, $\underline{Y}$ 和 $\underline{Z}$ 理解为 $\mathfrak{AffSch}_S$ 上的预层则 (2) 仍成立。由抽象废话只需证明任意自然变换 $F:\underline{X}\to\underline{Y}$ 由一个唯一的 S-态射 $f:X\to Y$ 给出。

任取 X 的一个仿射开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$, 记 $e_i:U_i\hookrightarrow X$ 为嵌入态射 $(\forall i\in I)$。一个自然变换 $F:\underline{X}\to\underline{Y}$ 将每个 e_i 映到一个 S-态射 $f_i:U_i\to Y$, 而对任意 $i,j\in I$ 及任一仿射开子概形 $U'\subset U_i\cap U_j$, F 将嵌入 $e':U'\hookrightarrow X$ 映到一个 S-态射 $f':U\to Y$, 且对嵌入 $\phi_i:U'\to U_i$, 由 $f_i\circ\phi_i=f'$ 有

$$F(e')=F(\phi_i)(f_i)=\phi_i^*(f_i)=f_i\circ\phi_i=f':U'\to Y \tag{3}$$

同理对嵌入 $\phi_j: U' \to U_j$ 有 $F(e') = f_j \circ \phi_j$, 这说明 f_i 和 f_j 在 $U_i \cap U_j$ 上一致。故所有 f_i $(i \in I)$ 可以"粘"成一个 S-态射 f, 且有

$$f \circ e_i = f_i = F(e_i): U_i \to Y \quad (\forall i \in I) \tag{4}$$

对任意 S-态射 $\psi: T \to X$, 取 T 的一个仿射开覆盖 $\{T_j | j \in J\}$ 使得每个 $\psi(T_j)$ 都包含于某个 U_i 中。对每个 $j \in J$ 取定 $i \in I$ 使得 $T_j \subset \psi^{-1}(U_i)$, 并令 $U_j = U_i$, $e_j = e_i : U_j \hookrightarrow X$, $f_j = f_i : U_j \to Y$, $t_j : T_j \hookrightarrow T$ 为嵌入, $\psi_j : T_j \to U_j$ 为 ψ 在 T_j 上的限制 $(\forall j \in J)$。则由 $\psi \circ t_j = e_j \circ \psi_j$ 及 (4) 可见对任意 $j \in J$ 有

$$\begin{aligned} F(T)(\psi) \circ t_j &= t_j^*(F(T)(\psi)) = F(T_j)(\psi \circ t_j) \\ &= F(T_j)(e_j \circ \psi_j) = \psi_j^*(F(T_j)(e_j)) = f \circ e_j \circ \psi_j \\ &= f \circ \psi \circ t_j = \underline{f}(T)(\psi) \circ t_j \end{aligned} \tag{5}$$

故 $F(T)(\psi) = \underline{f}(T)(\psi)$。这说明 $F = \underline{f}$。证毕。

注意对任意 S-概形 X, Y, T, 一个 S-态射 $T \to X \times_S Y$ 等价于两个 S-态射 $T \to X$ 和 $T \to Y$, 换言之有自然等价

$$\underline{X \times_S Y} \cong \underline{X} \times \underline{Y} \tag{6}$$

这可以看做对于纤维积的另一个理解。

预层的语言与纤维丛的语言本质上是等价的, 但具体表现差异颇大, 粗糙地说前者在代数上直观, 而后者在几何上直观。我们后面将看到, 在很多情形运用预层的语言可以将关于概形的论证转化为集合论的论证, 从而显著地简化; 而在另一些情形, 采用纤维丛的语言更为简便。因此二者不可偏废。

一般说来, 一个 $\mathfrak{Sch}_S$ 或 $\mathfrak{AffSch}_S$ 上的预层 F 不一定等价于某个 $\underline{X}$。用范畴论的语言, 若 F 等价于某个 $\underline{X}$, 则称 F 是*可代表的*, 由 X 代表。一个预层是否可代表, 是我们下面经常要关注的一个重要问题。

5. 有理映射

以下记一个域 k 的代数闭包为 $\bar{k}$。

设 $f: X \dashrightarrow Y$ 为域 k 上的代数簇的支配有理映射, 则存在 X 的稠密开子簇 U 使得 f 给出 U 到 Y 的 k-态射, 适当选择 U 还可使 $U \to Y$ 是平坦的。若 $[K(X):K(Y)] < \infty$, 则还可以选择 U 使得 $U \to Y$ 是平坦的且 $U \to f(U)$ 是有限的。

引理 8. 设 K 为域 k 的有限生成扩域, 则 k 在 K 中的代数闭包为 k 的有限扩张。若 k 在 K 中代数闭, 则 Spec$K$ 在 k 上是几何不可约的, 且当 k 为完全域时是几何整的。

证. 令 $k' \subset K$ 为 k 在 K 中的代数闭包。任取有限生成的 k-子代数 $R \subset K$ 使得 q.f.$(R) = K$, 则 R 的整闭包 $A \subset K$ 也是有限生成的 k-代数 (参看 [L1, 定理 IV.2.1]), 且显然 $k' \subset A$。任取 A 的极大理想 P, 则由弱零点定理 (参看例如 [L1, 推论 IV.1.1]) 可知 A/P 是 k 的有限扩张, 而 $k' \to A/P$ 是单射, 故 k' 也是 k 的有限扩张。

设 $k' = k$, 我们来证明 $K \otimes_k \bar{k}$ 只有一个素理想。用反证法, 若 $K \otimes_k \bar{k}$ 有不止一个素理想, 则存在 k 的有限扩张 $k_0 \subset \bar{k}$ 使得 $K \otimes_k k_0$ 有不止一个素理想, 且不妨设 $k_0 \supset k$ 为正规扩张。令 $k_1 \subset k_0$ 为所有在 k 上可分的元组成的子域, 则 $K \otimes_k k_0$ 也有不止一个素理想, 而由本原元素定理存在 $t \in k_1$ 使得 $k_1 = k[t]$。令 $f \in k[x]$ 为 t 在 k 上的定义多项式, 则由 $k' = k$ 可见 f 在 K 上不可约, 故 $K \otimes_k k_1 \cong K[x]/(f)$ 是整环, 从而是域, 矛盾。

若 k 是完全域, 则因 $\bar{k}$ 在 k 上可分, 上面的讨论证明了 $K \otimes_k \bar{k}$ 是域。证毕。

设 C 为 k-曲线, $K = k(C)$ (C 的代数函数域), 则 $K \otimes_k \bar{k}$ 为域。若 C 为射影正则曲线, 称 K 的一个 k-离散赋值为 C 的一个*素除子*, C 的闭点与素除子一一对应 (闭点 $x \in C$ 所对应的离散赋值记为 v_x)。一般的除子是指一个有限形式和 $D = n_1 D_1 + \cdots + n_r D_r$, 其中 $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$, $D_1, ..., D_r \in C$ 为素除子, 且定义 D 的*次数*为

$$\deg(D) = n_1[\kappa(D_1):k] + \cdots + n_r[\kappa(D_r):k] \tag{1}$$

反之, 若 K 为 k 的超越次数为 1 的有限生成扩域使得 k 在 K 中代数闭, 则在同构之下存在唯一射影正则曲线 C 使得有 k-同构 $k(C) \cong K$

(参看例如 [L2, 4.4 节]), C的闭点集 C_{cl} 可看作 K 中的所有 k-离散赋值的集合。

设 C 为 k 上的紧致曲线, 令 $\tilde{C}$ 为 $C \otimes_k \bar{k}$ 的正规化, 则 $\tilde{C}$ 为 $\bar{k}$ 上的光滑射影曲线, 其亏格称为 C 的亏格并记为 $g(C)$。显然 $g(C)$ 由 $k(C)$ 决定。

若 C 是光滑的, 则对 C 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有黎曼-罗赫定理

$$h^0(\mathcal{L}) - h^0(\Omega^1_{C/k} \otimes_{O_C} \mathcal{L}^{-1}) = \deg(\mathcal{L}) + 1 - g(C) \tag{2}$$

因为 h^0 在基变换下不变。

同理, 若 $f : C \to C'$ 为光滑射影 k-曲线的可分态射, 则有赫尔维茨定理

$$\Omega^1_{C/k} \cong f^*\Omega^1_{C'/k} \otimes_{O_C} O_C(R_f) \tag{3}$$

其中 $R_f = \sum_{x \in C_{\mathrm{cl}}} r_x x$ 为分歧除子 (若 x 为 C 的闭点, $t \in O_{C',f(x)}$ 为 $O_{C',f(x)}$ 的极大理想的生成元, 则 $r_x = v_x(f^*(t)) - 1$, 称为 f 在点 x 的分歧指数), 可以看作 $\Omega^1_{C/C'}$ 给出的除子。由此有

$$2g(C) - 2 = \deg(f)(2g(C') - 2) + \deg R_f \tag{4}$$

若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 则光滑射影 k-曲线的任意有限态射 $f : C \to C'$ 可以分解为某个 $F^n_{C/k}$ 与一个可分态射 $C^{(p^n)} \to C'$ 的合成。注意 f 等价于一个 k-代数同态 $k(C') \to k(C)$。

以下是关于曲线的一些基本事实。

引理 9. 设 C 为 k-曲线。

i) 若 k 是完全域而 C 是正规的, 则 C 在 k 上光滑。

ii) 设 K 是一个 k-代数簇的函数域, 而 C 是正则的。若 $C \otimes_k K$ 的正规化 $\tilde{C}$ 在 K 上光滑, 则 C 在 k 上光滑。

iii) 设 C 为 k 上亏格 0 的紧致光滑曲线, 则 $C \cong \mathbb{P}^1_k$ 当且仅当 C 有一个 k-点。

证. i) 实际上, 若 k 是完全域, 则任意正则 k-代数簇 X 在 k 上光滑。为证明此事实不妨设 $X = \mathrm{Spec}A$。对任一极大理想 $P \subset A$, 由于 k 是完全

域, $(A/P)\otimes_k \bar{k}$ 是约化的 (参看引理 5.iii)), 故 $\bar{P}=P\otimes_k \bar{k}\subset A\otimes_k \bar{k}=\bar{A}$ 等于有限多个极大理想 $P_1,...,P_r\subset \bar{A}$ 的交。令 $n=\dim(X)$, 则由所设 A_P 由 n 个元 $a_1,...,a_n$ 生成, 故每个 $\bar{A}_{P_i}$ 由 $a_1,...,a_n$ 的像生成, 从而是正则的。这说明 $\bar{A}$ 是正则的, 从而由引理 5.v) 可知 A 在 k 上光滑。

ii) 不妨设 $C=\mathrm{Spec}A$。对任一极大理想 $P\subset A$, 由于 K 是一个 k-代数簇的函数域, $(A/P)\otimes_k K$ 是整环, 故 $P'=P\otimes_k K\subset A\otimes_k K=A'$ 是素理想, 由所设 A_P 是正则局部环, 故 $A'_{P'}$ 是正则局部环, 从而 $\tilde{C}\to C\otimes_k K$ 在 P' 附近是同构。由所设可知 $(\Omega^1_{A'/K})_{P'}\cong A'_{P'}$, 故 $(\Omega^1_{A/k})_P\cong A_P$, 这说明 A 在 k 上光滑。

iii) 必要性是显然的。反之, 若 C 有一个 k-点 P, 则由黎曼-罗赫定理有 $h^0(O_C(P))=2$, 任取 $H^0(C,O_C(P))$ 作为 k-线性空间的一组生成元 $f_0,f_1\in k(C)$, 则对任意 $x\in C_{\mathrm{cl}}$, $v_x(f_0/f_1)$ 和 $v_x(f_1/f_0)$ 至少有一个 $\geqslant 0$, 故 (f_0,f_1) 给出一个 k-态射 $C\to\mathbb{P}^1_k$, 它在 $\otimes_k\bar{k}$ 后为同构, 故为同构。证毕。

习题

1. 设 $f:X\to Y$ 为 S-概形的态射。证明 $f\times_S f:X\times_S X\to Y\times_S Y$ 与对角态射 $\Delta_Y:Y\to Y\times_S Y$ 的拉回同构于 $X\times_Y X$。特别地, 若 $Y\to S$ 是分离的, 则 $X\times_Y X$ 可看作 $X\times_S X$ 的闭子概形。

2. 设 X,X' 为一个域 k 上的有限型概形, $U\subset X$, $U'\subset X'$ 分别为 X 和 X' 的稠密开子概形。证明 $U\times_k U'$ 是 $X\times_k X'$ 的稠密开子概形。

3. 设 X,Y 为一个域 k 上的有限型不可约概形。证明 $X\times_k Y$ 的所有不可约分支都有相同的维数。

第 2 节　微积分

这里所谓的微积分, 是指概形的微分层、导数与微分算子、德拉姆复形、联络等 (见 [BO, §2])。为简单起见我们以下只考虑分离概形, 例如用 $\mathfrak{Sch}_S$ 记分离 S-概形的范畴 (其态射为 S-态射)。

1. 导数与微分算子

设 $\tau: X \to S$ 为局部诺特概形的分离态射。令 $\mathcal{I}$ 为对角态射 $\Delta: X \to X \times_S X$ 的理想层，它作为左 O_X-模层局部由形如 $1 \otimes_{O_S} a - a \otimes_{O_S} 1$ 的截口生成。我们知道 X 在 S 上的相对微分层

$$\Omega^1_{X/S} = \Delta^* \mathcal{I} \tag{1}$$

而且有一个 O_S-模层同态

$$d = \mathrm{pr}_2^* - \mathrm{pr}_1^* : O_X \to \Omega^1_{X/S} \tag{2}$$

它们不仅给出 $\tau: X \to S$ 的重要的几何结构，而且具有下面的重要性质。

为简单起见设 $S = \mathrm{Spec}(A)$。设 $\mathcal{M}$ 为 O_X-模层，一个 O_S-同态 $D: O_X \to \mathcal{M}$ 称为一个 S-导数，如果对于任意开集 $U \subset X$ 上的任意截口 $a, b \in O_X(U)$ 均有 $D(ab) = aDb + bDa$。若 $\mathcal{N}$ 也是 O_X-模层，易见对任意 S-导数 $D: O_X \to \mathcal{M}$ 及任意 O_X-同态 $\phi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，$\phi \circ D: O_X \to \mathcal{N}$ 也是 S-导数。特别地，对任意 $f \in A$，令 $\phi = f\cdot : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，则 $\phi \circ D = fD: O_X \to \mathcal{M}$ 是 S-导数。由此易见所有从 O_X 到 $\mathcal{M}$ 的 S-导数组成一个 A-模，记为 $\mathrm{Der}_S(O_X, \mathcal{M})$。

易见 (2) 中的 d 是 O_X 到 $\Omega^1_{X/S}$ 的一个 S-导数，它具有下列泛性：对任意 O_X-模层 $\mathcal{M}$ 及任意 S-导数 $D: O_X \to \mathcal{M}$，存在唯一 O_X-同态 $\phi: \Omega^1_{X/S} \to \mathcal{M}$ 使得 $D = \phi \circ d$。由此可见有典范的 A-模同构

$$\mathrm{Der}_S(O_X, \mathcal{M}) \cong Hom_{O_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{M}) \tag{3}$$

不仅如此，上面的事实可以"层化"：对任意开集 $U \subset X$ 有 $O_X(U)$-模 $\mathrm{Der}_S(O_U, \mathcal{M}|_U)$，易见它们组成一个 O_X-模层 (简言之所有从 O_X 到 $\mathcal{M}$ 的局部 S-导数组成一个 O_X-模层)，记为 $\mathcal{D}er_S(O_X, \mathcal{M})$，而 (3) 可以层化为 O_X-模层同构 $\mathcal{D}er_S(O_X, \mathcal{M}) \cong \mathcal{H}om_{O_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{M})$。注意 $\mathcal{H}om_{O_X}(\Omega^1_{X/S}, O_X)$ 为 X 在 S 上的切层 $\mathcal{T}_{X/S}$。

我们下面来深化上述理论。

对任意非负整数 n 记 $P^n_{X/S} = \Delta^{-1}(O_{X \times_S X}/\mathcal{I}^{n+1})$(注意 $\mathrm{Supp}(O_{X \times_S X}/\mathcal{I}^{n+1}) = \Delta(X)$)，称为 X 在 S 上的阶不超过 n 的**相对微分层**。令 $P'_{X/S} =$

$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$, $\mathcal{P}_{X/S} = \Delta^{-1}\mathcal{O}_{X\times_S X}$, 它是如下预层 $\mathcal{F}$ 的伴随层: 对任意仿射开子概形 $V = \operatorname{Spec}(R) \subset S$ 及任意仿射开子概形 $U = \operatorname{Spec}(A) \subset \tau^{-1}(V)$ 有 $\mathcal{F}(U) = A \otimes_R A$。由张量积的泛性有一个显然的 (左) $\mathcal{O}_X$-代数同态 $t\colon \mathcal{P}'_{X/S} \to \mathcal{P}_{X/S}$, 将 $a \otimes_{\mathcal{O}_S} b$ 映到 $\Delta^{-1}(\operatorname{pr}_1^*(a)\cdot\operatorname{pr}_2^*(b))$。令 $\mu : \mathcal{P}'_{X/S} \to \mathcal{O}_X$ 为乘法映射: $a \otimes_{\mathcal{O}_S} b \mapsto ab$, $\mathcal{I}' = \ker(\mu)$ (它由所有形如 $1 \otimes_{\mathcal{O}_S} a - a \otimes_{\mathcal{O}_S} 1$ 的局部截口生成), 则显然有 $t(\mathcal{I}') = \mathcal{I}\mathcal{P}^n_{X/S}$, 故有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}'_{X/S} & \xrightarrow{t} & \mathcal{P}^n_{X/S} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta^*} \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\operatorname{id}_{\mathcal{O}_X}} & \mathcal{O}_X \end{array} \tag{4}$$

注意在上述仿射开子集 U 上 t 诱导同构 $A \otimes_R A/\mathcal{I}'(U)^{n+1} \to \mathcal{P}^n_{X/S}(U)$, 而所有这些仿射开子集组成 X 的一个拓扑基, 它们在同构之下唯一决定 $\mathcal{F}/\mathcal{I}'^{n+1}\mathcal{F}$ 的伴随层, 故 t 诱导 $\mathcal{O}_X$-代数同构

$$\mathcal{P}'_{X/S}/\mathcal{I}'^{n+1} \cong \mathcal{P}^n_{X/S} \quad (\forall n \geqslant 0) \tag{5}$$

此外注意对任意非负整数 i 有显然的 $\mathcal{O}_X$-代数满同态 $\mathcal{P}^{i+1}_{X/S} \to \mathcal{P}^i_{X/S}$, 其核为

$$\Delta^{-1}\mathcal{I}^{i+1}/\Delta^{-1}\mathcal{I}^{i+2} \cong \Delta^{-1}(\mathcal{I}^{i+1}/\Delta^*\mathcal{I}^{i+2}) \cong \Delta^*\mathcal{I}^{i+1} \tag{6}$$

由此可以给出 $\mathcal{P}^n_{X/S}$ 的一个过滤, 其因子都是拟凝聚层 (且当 τ 为有限型时是凝聚层)。由此及归纳法即可见 $\mathcal{P}^n_{X/S}$ 是拟凝聚层 (且当 τ 为有限型时是凝聚层)。

设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 为 X 上的拟凝聚层, $D : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{O}_S$-线性映射, 则 D 诱导一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $\tilde{D} : \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$。注意 $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ 为 $\mathcal{P}'_{X/S}$-模层, 若 $\tilde{D}$ 经过 $\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{P}'_{X/S}} (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F})$, 则称 D 为阶不超过 n 的 $\mathcal{O}_S$-微分算子。一个特殊情形是“泛微分算子” $d : \mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^n_{X/S}$, 将 $\mathcal{O}_X$ 的任一截口 a 映到 $\overline{1 \otimes a}$。若 (左) $\mathcal{O}_X$-线性同态 $\tilde{D} : \mathcal{P}'_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 经过 $\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$, 令 $d : \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ 为同态 $f \mapsto 1 \otimes f$, 则 $D = \tilde{D} \circ d$ 为阶不超过 n 的 $\mathcal{O}_S$-微分算子。由此可见一个阶不超过 n 的 $\mathcal{O}_S$-微分算子 $D : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 等价于一个 $\mathcal{O}_X$-线性同态 $\mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$。

设 $D_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 和 $D_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 分别为阶不超过 n_1 和 n_2 的微分算子, 我们来说明 $D = D_2 \circ D_1$ 是阶不超过 $n_1 + n_2$ 的微分算子, 为此需要

证明 D 诱导的 O_X-线性映射 $\tilde{D}: P'_X \otimes_{O_X} \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ 将 $\mathcal{I}'^{n_1+n_2+1} \otimes_{O_X} \mathcal{F}$ 映到 0。只需对 $\mathcal{I}'$ 的所有局部生成截口 $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ 验证即可。由 $\tilde{D}_1 : O_X \otimes_{O_S} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 和 $\tilde{D}_2 : O_X \otimes_{O_S} \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 得到一个同态

$$D' = \tilde{D}_2 \circ (\mathrm{id}_{O_X} \otimes_{O_S} \tilde{D}_1) : O_X \otimes_{O_S} O_X \otimes_{O_S} \mathcal{F} \to \mathcal{H} \tag{7}$$

使得对 O_X 的局部截口 a, b 和 $\mathcal{F}$ 的局部截口 f 有 $D'(a \otimes b \otimes f) = abD(f)$。将 $O_X \otimes_{O_S} \mathcal{F}$ 看作 $O_X \otimes_{O_S} O_X \otimes_{O_S} \mathcal{F}$ 的子层 $O_X \otimes_{O_S} 1 \otimes_{O_S} \mathcal{F}$。对 O_X 的任意局部截口 a, 在 $O_X \otimes_{O_S} O_X \otimes_{O_S} O_X$ 中有

$$a \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes a = (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \otimes 1 + 1 \otimes (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \tag{8}$$

由此可见 $(a \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes a)^{n_1+n_2+1}$ 可以表为

$$b(1 \otimes (a \otimes 1 - 1 \otimes a))^{n_1+1} + c((a \otimes 1 - 1 \otimes a) \otimes 1)^{n_2+1} \tag{9}$$

其中 b, c 为 $O_X \otimes_{O_S} O_X \otimes_{O_S} O_X$ 的局部截口。对 $\mathcal{F}$ 的任意局部截口 f, $\mathrm{id}_{O_X} \otimes_{O_S} \tilde{D}_1$ 将 $b(1 \otimes (a \otimes 1 - 1 \otimes a))^{n_1+1} \otimes_{O_X} f$ 映为 0, 将 $c((a \otimes 1 - 1 \otimes a) \otimes 1)^{n_2+1} \otimes_{O_X} f$ 映为 $c(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^{n_2+1} \otimes_{O_X} D_1(f)$, 而 $\tilde{D}_2$ 将 $c(a \otimes 1 - 1 \otimes a)^{n_2+1} \otimes_{O_X} D_1(f)$ 映为 0, 故 D' 将 $(a \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes a)^{n_1+n_2+1} \otimes_{O_X} f$ 映为 0。

对任意非负整数 n 记 $\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 为从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的阶不超过 n 的 O_S-微分算子组成的层, 它是 $\mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的子层, 并记 $\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$。由上所述有 O_X-模层同构

$$\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{H}om_{O_X}(P^n_{X/S} \otimes_{O_X} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \tag{10}$$

故当 $P^n_{X/S}$ 和 $\mathcal{F}$ 为凝聚层时 $\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 为拟凝聚层, 且当 $\mathcal{G}$ 也是凝聚层时 $\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 为凝聚层。所有 $\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的并给出 $\mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$的一个子层 $\mathcal{D}if f_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,当 $P^n_{X/S}$ 和 $\mathcal{F}$ 为凝聚层时它是拟凝聚层, 记$\mathrm{Diff}_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{D}if f_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$。特别地, $\mathcal{D}if f_{X/S}(O_X, O_X)$ 是 O_X-代数层。

注意对任意 n, $\mathrm{pr}_1^* : O_X \to P^n_{X/S}$ 是 $\Delta^* : P^n_{X/S} \to O_X$ 的一个截口, 故 $P^n_{X/S}$ 作为左 O_X-模可以分解为直和 $O_X \oplus \ker(\Delta^*)$, 因此 $\mathcal{D}if f^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 也可以相应地分解为直和。特别地有

$$\mathcal{D}if f^1_{X/S}(O_X, O_X) \cong O_X \oplus \mathcal{D}er_S(O_X, O_X) \tag{11}$$

故 $\mathcal{D}er_S(O_X,O_X) \cong \mathcal{T}_{X/S}$ 可以看作 $\mathcal{D}iff^1_{X/S}(O_X,O_X)$ 的子层。注意对任意 $D,D' \in \mathrm{Der}_S(O_X,O_X)$, 在 $\mathrm{Diff}_{X/S}(O_X,O_X)$ 中有

$$[D,D'] = D\circ D' - D'\circ D \in \mathrm{Der}_S(O_X,O_X) \tag{12}$$

这是因为对任意开子集 $U\subset X$ 及任意 $a,b\in O_X(U)$ 有

$$\begin{aligned}
[D,D'](ab) &= D\circ D'(ab) - D'\circ D(ab)\\
&= D(aD'b+bD'a) - D'(aDb+bDa)\\
&= DaD'b + aD\circ D'b + DbD'a + bD\circ D'a - D'aDb\\
&\quad - aD'\circ Db - D'bDa - bD'\circ Da\\
&= a(D\circ D'b - D'\circ Db) + b(D\circ D'a - bD'\circ Da)\\
&= a[D,D']b + b[D,D']a
\end{aligned} \tag{13}$$

换言之，$\mathrm{Der}_S(O_X,O_X)$ 为 $\mathrm{Diff}_{X/S}(O_X,O_X)$ 的李子代数。由层化还可见 $\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)$ 是$\mathcal{D}iff^1_{X/S}(O_X,O_X)$ 的李子代数层。记

$$Diff(O_X/S) = \tau_*\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X,O_X) \tag{14}$$

称为 X 在 S 上的整体微分算子层, 它是 O_S-代数层 (当 τ 是有限型时为拟凝聚层), 其中阶不超过 n 的部分组成子层 $Diff^n(O_X/S) = \tau_*\mathcal{D}iff^n_{X/S}(O_X, O_X)$,而

$$Der_S(O_X,O_X) = \tau_*\mathcal{D}er_S(O_X,O_X) \tag{15}$$

是 $Diff(O_X/S)$ 的一个 O_S-李代数子层, 其整体截口 (即 $\mathrm{Der}_S(O_X,O_X)$ 的元) 称为 X 在 S 上的**向量场**。简记

$$\mathrm{Diff}(O_X/S) = \Gamma(S, Diff(O_X/S)) = \mathrm{Diff}_{X/S}(O_X,O_X) \tag{16}$$

此外, 如果 S 是 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数), 则 $\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)$ 还有一个“p-李代数”层结构: 对 $\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)$ 的任意局部截口 $\theta\in\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)(U)$ ($U\subset S$ 为开集) 有

$$\theta^p = \theta\circ \overset{p}{\cdots} \circ\theta \in \mathcal{D}er_S(O_X,O_X)(U) \tag{17}$$

这是因为, 由导数的定义及归纳法, 易见对任意 $a,b\in O_X(U)$ 有

$$\theta^p(ab) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \theta^i(a)\theta^{p-i}(b) = a\theta^p(b) + b\theta^p(a) \tag{18}$$

对 $Diff(O_X/S)$ 的任一局部截口 $\theta \in Diff(O_X/S)(U)$ ($U \subset S$ 为开集), $\theta' \mapsto \theta \circ \theta' - \theta' \circ \theta$ 定义一个 O_S-自同态 $\mathrm{ad}\theta : \mathcal{D}er_S(O_X, O_X)(\tau^{-1}(U)) \to \mathcal{D}er_S(O_X, O_X)(\tau^{-1}(U))$, 易见

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\theta)^p(\theta') &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \binom{p}{i} \theta^{p-i} \circ \theta' \circ \theta^i \\ &= \theta^p \circ \theta' - \theta' \circ \theta^p = (\mathrm{ad}(\theta^p))(\theta')\end{aligned} \tag{19}$$

简言之

$$\mathrm{ad}(\theta^p) = (\mathrm{ad}\theta)^p \tag{20}$$

注意 $\theta \mapsto \theta^p$ 是 O_S-半线性的: 对 O_S 的局部截口 c 有

$$(c\theta)^p = c^p\theta^p \tag{21}$$

一个 $\mathbb{F}_p$-代数 R 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 称为一个 p-李代数, 如果它有一个加法自同态 $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (简记 $\theta \in \mathfrak{L}$ 在此同态下的像为 θ^p), 对任意 $\theta \in \mathfrak{L}$ 及 $c \in R$ 满足 (20) 和 (21)。故 $\mathcal{D}iff(O_X/S)$ 可称为 X 上的一个 p-李代数层, 而 (17) 说明 $\mathcal{D}er_S(O_X, O_X)$ 为 $\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X, O_X)$ 的 p-李子代数层。由此得到 $Der_S(O_X, O_X)$ 有一个 O_S 上的 p-李代数层结构, 而 $\Theta_{X/S} = \Gamma(S, Der_S(O_X, O_X))$ 有一个 p-李代数结构。总之有

命题 1. 设 $\tau : X \to S$ 为诺特概形的有限型分离态射, 则

i) 对任意 $n \geqslant 0$ 有左 O_X-模层同构 (5), 且 $P^n_{X/S}$ 是凝聚层;

ii) 对任意 O_X-模层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 有 O_X-模层同构 (10), 故当 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 为凝聚层时 $\mathcal{D}iff^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 为凝聚层, 且所有 $\mathcal{D}iff^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的并给出 $\mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的一个子层 $\mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, 为拟凝聚层;

iii) $\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X, O_X)$ 是 O_X-代数层, 而 $\mathcal{D}er_S(O_X, O_X)$ 是它的 O_X-李子代数层, 且当 S 是 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数) 时为 p-李代数子层。

2. 一些特殊情形和应用

如果 $\Omega^1_{X/S}$ 是秩 r 局部自由的, 则 $\mathcal{T}_{X/S} = \mathcal{D}er_S(O_X, O_X) \cong \mathcal{H}om_{O_X}(\Omega^1_{X/S}, O_X)$ 也是秩 r 局部自由的, 此时在足够小的仿射开子

集 $U \subset X$ 上可以选取 $x_1, ..., x_r \in A = O_X(U)$, 使得 $dx_1, ..., dx_r$ 组成 $\Omega^1_{X/S}(U)$ 在 A 上的一组自由生成元 (这是因为 $\Omega^1_{X/S}(U)$ 由所有 dx ($x \in A$) 生成)。这样 $\{dx_1, ..., dx_r\}$ 的对偶就给出 $\mathcal{D}er_S(O_X, O_X)(U) \cong Hom_A(\Omega^1_{X/S}(U), A)$ 的一组自由生成元 $D_1, ..., D_r$ (即 $D_i(x_j) = \delta_{ij}$), 我们可以将 D_i 理解为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$。更一般地,若 $P^n_{X/S}$ 是局部自由的,则 $\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X, O_X) \cong \mathcal{H}om_{O_X}(P^n_{X/S}, O_X)$ 也是局部自由的。

若 $\{dx_1, ..., dx_r\}$ 是 $\Omega^1_{X/S}(U)$ 在 A 上的一组生成元, 则对任意 $y \in P^n_{X/S}(U)$ 可取 $a_0, a_1, ..., a_n \in A$ 使得 y 在投射 $P^n_{X/S}(U) \to P^1_{X/S}(U)$ 下的像为 $a_0 + a_1 dx_1 + \cdots + a_r dx_r$, 换言之 $P^1_{X/S}(U)$ 作为左 A-模由 $\mathrm{pr}_2^*(1)$, $\mathrm{pr}_2^*(x_1)$,..., $\mathrm{pr}_2^*(x_r)$ 生成。注意 $\mathcal{I}'^{i+1}(U)$ 作为 $P'_{X/S}(U)$-模 (即理想) 由 $1 \otimes_{O_S} x_1 - x_1 \otimes_{O_S} 1$,..., $1 \otimes_{O_S} x_r - x_r \otimes_{O_S} 1$ 的所有 $i+1$ 次单项式生成, 可见 $(\Delta^{-1}\mathcal{I}^{i+1}/\Delta^{-1}\mathcal{I}^{i+2})(U)$ (见 (1.6)) 作为左 A-模由这些单项式的像生成。由此用归纳法即可见 $P^n_{X/S}(U)$ 作为左 A-模由所有 $\mathrm{pr}_2^*(x_1)$,..., $\mathrm{pr}_2^*(x_r)$ 的次数不超过 n 的单项式生成, 也可以由所有 $\mathrm{pr}_2^*(x_1) - \mathrm{pr}_1^*(x_1)$,..., $\mathrm{pr}_2^*(x_r) - \mathrm{pr}_1^*(x_r)$ 的次数不超过 n 的单项式生成。而 $P^n_{X/S}(U)$ 作为 A-代数由 $\mathrm{pr}_2^*(x_1)$,..., $\mathrm{pr}_2^*(x_r)$ 生成。

设所有这些单项式组成 $P^n_{X/S}(U)$ 作为左 A-模的一组自由生成元, 则其对偶就给出 $\mathcal{D}iff^n_{X/S}(O_X, O_X)(U)$ 的一组自由生成元。定义 $D_{ij} \in \mathcal{D}iff^n_{X/S}(O_X, O_X)(U)$ 为

$$D_{ij}(x_k^l) = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (1 \leqslant i, k \leqslant r,\ 0 \leqslant j, l \leqslant n) \tag{1}$$

则所有 $D_{1j_1} \circ \cdots \circ D_{rj_r}$ $(j_1 + \cdots + j_r \leqslant n)$ 即为上述 $\mathcal{D}iff^n_{X/S}(O_X, O_X)(U)$ 的自由生成元组。在特征 0 (即 S 为 $\mathbb{Q}$-概形) 的情形, 易见有

$$D_{ij} = \frac{1}{j!} D^j_{i1} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \quad (1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant j \leqslant n) \tag{2}$$

故 $\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X, O_X)(U)$ 作为 A-代数是由 $\mathcal{D}er_S(O_X, O_X)(U)$ 生成的, 即任意微分算子可以表达为形如

$$\sum_{i_1, ..., i_r} a_{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{j_r}}{\partial x_r^{j_r}} \tag{3}$$

(其中 $a_{i_1 \ldots i_r} \in A$)。但在特征 $p > 0$ (即 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形) 时的情形大为不同, 因为 (2) 在 $j \geqslant p$ 时无意义。

设 X 为域 k 上的有限型概形, 使得 $\Omega^1_{X/k}$ 在 X 上平坦。则由上所述在足够小的仿射开子概形 $U \subset X$ 上可取 $\Omega^1_{X/k}(U)$ 作为 $A = O_X(U)$-模的自由生成元 $dx_1, ..., dx_r$ $(x_1, ..., x_r \in A)$。若 $\mathrm{ch}(k) = 0$, 则 $x_1, ..., x_r$ 在 k 上代数无关, 这是因为若有 k 上的 r 元非零多项式 $f(X_1, ..., X_r)$ 使得 $f(x_1, ..., x_r) = 0$, 任取 f 的一个次数最高的项 $cX_1^{j_1} \cdots X_r^{j_r}$ $(c \neq 0)$, 令 $D = \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{j_r}}{\partial x_r^{j_r}}$, 就有

$$0 = Df(x_1, ..., x_r) = cj_1! \cdots j_r! \tag{4}$$

与 $cj_1! \cdots j_r! \neq 0$ 矛盾。由此可见 $\dim(X)$ 局部不小于 $\Omega^1_{X/k}$ 的秩, 这说明 X 是几何正则 (即非奇异) 的 (见 [L1, 定理 XVI.2.1])。若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 则这一断言不成立, 例如 $R = k[x]/(x^p)$ 是 0 维局部环但 $\Omega^1_{R/k} \cong R$。不过此时由 (4) 可以看出至少所有单项式 $x_1^{j_1} \cdots x_r^{j_r}$ $(0 \leqslant j_1, ..., j_r < p)$ 在 k 上线性无关, 从而 $\deg(X/k) \geqslant p^r$ (可能为 ∞)。总之有 ([L1, p.178])

引理 1. 设 X 为域 k 上的有限型概形使得 $\Omega^1_{X/k}$ 在 X 上平坦。

i) 若 $\mathrm{ch}(k) = 0$, 则 X 是非奇异的, 特别地它是约化的、正规的和正则的。详言之, 若 $dx_1, ..., dx_r$ 为 $\Omega^1_{X/k}$ 局部的一组自由生成元, 则 $x_1, ..., x_r$ 在 k 上代数无关。

ii) 若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 则 $\deg(X/k) \geqslant p^r$, 其中 r 为 $\Omega^1_{X/k}$ 的秩。详言之, 若 $dx_1, ..., dx_r$ 为 $\Omega^1_{X/k}$ 的一组局部生成元, 则所有单项式 $x_1^{j_1} \cdots x_r^{j_r}$ $(0 \leqslant j_1, ..., j_r < p)$ 在 k 上线性无关。

我们还需要用到关于微分算子的可除性的一些事实。设 R 为特征 0 的整环, A 为平坦 R-代数, $D \in Der_R(A, A)$, $n \in \mathbb{N}$, 记 $D^{(n)} = \frac{D^n}{n!}$: $A \to A \otimes \mathbb{Q}$。显然所有微分算子 $D^{(n)}$ $(\forall n)$ 是相互交换的。若 $A = R[x]$ 而 $D = \frac{d}{dx}$, 则 $D^{(n)} \in \mathrm{Diff}(A/R)$, 这是因为对任意 $\phi \in A$, $D^{(n)}(\phi)$ 为 $\phi(x + dx)$ 对 dx 的展开式中 dx^n 的系数。

引理 2. 设 $A = \mathbb{Z}[x]$, p 为素数, 令

$$D = \frac{d}{dx} \in Der_{\mathbb{Z}}(A, A) \tag{5}$$

令 $r \in \mathbb{N}$, 则

i) 对理想 $I=(p,x^{p^r})\subset A$ 及任意 $i<r$ 有 $D^{(p^i)}(I)\subset I$, 因此 $D^{(p^i)}$ 诱导 A/I 上的微分算子 (仍记为 $D^{(p^i)}$)。而 $\mathrm{Diff}(A/I,\mathbb{F}_p)\cong Hom(A/I,\mathbb{F}_p)$ 由所有 $h\circ D^{(p^i)}$ $(0\leqslant i<r)$ 生成, 其中 $h:A/I\to\mathbb{F}_p$ 为投射 (模 (x))。

ii) 存在唯一 $2r$ 元多项式 $\lambda_r\in\mathbb{Z}_{(p)}[x_0,y_0,...,x_r,y_r]$, 其中所有指数均 $<p$, 使得对任意 $a,b\in A$,

$$D^{(p^r)}(ab)=\lambda_r(D^{(p^0)}\otimes 1,1\otimes D^{(p^0)},...,D^{(p^r)}\otimes 1,1\otimes D^{(p^r)})(a,b) \tag{6}$$

iii) 对任意 $i\geqslant 0$ 有 $D^{(p^r)}(\mathbb{Z}[x^{p^i}])\subset\mathbb{Z}[x^{p^i}]$, 而 $D^{(p^r)}$ 在 $\mathbb{Z}[x^{p^r}]$ 上的限制模 p 为导数。

证. 我们需要用到下面几个组合事实: 首先, 若 $m=i_0+i_1p+i_2p^2+\cdots+i_rp^r$ $(0\leqslant i_0,...,i_r<p)$, 则

$$\frac{m!}{(p!)^{i_1}\cdots(p^r!)^{i_r}}\equiv i_0!i_1!\cdots i_r!\not\equiv 0 \pmod p \tag{7}$$

注意 (7) 的左边为多项式 $\phi=(x_1+\cdots+x_{i_0+\cdots+i_r})^m$ 中单项式

$$\alpha=x_1\cdots x_{i_0}x_{i_0+1}^p\cdots x_{i_0+i_1}^p\cdots x_{i_0+\cdots+i_r}^{p^r} \tag{8}$$

的系数, 而

$$\begin{aligned}\phi\equiv{}&(x_1+\cdots+x_{i_0+\cdots+i_r})^{i_0}(x_1^p+\cdots+x_{i_0+\cdots+i_r}^p)^{i_1}\cdots(x_1^{p^r}\\&+\cdots+x_{i_0+\cdots+i_r}^{p^r})^{i_r}\pmod p\end{aligned} \tag{9}$$

右边 α 的系数为 $i_0!i_1!\cdots i_r!$。将 (7) 应用于 $m=p^r-1=(p-1)(1+p+\cdots+p^{r-1})$ 得

$$1=\frac{p^r!}{(p^r-1)!p^r}\equiv(-1)^r\frac{p^r!}{(p!\cdots p^{r-1}!)^{p-1}p^r} \pmod p \tag{10}$$

再由归纳法得

$$\frac{p^r!}{p^{(p^r-1)/(p-1)}}\equiv(-1)^r \pmod p \tag{11}$$

再次应用 (7) 可见对任意 $i<r$ 有

$$\frac{p^r!}{p^i!(p^r-p^i)!p^{r-i}}\equiv 1 \pmod p \tag{12}$$

由 (11) 可得

$$\frac{p^r!}{p^{r-1}!(p!)^{p^{r-1}}} \equiv 1 \pmod p \tag{13}$$

再由归纳法可得

$$\frac{p^{r+s}!}{p^r!(p^s!)^{p^r}} \equiv 1 \pmod p \tag{14}$$

i) 我们需要验证对任意 $m \geqslant 0$ 有 $D^{(p^i)}(x^{p^r+m}) \in I$, 只需考虑 $m < p^i$ 的情形即可。我们有 $D^{(p^i)}(x^{p^r+m}) = \frac{(p^r+m)!}{p^i!(p^r+m-p^i)!}x^{p^r+m-p^i}$, 由 (7) 和 (12) 有

$$\frac{(p^r+m)!}{p^i!(p^r+m-p^i)!} \equiv \frac{p^r!m!}{p^i!(p^r-p^i)!m!} \equiv 0 \pmod p \tag{15}$$

此外注意, 对任意 $m = i_0 + i_1 p + i_2 p^2 + \cdots + i_{r-1}p^{r-1}$ $(0 \leqslant i_0, ..., i_{r-1} < p)$ 有

$$D^{(p^0)i_0} \circ \cdots \circ D^{(p^{r-1})i_{r-1}}(x^m) = \frac{m!}{(p!)^{i_1} \cdots (p^{r-1}!)^{i_{r-1}}} \not\equiv 0 \pmod p \tag{16}$$

而对任意 $j \neq m$ 有 $D^{(p^0)i_0} \circ \cdots \circ D^{(p^{r-1})i_{r-1}}(x^j) \equiv 0 \pmod{(x)}$。故所有 $h \circ D^{(p^i)}$ $(0 \leqslant i < r)$ 生成 $\mathrm{Diff}(A/I, \mathbb{F}_p)$。

ii) 我们有 $D^{(p^r)}(ab) = \sum_{m=0}^{p^r} \frac{1}{j!(p^r-m)!}D^j(a)D^{p^r-m}(b)$, 故只要将每个 $\frac{1}{m!}D^m$ $(0 < m < p^r)$ 表为 $D^{(p^0)}, ..., D^{(p^{r-1})}$ 的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-系数单项式即可。设 $m = i_0 + i_1 p + i_2 p^2 + \cdots + i_{r-1}p^{r-1}$ $(0 \leqslant i_0, ..., i_{r-1} < p)$, 由 (7) 可知存在 $c \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ 使得

$$\frac{1}{m!}D^m = c\frac{1}{(p!)^{i_1} \cdots (p^{r-1}!)^{i_{r-1}}}D^m = cD^{(p^0)i_0} \circ \cdots \circ D^{(p^{r-1})i_{r-1}} \tag{17}$$

由 (17) 可见 λ_r 的唯一性。

iii) 第一个断言是显然的。对 p^r 的任意整数倍 m, 分解为 $m = p^s q$, 其中 $s \geqslant r$ 而 $p \nmid q$。由 (7) 得 $\frac{m!}{(m-p^s)!p^s!} \equiv q \pmod p$, 故由 (12) 可见当 $s > r$ 时 $\frac{m!}{(m-p^r)!p^r!} \equiv 0 \pmod p$, 因此 $D^{(p^r)}(x^m) = \frac{m!}{p^r!(m-p^r)!}x^{m-p^r}$ 在任何情况下模 p 与 $\frac{m}{p^r}x^{m-p^r}$ 同余, 这说明 $D^{(p^r)}$ 在 $\mathbb{F}_p[y] \subset \mathbb{F}_p[x]$ (其中 $y = x^{p^r}$) 上的限制等于 $\frac{d}{dy}$。证毕。

3. 外微分与德拉姆复形

下面要涉及概形的德拉姆复形，为此先介绍概形的外微分。

设 $\tau : X \to S$ 为分离态射。仍用 §§1 的记号。定义 O_S-模同态 $\tilde{d}^n : \bigotimes_{O_S}^{n+1} O_X \to \bigotimes_{O_S}^{n+2} O_X$ 为

$$\tilde{d}^n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n \quad (1)$$

由于 $\bigotimes_{O_S}^{n+1} O_X \simeq \bigotimes_{O_X}^{n} P'_X$，$\tilde{d}^n$ 可以看作一个态射 $\bigotimes_{O_X}^{n} P'_X \to \bigotimes_{O_X}^{n+1} P'_X$。不难验证 $\tilde{d}^n$ 诱导一个态射 $\bar{d}^n : \bigotimes_{O_X}^{n} P_X^1 \to \bigotimes_{O_X}^{n+1} P_X^1$，而 $\bar{d}^n$ 又诱导一个态射 $\hat{d}^n : \bigwedge_{O_X}^{n} P_X^1 \to \bigwedge_{O_X}^{n+1} P_X^1$。注意 O_X-模的典范正合列

$$0 \to \Omega_{X/S}^1 \to P_X^1 \xrightarrow{\Delta^*} O_X \to 0 \quad (2)$$

是分裂的，故有正合列

$$0 \to \Omega_{X/S}^n \to \bigwedge_{O_X}^{n} P_X^1 \to \Omega_{X/S}^{n-1} \to 0 \quad (3)$$

我们来证明 $\hat{d}^n(\Omega_{X/S}^n) \subset \Omega_{X/S}^{n+1}$，为此只需对 $\Omega_{X/S}^n$ 在 O_S 上的一组生成元验证。设 ω 为 $\bigotimes_{O_X}^{n-1} \mathcal{I}'$ 的一个局部截口，a 为 O_X 的一个局部截口，则 $\omega' = 1 \otimes a - a \otimes 1$ 为 $\mathcal{I}'$ 的一个局部截口。我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^n(\omega \otimes \omega') &= \tilde{d}^n(\omega \otimes a - a\omega \otimes 1) \\
&= \tilde{d}^{n-1}(\omega) \otimes a + (-1)^{n+1} \omega \otimes a \otimes 1 - a\tilde{d}^{n-1}(\omega) \otimes 1 - \\
&\quad \tilde{d}^0(a) \otimes \omega \otimes 1 - (-1)^{n+1} a\omega \otimes 1 \otimes 1 \\
&= \tilde{d}^{n-1}(\omega) \otimes \omega' + (-1)^{n+1} \omega \otimes \omega' \otimes 1 - \omega' \otimes \omega \otimes 1
\end{aligned} \quad (4)$$

由此过渡到 $\hat{d}^n$，我们得到

$$\hat{d}^n(\hat{\omega} \wedge da) = \hat{d}^{n-1}(\hat{\omega}) \wedge da \quad (5)$$

对 $\Omega_{X/S}^{n-1}$ 的任意局部截口 $\hat{\omega}$ 成立。这样由归纳法即可证明 $\hat{d}^n(\Omega_{X/S}^n) \subset \Omega_{X/S}^{n+1}$。因此 $\hat{d}^n$ 诱导 $d^n : \Omega_{X/S}^n \to \Omega_{X/S}^{n+1}$，且由 (5) 可见它与外微分的经典定义一致。(不难验证 $\hat{d}^n$ 对 (3) 诱导的映射 $\Omega_{X/S}^{n-1} \to \Omega_{X/S}^n$ 为 d^{n-1}。)

注意对任意 n 有 $\tilde{d}_{n+1} \circ \tilde{d}_n = 0$ (交错和的交错和为 0), 由此易见 $d^{n+1} \circ d^n = 0$, 故有复形

$$\Omega^{\cdot}_{X/S} : 0 \to O_X \xrightarrow{d^0} \Omega^1_{X/S} \xrightarrow{d^1} \Omega^2_{X/S} \xrightarrow{d^2} \cdots \tag{6}$$

这就是 X 在 S 上的德拉姆复形。

注 1. 令 $P_{n,X} = \Delta_n^{-1} O_{X_n}$, 其中 X_n 为 X 的 $(n+1)$ 个拷贝 (标号从 0 到 n) 在 S 上的纤维积, 而 $\Delta_n \colon X \to X_n$ 为对角态射。令 $\tau_{n,i} : X_{n+1} \to X_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ 为对 X 的除第 i 个外的所有因子的纤维积的投射, 则 $\hat{d}^n$ 可由 $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \tau^*_{n,i} \colon P_{n,X} \to P_{n+1,X}$ 诱导。

设 X 为域 k 上的非奇异代数簇。若 $\mathrm{ch}(k) = 0$, 则可以证明德拉姆复形在指标 > 0 处都是正合的 (而 $\ker(d^0) = k$)。但若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 情况完全不同: 此时有环层同态 $F : O_X \to O_X$ 将任一局部截口 a 映为 a^p, 由上面的定义可见 F 诱导加法同态 $F_n : \Omega^n_{X/S} \to \Omega^n_{X/S}$ $(\forall n)$, 且易见有交换图

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n_{X/S} & \xrightarrow{d^n} & \Omega^{n+1}_{X/S} \\ \downarrow{\scriptstyle F_n} & & \downarrow{\scriptstyle F_{n+1}} \\ \Omega^n_{X/S} & \xrightarrow{d^n} & \Omega^{n+1}_{X/S} \end{array} \tag{7}$$

由 (6) 易见 $d^n \circ F_n = 0$, 故 $\mathrm{im}(F_n) \subset \ker(d^n)$。可以证明 F_n 是单射且诱导的 $\mathrm{im}(F_n) \to H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S})$ 是同构, 其逆给出加法同构 $C_n : H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \to \mathrm{im}(F_n) \to \Omega^n_{X/S}$, 称为“卡迪耶算子”。

习题

1. 设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型分离态射。证明:

i) 对 X 上的任意凝聚层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$及任意正整数 n, $\mathcal{E}_n = \pi_* \mathcal{D}iff^n_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 为 S 上的拟凝聚层, 且 $\mathcal{E}_n$ 可以看作 $\mathcal{E}_{n+1}$ 的子层。若 π 为射影的则 $\mathcal{E}_n$ 为 S 上的凝聚层。所有 $\mathcal{E}_n$ 的并同构于 $\pi_* \mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$。

ii) $\mathcal{A} = \pi_* \mathcal{D}iff_{X/S}(O_X, O_X)$ 具有典范的 O_S-代数层结构, 而

$\pi_*\mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F},O_X)$ 和 $\pi_*\mathcal{D}iff_{X/S}(O_X,\mathcal{G})$ 分别具有典范的右和左 $\mathcal{A}$-模层结构。

iii) $\pi_*\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)$ 具有典范的 O_S-李代数层结构, 且可看作 $\mathcal{A}$ 的 O_S-李子代数层。若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数), 则 $\pi_*\mathcal{D}er_S(O_X,O_X)$ 还具有 p-李代数层结构。

2. 设 $\pi: X \to S$ 为诺特概形的有限型分离态射。证明存在典范谱序列 $(E^{\cdot}, E^{\cdot\cdot}_{\cdot})$, 满足 $E_1^{i,j} \cong R^j\tau_*\Omega^i_{X/S}$, $E^n \cong \mathbb{H}^n(\Omega^{\cdot}_{X/S})$。

第 3 节　射影概形的希尔伯特多项式

1. 半连续性理论

设 $\mathcal{F}$ 为诺特概形 S 上的凝聚层。对任意 $s \in S$ 记 $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{O_S} \kappa(s)$, 即 $\mathcal{F}$ 在 s 点的纤维。令 $r_{\mathcal{F}}(s) = \dim_{\kappa(s)} \mathcal{F}_s$, 则定义了 S 上的一个整值函数 $r_{\mathcal{F}}$。若 $\mathcal{F}$ 在 S 上平坦, 我们知道 $r_{\mathcal{F}}$ 在 S 的每个连通分支上是常数 (见引理 1.2.v))。在一般情形则有

引理 1. 设 $\mathcal{F}$ 为诺特概形 S 上的凝聚层, 则 $r_{\mathcal{F}}$ 是**上半连续的**, 即对任意实数 t, 子集 $\{s \in S | r_{\mathcal{F}}(s) \geqslant t\}$ 是 S 中的闭集 (换言之 $\{s \in S | r_{\mathcal{F}}(s) \leqslant t\}$ 是 S 中的开集)。

证. 对任意 $s \in S$ 取仿射开邻域 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset S$, 令 $p \subset R$ 为 s 所对应的素理想, 则 $\kappa(s) = \kappa(p) \cong R_p/pR_p$。由定义 $\mathcal{F}$ 在 U 上的限制由一个有限生成的 R-模 M 给出, 而

$$\mathcal{F}_s \cong M_p/pM_p \cong M \otimes_R \kappa(p) \tag{1}$$

取 $v_1, ..., v_r \in M$ (其中 $r = r_{\mathcal{F}}(s)$) 使得它们在 M_p/pM_p 中的像 $\bar{v}_1, ..., \bar{v}_r$ 组成 M_p/pM_p 在 $\kappa(p)$ 上的一组基。令 $N \subset M$ 为 $v_1, ..., v_r$ 生成的 R-子模, 则 $N_p/pN_p \to M_p/pM_p$ 为同构, 故由中山正引理可知 $N_p \to M_p$ 为同构。令 $C = M/N$, 则有 $C_p \cong M_p/N_p = 0$; 而 C 是有限生成的 R-模, 故可取 $a \in R - p$ 使得 $C_a = 0$, 从而 $N_a \to M_a$ 是同构。由于 N_a 由 r 个元

生成, 对任意 $s' \in U_a = \mathrm{Spec}(R_a)$ 都有

$$r_{\mathcal{F}}(s') = \dim_{\kappa(s')} N \otimes_R \kappa(s') \leqslant r = r_{\mathcal{F}}(s) \tag{2}$$

证毕。

引理 2. 设 S 为诺特概形, $f: X \to S$ 为紧态射。对任意 $s \in S$ 令 $d_f(s) = \dim(X_s)$ (若 $X_s = \emptyset$ 令 $\dim(X_s) = -1$)。则 d_f 是 S 上的上半连续函数。

证. 由 f 是紧的可见 $U_0 = S - f(X) \subset S$ 为 S 的开子集, 换言之 $\{s \in S | d_f(s) = -1\}$ 为开子集。

任取 $f(X)$ 的一个一般点 ξ, 则 $f^{-1}(\xi)$ 含于有限多个仿射开子概形 $\mathrm{Spec}A_i \subset X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的并中。令 $\mathrm{Spec}R \subset S$ 为 ξ 的一个不可约仿射开邻域, 带有约化的概形结构。对每个 i, 由诺特正规化引理可知 $A_i' = A_i \otimes_{O_S} \kappa(\xi)$ 中含有一个 $\kappa(\xi)$-多项式代数 R_i', 使得 A_i' 在 R_i' 上是整的, 故可取 $c \neq 0 \in R$ 使得每个 $A_i \otimes_{O_S} R_c$ 包含一个 R_c-多项式代数 R_i, $B_i = A_i \otimes_{O_S} R_c$ 在 R_i 上是整的, 且 $f^{-1}(\mathrm{Spec}R_c) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Spec}B_i$。由此可见 f 在 $U_1 = \mathrm{Spec}R_c$ 上的所有纤维都具有相同的维数。将 $f(X)$ 换为 $f(X) - U_1$ 再重复上面的选取得到 $f(X) - U_1$ 的开子集 U_2, 使得 f 在 U_2 上的所有纤维都具有相同的维数, 等等, 由诺特归纳法最终可将 S 分解为有限多个局部闭子集 $U_0,..., U_m$ 的无交并, 而 f 在每个 U_i 上的所有纤维都具有相同的维数。

设 $s, t \in S$ 而 s 在 $\{t\}$ 的闭包中, 我们来证明 $d_f(s) \geqslant d_f(t)$。任取包含 s 的一个仿射开子集 $\mathrm{Spec}R \subset S$ 并将 s, t 看作 R 的素理想, 令 $h = \mathrm{ht}(s/t)$, $d = \dim(X_t)$, 则可取 R 中的素理想链 $s = s_0 \subsetneq ... \subsetneq s_h = t$, 并可取 X 的一个仿射开子集 $\mathrm{Spec}A$ 使得 A 中有卧于 t 上的素理想链 $P_0 \subsetneq ... \subsetneq P_d$。记 $Q_0 = P_d$, 由于 f 是紧的, f 将 $\{Q_0\}$ 的闭包 $\overline{\{Q_0\}}$ 映到 S 的一个闭集, 故 $s_1 \in f(\overline{\{Q_0\}})$, 换言之存在 $Q_1 \in \overline{\{Q_0\}}$ 使得 $f(Q_1) = s_1$; 同理存在 $Q_2 \in \overline{\{Q_1\}}$ 使得 $f(Q_2) = s_2$, 等等, 由归纳法可取 $Q_1, ..., Q_h \in X$ 使得 $Q_i \in \overline{\{Q_{i-1}\}}$ 且 $f(Q_i) = s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$。取 X 的一个包含 Q_h 的仿射开子集 $\mathrm{Spec}B$, 则 B 中有长为 $d + h$ 的素理想链 $P_0 \subsetneq ... \subsetneq P_d \subsetneq Q_1 \subsetneq ... \subsetneq Q_h$, 故 $\mathrm{ht}(Q_h/tB) \geqslant d + h$。由交换代数 (参

看 [Ma, Theorem 19] 或 [L1, 推论 X.3.2]) 可知 $\mathrm{ht}(Q_h/tB) \leqslant \mathrm{ht}(s/t) + \mathrm{ht}(Q_h/sB)$, 故

$$\dim(X_s) \geqslant \mathrm{ht}(Q_h/sB) \geqslant \mathrm{ht}(Q_h/tB) - \mathrm{ht}(s/t) \geqslant d + h - h = d \qquad (3)$$

即 $d_f(s) \geqslant d_f(t)$。

对任意非负整数 d 令 $V_d = \{s \in S | d_f(s) > d\}$, 则由上所述可见 V_d 为有限多个局部闭子集的并, 故为可建造集 (参看 [Ma, 6.B] 或 [L1, VIII.3]); 另一方面 V_d 在特殊化下安定, 从而为闭集 (参看 [Ma, Lemma 6.G] 或 [L1, 引理 VIII.3.1])。这说明 d_f 是 S 上的上半连续函数。证毕。

下面的命题涉及层的上同调 (详细的上同调理论可参看 [H, III])。

我们下面采用下列术语: 一个态射 $\pi: X \to S$ 称为*相对射影的*, 如果 X 是某个 $\mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ 的闭子概形, 其中 $\mathcal{E}$ 是 S 上的凝聚层 (而 π 为投射)。注意闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ 给出 X 上的一个可逆层 $O_X(1)$。如果 S 是某个环上的射影概形, 则不难看到 S 上的相对射影态射就是射影态射; 但在一般情形, 相对射影态射不一定是射影的。同样可以定义*相对拟射影态射*。一个态射 $\pi: X \to S$ 称为*局部射影的* (或*局部拟射影的*), 如果 X 的每个连通分支在 S 上是相对射影的 (或*相对拟射影的*)。

设 S 为诺特概形, $\pi: X \to S$ 为相对射影态射。设 X 上的凝聚层 $\mathcal{F}$ 为在 S 上平坦。对任意非负整数 i, 定义 S 上的函数

$$h^i_{\mathcal{F}}(s) = \dim_{\kappa(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}_s) \qquad (4)$$

注意对任意 i 及任意 $s \in S$ 有典范同态 $\phi^i_s: (R^i\pi_*\mathcal{F})_s \to H^i(X_s, \mathcal{F}_s)$。

命题 1. 设 S 为诺特概形, $\pi: X \to S$ 为相对射影态射, 并给定了 $O_X(1)$。设 X 上的凝聚层 $\mathcal{F}$ 在 S 上平坦。

i) 对每个 i, $h^i_{\mathcal{F}}$ 是 S 上的上半连续函数。

ii) 设 $S = \mathrm{Spec}R$, 则存在一个有限生成自由 R-模组成的复形 $C^\cdot$ (对 $n \gg 0$ 有 $C^n = 0$), 使得对任意 R-模 M 有自然同构 $H^i(X, \mathcal{F} \otimes_R M) \cong H^i(C^\cdot \otimes_R M)$ $(\forall i)$, 且此同构与任意 R-模短正合列诱导的同调长正合列相容。

iii) 对任意 i 及任意 $s \in S$, 若 ϕ_s^i 为满射, 则它是同构, 且存在 s 的开邻域 $U \subset S$ 使得对任意 $s' \in U$, $\phi_{s'}^i$ 是同构。

iv) 对任意 $i > 0$ 及任意 $s \in S$, 若 ϕ_s^i 为满射, 则 ϕ_s^{i-1} 为满射当且仅当 $R^i\pi_*\mathcal{F}$ 在 s 附近是局部自由的。

v) 对任意 $i > 0$ 及充分大的 n 有 $R^i\pi_*\mathcal{F}(n) = 0$, 从而 $\pi_*\mathcal{F}(n)$ 是局部自由的, 而 $r_{\mathcal{F}(n)} = h^0_{\mathcal{F}(n)}$ 是局部常值函数。

证明可见于 [H, Ⅲ.5 & 12]。

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何连通约化纤维。则 $\pi^* : O_S \to \pi_* O_X$ 为同构。

证. 将命题 1.ii), iii) 应用于 $\mathcal{F} = O_X$ $(i = 0)$, 就约化到 $S = \mathrm{Spec}k$ (k 为域) 的情形, 再由基变换可约化为 k 是代数闭域的情形。由 X 是射影概形可见 $R = \Gamma(X, O_X)$ 是有限维 k-代数, 从而为阿廷环。由 X 约化可见 R 约化, 从而 R 同构于有限多个 k 的拷贝的直积 $k\times \overset{m}{\cdots} \times k$。若 $m > 1$, 令 $a = (1, 0, ..., 0) \in R$, 则有 $a(1 - a) = 0$, 由 a 和 $1 - a$ 不是单位元可见 $V(a) \subset X$ 和 $V(1 - a) \subset X$ 都非空, 从而 X 分解为两个非空闭子集的无交并, 与 X 连通的假设矛盾。证毕。

2. 希尔伯特多项式

设 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ 为域 k 上的有限生成的分次代数, 其中 $A_0 = k$, A_i 是 A 的 i 次齐次部分。则由交换代数可知, 存在一个整值多项式 $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$ 使得对充分大的 n 有 $\dim_k \bigoplus_{i=0}^{n} A_i = \chi_A(n)$ (参看 [L1, 命题 Ⅸ.2.1]), 称 χ_A 为 A 的希尔伯特多项式。若闭子概形 $X \subset \mathbb{P}_k^r$ 由齐次多项式 $F_1, ..., F_m \in k[X_0, ..., X_r]$ 定义, 则 $A = k[X_0, ..., X_r]/(F_1, ..., F_m)$ 为有限生成的分次 k-代数, 称 χ_A 为 X 的希尔伯特多项式并记为 χ_X。注意 χ_X 与嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^r$ 有关, 更准确地说是与极丰富层 $O_X(1)$ 的取法有关。此外注意即使取定了 $O_X(1)$, k-代数 A 也未必是在同构之下唯一确定的, 但 χ_X 是唯一确定的, 因为 A 的不同取法所相差别的只是有限多个齐次部分。

引理 3. 设 X 为一个域 k 上的射影概形, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, $\mathcal{F}$ 为 X 上的

凝聚层, 则存在次数 $\leqslant \dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ 的 (希尔伯特) 多项式 $\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[x]$ 使得

$$\chi(\mathcal{L}^n \otimes_{O_X} \mathcal{F}) = \chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}(n) \tag{1}$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 成立。此外, 当 $\mathcal{L}$ 是丰富层时 $\deg(\chi_{\mathcal{L};O_X}) = \dim(X)$。

证. 不妨设 k 是代数闭域。对 $d = \dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ 用归纳法, 当 $d = 0$ 时对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 均有 $\chi(\mathcal{L}^n \otimes_{O_X} \mathcal{F}) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{F})$, 取 $\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}(x)$ 等于常数 $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{F})$ 即可。

设 $d > 0$, 先考虑 $\mathcal{L}$ 为极丰富的情形, 即对某个 N 存在闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ 使得 $\mathcal{L} \cong O_X(1)$。取超平面 $H \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_k^N$ 使得 H 不包含 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ 的任一不可约分支, 并取 $s \in \Gamma(X, O_X(1))$ 定义 $H \cap X$, 则有正合列

$$O_X(-1) \xrightarrow{s\cdot} O_X \to i_* O_H \to 0 \tag{2}$$

$\otimes_{O_X} \mathcal{F}$ 得正合列

$$\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s\cdot} \mathcal{F} \to i_* O_H \otimes_{O_X} \mathcal{F} \to 0 \tag{3}$$

令 $\mathcal{F}_1 = \ker(s\cdot : \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F})$, 并记 $\mathcal{F}_2 = i_* O_H \otimes_{O_X} \mathcal{F}$, 由 H 的取法可知 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_1)$ 和 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_2)$ 的维数都小于 d, 故由归纳法假设存在次数小于 d 的 $\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}_i} \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $\chi(\mathcal{F}_i(n)) = \chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}_i}(n)$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 成立 $(i = 1, 2)$。由 $\otimes_{O_X} O_X(n)$ 可见对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有正合列

$$0 \to \mathcal{F}_1(n) \to \mathcal{F}(n-1) \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}_2(n) \to 0 \tag{4}$$

由此得

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) &= \chi(\mathcal{F}_2(n)) - \chi(\mathcal{F}_1(n)) \\ &= \chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}_2}(n) - \chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}_1}(n) \end{aligned} \tag{5}$$

这可以看作关于 $\chi(\mathcal{F}(n))$ 的一个差分方程, 由此即可得一个次数 $\leqslant d$ 的多项式 $\chi_{\mathcal{L},\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 (1) 成立。

对于一般的可逆层 $\mathcal{L}$, 可取极丰富可逆层 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ 使得 $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_1 \otimes_{O_X} \mathcal{L}_2^{-1}$。由上面的讨论不难证明存在次数 $\leqslant d$ 的多项式 $\chi \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ 使得对任意 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ 有

$$\chi(\mathcal{L}_1^{n_1} \otimes_{O_X} \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes_{O_X} \mathcal{F}) = \chi(n_1, n_2) \tag{6}$$

令 $\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}(x) = \chi(x, -x)$ 即可见 (1) 成立。

最后，当 $\mathcal{L}$ 是极丰富层时，我们知道 $\deg(\chi_{\mathcal{L};O_X}) = \dim(X)$ (参看 [H, Proposition I.7.6])，而对一般的丰富层 $\mathcal{L}$ 可取正整数 m 使得 $\mathcal{L}^m$ 是极丰富的，并注意 $\chi_{\mathcal{L}^m;\mathcal{F}}(x) = \chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}(mx)$。证毕。

由证明的过程不难得到

推论 2. 设 X 为一个域 k 上的 n 维射影概形，$\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_r$ 为 X 上的可逆层，$\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层，则存在次数 $\leqslant \dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ 的多项式 $\chi_{\mathcal{L}_1,...,\mathcal{L}_r;\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[x_1, ..., x_r]$ 使得

$$\chi(\mathcal{L}_1^{m_1} \otimes_{O_X} \cdots \otimes_{O_X} \mathcal{L}_r^{m_r} \otimes_{O_X} \mathcal{F}) = \chi_{\mathcal{L}_1,...,\mathcal{L}_r;\mathcal{F}}(m_1, ..., m_r) \tag{7}$$

对任意 $m_1, ..., m_r \in \mathbb{Z}$ 成立。

简记 $\chi_{\mathcal{L};O_X} = \chi_{\mathcal{L}}$。设 $\dim(X) = n$，记 $d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$ 为 $n!\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}$ 的 n 次项系数 (为整数)，并令 $\deg(\mathcal{L}) = d_{\mathcal{L}}(O_X)$，称为 $\mathcal{L}$ 的*次数*。若 $\mathcal{L}$ 为丰富的，由引理 3 有 $\deg(\mathcal{L}) > 0$。对任两个可逆层 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ 及任意正整数 n_1, n_2，由推论 2 可见 $\deg(\mathcal{L}_1^{n_1} \otimes_{O_X} \mathcal{L}_2^{n_2})$ 是 n_1, n_2 的 n 次齐次多项式。

设 $\mathcal{L}$ 是丰富的而 X 是整的，令 $r = \mathrm{rank}(\mathcal{F})$，可取 $m \in \mathbb{Z}$ 使得存在单同态 $f : (\mathcal{L}^m)^{\oplus r} \hookrightarrow \mathcal{F}$，则 $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(f)$ 满足 $\dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{E})) < n$，从而由引理 3 有 $d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) = r d_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}^m) = r \deg(\mathcal{L})$，即 (见 [M3, p. 64])

推论 3. 设 X 为一个域 k 上的射影簇，$\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层，$\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层，则

$$d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{L})\mathrm{rank}_{O_X}\mathcal{F} \tag{8}$$

由命题 1.v) 可见，若 $S = \mathrm{Spec}R$ 为连通诺特概形而闭子概形 $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_S^n$ 在 S 上平坦，则对任意 $m \gg 0$, $\Gamma(X, O_X(m))$ 生成 $O_X(m)$ 且 $i^* : \Gamma(\mathbb{P}_S^n, O_{\mathbb{P}_S^n}(m)) \to \Gamma(X, O_X(m))$ 为满射。此外，存在整值 $\mathbb{Q}$-多项式 χ_X 使得当 $m \gg 0$ 时 $\Gamma(X, O_X(m))$ 是局部自由秩 $\chi_X(m)$ 的，因此 S 上的所有纤维具有相同的希尔伯特多项式。注意 χ_X 与 $O_X(1)$ 的取法有关。

3. 一个消失定理

我们要用到一些技术性的结果。设 k 为域，$X = \mathbb{P}_k^n$ (齐次坐标为 $X_0, ..., X_n$) 而 m 为整数。X 上的一个凝聚层 $\mathcal{F}$ 称为 *m-正则的*，如果 $H^i(X, \mathcal{F}(m-i)) = 0$ 对任意 $i > 0$ 成立。下面的引理 4，引理 5 和推论 4 引自 [M2, Lecture 14]。

引理 4 (Castelnuovo). 设 $\mathcal{F}$ 是 $X = \mathbb{P}_k^n$ 上的 m-正则凝聚层，r 为整数。

i) 若 $r > m$，则 $H^0(X, \mathcal{F}(r-1)) \otimes_k H^0(X, O_X(1)) \to H^0(X, \mathcal{F}(r))$ 是满射。

ii) 若 $i > 0$, $r + i \geqslant m$，则 $H^i(X, \mathcal{F}(r)) = 0$。

iii) 若 $r \geqslant m$，则 $\mathcal{F}(r)$ (作为 O_X-模层) 由 $H^0(X, \mathcal{F}(r))$ 生成。

证. 不妨设 k 是代数闭的。为方便起见，对一个闭嵌入 $i : Y \hookrightarrow X$ 及 Y 上的一个凝聚层 $\mathcal{E}$，简记 $i_*\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{E}$ (注意 $i^*i_*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$)。

对 n 用归纳法，$n = 0$ 时结果显然。

设 $n > 0$，我们先来说明存在 $s \in H^0(X, O_X(1))$ 使得 $\cdot s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$ 为单射。一个截口 $s = a_0X_0 + ... + a_nX_n \in H^0(X, O_X(1))$ $(a_0, ..., a_n \in k)$ 在开子集 $U_i = \{X_i \neq 0\} \subset X$ 上的限制为线性型 $a_0x_0 + ... + a_nx_n$ ($x_j = X_j/X_i$，特别地 $x_i = 1$)，$\mathcal{F}(U_i)$ 的零因子的全体等于其 (作为 $k[x_0, ..., x_n]$-模的) 伴随素理想的并 (参看 [Ma, Chapter 3] 或 [L1, V])，而每个伴随素理想所包含的这样的线性型组成所有线性型的空间的真线性子空间。若 s 不含于这有限多个真子空间的并中，则 s 在每个 U_i 上都不是 $\mathcal{F}(U_i)$ 的零因子，故 $\cdot s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$ 是单射。

取定这样一个 s，它对应于 X 中的一个超平面 H。记 $\mathcal{F}_H = \mathcal{F} \otimes_{O_X} O_H$，则对任意整数 r 有正合列

$$0 \to \mathcal{F}(r-1) \to \mathcal{F}(r) \to \mathcal{F}_H(r) \to 0 \tag{1}$$

故有正合列

$$H^i(\mathcal{F}(m-i)) \to H^i(\mathcal{F}_H(m-i)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1)) \tag{2}$$

由此可见若 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的则 $\mathcal{F}_H$ 亦然。对 $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ 用归纳法假设，对

任意 $i \geqslant 0$, 由 ii) 得正合列

$$0 = H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i)) \to H^{i+1}(\mathcal{F}_H(m-i)) = 0 \quad (3)$$

故 $H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i)) = 0$, 即 $\mathcal{F}$ 为 $(m+1)$-正则的。这样由归纳法可知对任意 $m' \geqslant m$, $\mathcal{F}$ 为 m'-正则的, 即 ii) 成立。

我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} & H^0(\mathcal{F}(r-1)) \otimes_k H^0(O_X(1)) & \xrightarrow{\sigma} & H^0(\mathcal{F}_H(r-1)) \otimes_k H^0(O_H(1)) \\ & \downarrow \mu & & \downarrow \tau \\ H^0(\mathcal{F}(r-1)) \to & H^0(\mathcal{F}(r)) & \xrightarrow{\nu} & H^0(\mathcal{F}_H(r)) \end{array} \quad (4)$$

若 $r > m$, 由 ii) 有 $H^1(\mathcal{F}(r-2)) = 0$, 故 $H^0(\mathcal{F}(r-1)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{F}_H(r-1))$, 而 $H^0(O_X(1)) \twoheadrightarrow H^0(O_H(1))$, 故 σ 是满射; 而由归纳法假设, τ 也是满射, 从而 $\nu \circ \mu$ 是满射。注意 $\mathrm{im}(H^0(\mathcal{F}(r-1)) \to H^0(\mathcal{F}(r))) \subset \mathrm{im}(\mu)$, 可见 μ 是满射, 这就证明了 i)。

取 $r \gg m$, 则 $\mathcal{F}(r)$ 由 $H^0(\mathcal{F}(r))$ 生成, 而由 i) 有 $H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes_k H^0(O_X(r-m)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{F}(r))$, 注意在每个 $U_i = \{X_i \neq 0\}$ 上, $\mathcal{F}(r)(U_i) \cong \mathcal{F}(U_i)$, 而 $H^0(O_X(r-m))$ 的元在 U_i 上的限制为 $O_X(U_i)$ 中的元, 故 $\mathcal{F}(m)$ 由 $H^0(\mathcal{F}(m))$ 生成。由此可见 iii) 成立。证毕。

引理 5. 仍令 $X = \mathbb{P}^n_k$。设 χ 为一个希尔伯特多项式。存在只与 χ 有关的正整数 $N = N(\chi)$ (实际上可取 $N(\chi)$ 为 χ 的系数的一个多项式), 使得任意理想层 $\mathcal{I} \subset O_X$ 若满足 $\chi_{\mathcal{I}} = \chi$ 则为 N-正则的。

证. 仍不妨设 k 是代数闭的。令 $Y \subset X$ 为 $\mathcal{I}$ 定义的闭子概形。

对 n 用归纳法, $n = 0$ 时结果显然。设 $n > 0$, 如同引理 4 的证明, 可取 $s \in H^0(X, O_X(1))$ 使得 $\cdot s : O_Y \to O_Y(1)$ 为单射, 而 s 对应于超平面 $H \subset X$。我们有交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}(-1) & \longrightarrow & O_X(-1) & \longrightarrow & O_Y(-1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cdot s & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I} & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & O_Y & & \end{array} \quad (5)$$

其中的行是正合的，且 $\cdot s$ 是单射，故由蛇形引理 (参看 [L1, 定理 XII.1.1]) 可知 $\mathcal{I}_H \to O_H$ 是单射，即可将 $\mathcal{I}_H$ 看作 $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ 的理想层。由 $\chi_{\mathcal{I}_H}(x) = \chi_{\mathcal{I}}(x) - \chi_{\mathcal{I}}(x-1)$ 及归纳法假设可知存在 $N' = N'(\chi)$ 使得 $\mathcal{I}_H$ 是 N'-正则的。由正合列

$$0 \to \mathcal{I}(r-1) \to \mathcal{I}(r) \to \mathcal{I}_H(r) \to 0 \tag{6}$$

可知当 $r \geqslant N'-2$ 时有正合列

$$\begin{aligned} 0 \to & H^0(\mathcal{I}(r)) \to H^0(\mathcal{I}(r+1)) \xrightarrow{\rho_{r+1}} H^0(\mathcal{I}_H(r+1)) \to H^1(\mathcal{I}(r)) \to \\ & H^1(\mathcal{I}(r+1)) \to 0 \end{aligned} \tag{7}$$

而当 $r \geqslant N'-i$, $i \geqslant 2$ 时有 $H^i(\mathcal{I}(r)) \cong H^i(\mathcal{I}(r+1))$。由于对 $r \gg 0$ 有 $H^i(\mathcal{I}(r)) = 0$ $(\forall i > 0)$，可见当 $r \geqslant N'-i$, $i \geqslant 2$ 时 $H^i(\mathcal{I}(r)) = 0$。另一方面，由 (7) 可见对 $r \geqslant N'-2$，若 ρ_{r+1} 不是满射则 $\dim_k H^1(\mathcal{I}(r)) > \dim_k H^1(\mathcal{I}(r+1))$；而若 ρ_{r+1} 是满射，由归纳法及引理 4.i) 有满射 $H^0(\mathcal{I}_H(r+1)) \otimes_k H^0(O_X(1)) \to H^0(\mathcal{I}_H(r+2))$，从而 $\rho_{r+2} : H^0(\mathcal{I}(r+2)) \to H^0(\mathcal{I}_H(r+2))$ 是满射，由归纳法对任意 $j>0$ 都有 $H^1(\mathcal{I}(r)) \cong H^1(\mathcal{I}(r+j))$，故 $H^1(\mathcal{I}(r)) = 0$。这就是说，$\dim_k H^1(\mathcal{I}(r))$ 随 r 严格单调下降直到等于 0。由此可见当 $r \geqslant N' + \dim_k H^1(\mathcal{I}(N'-1))$ 时 $H^1(\mathcal{I}(r)) = 0$。注意

$$\begin{aligned} \dim_k H^1(\mathcal{I}(N'-1)) &= \dim_k H^0(\mathcal{I}(N'-1)) - \chi(N'-1) \\ &\leqslant \dim_k H^0(O_X(N'-1)) - \chi(N'-1) \end{aligned} \tag{8}$$

我们可以取一个只与 χ 有关的整数 $N > N'$ 使得 $H^1(\mathcal{I}(N-1)) = 0$，从而 $\mathcal{I}$ 是 N-正则的。证毕。

推论 4. 设 $Y \subset X = \mathbb{P}_k^n$ 为闭子概形，χ 为一个希尔伯特多项式。存在只与 χ 和 χ_{O_Y} 有关的正整数 N，使得任意理想层 $\mathcal{I} \subset O_Y$ 若满足 $\chi_{\mathcal{I}} = \chi$ 则为 N-正则的。

证. 令 $\mathcal{J} \subset O_X$ 为 Y 的理想层，$\mathcal{I}'$ 为 $\mathcal{I}$ 在 O_X 中的原象，则有正合列 $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{I}' \to \mathcal{I} \to 0$，从而 $\chi_{\mathcal{I}'} = \chi + \chi_{\mathcal{J}}$。注意 $\chi_{\mathcal{J}} = \chi_{O_X} - \chi_{O_Y}$，由引理 5 存在只与 χ 和 χ_{O_Y} 有关的正整数 N_1 使得 $\mathcal{I}'$ 是 N_1-正则的，且

存在只与 χ_{O_Y} 有关的正整数 N_2 使得 $\mathcal{J}$ 是 N_2-正则的。由引理 4.ii), 取 $N=\max(N_1,N_2)$ 即可。证毕。

习题

1. 对任意非负整数 n 记 $P_n(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}\in\mathbb{Q}[x]$。设 $P(x_1,...,x_r)\in\mathbb{Q}[x_1,...,x_r]$, 证明 P为整值多项式(即对任意 $m_1,...,m_r\in\mathbb{Z}$ 均有 $P(m_1,...,m_r)\in\mathbb{Z}$) 当且仅当它可以表为形如 $P_{i_1}(x_1)\cdots P_{i_r}(x_r)$ 的多项式的整系数线性组合。

2. 设 $X=\mathbb{P}_k^n$ (k 为域), $Y\subset X$ 为一个 d 次齐次型定义的超曲面。证明 $\chi_{O_X(1)}(x)=\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)}{n!}$, 并给出 $\chi_{O_Y(1)}(x)$ 的公式。

3. 设 $\pi:X\to S$ 为诺特概形的相对射影态射。证明: π 是有限的当且仅当 O_X 是 X 上的丰富可逆层。

第 4 节　除子与相交类

1. 除子与除子族

除子的概念源自黎曼研究紧致黎曼面上的半纯函数的方法, 它可以推广到一般域上的曲线 (见1.5)。除子在高维代数簇中的推广是与可逆层有关的子概形。设 X 为域 k 上的概形, $Y\subset X$ 为闭子概形, 由理想层 $\mathcal{I}_Y\subset O_X$ 定义。若 $\mathcal{I}_Y$ 局部处处由一个非零因子生成 (换言之 $\mathcal{I}_Y$ 是可逆层), 则称 Y 为 X 的一个有效除子。

平面代数曲线是 ($\mathbb{P}_k^2$ 中的) 有效除子的一个例子, 更一般地, 射影空间 $\mathbb{P}_k^n$ 中的超曲面 (即由一个非零齐次多项式定义的闭子概形) 为有效除子。下面是另一种情形。

例 1. 设 $X=\mathrm{Spec}R$ 为仿射概形, 其中 R 为戴德金环, 则 X 的任意真闭子概形都是有效除子, 因为 R 的非零理想作为 R-模都是秩 1 局部自由的。设 $I\subset R$ 为非零理想, 则 $V(I)$ 由有限多个点 $P_1,...,P_n$ 组

成, 且有唯一分解 $I = P_1^{r_1} \cdots P_n^{r_n}$ (参看 [L1, 定理 IV.3.2]), 故除子 $D = V(I)$ 由点集 $\{P_1, ..., P_n\}$ 和 $r_1, ..., r_n$ 唯一决定, 从而可形式地记为 $D = r_1 P_1 + \cdots + r_n P_n$ (这和下面的除子加法的意义是一致的)。注意 $V(I)$ 的函数环为 $R/I \cong (R/P_1^{r_1}) \times \cdots \times (R/P_n^{r_n})$。

设 S 为概形而 $f : X \to S$ 为平坦态射 (看作 S 上的一族概形), 一个闭子概形 $Y \subset X$ 称作一个 S-有效除子, 如果 Y 在 S 上平坦且 Y 的定义理想层 $\mathcal{I}_Y$ 是可逆层。由引理 1.2.vii) 我们有

引理 1. 设 $\pi : X \to S$ 是诺特概形的有限型平坦态射, 闭子集 $Y \subset X$ 的定义理想层为可逆层, 则 Y 为 X 中的 S-有效除子当且仅当任意点 $s \in S$ 上的纤维 Y_s 为 X_s 中的有效除子。

例 1.1 中的直线子丛 $L \subset T \times_k S$ 和例 1.3 中的 $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times S$ 都是 S-有效除子的例子。此外, 对任意 $f : X \to S$, $\mathcal{O}_X$ 本身可以看作自己的理想层, 它定义的闭子集是空集, 但满足 S-有效除子的定义, 称为零除子。若 $D \subset X$ 为 S-有效除子, 其定义理想层为 $\mathcal{I}_D$, 则记 $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{I}_D^{-1}$ (即 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_D, \mathcal{O}_X)$)。

设 $D, D' \subset X$ 为两个 S-有效除子, 其定义理想层分别为 $\mathcal{I}_D, \mathcal{I}_{D'}$, 则由 $\mathcal{I}_D$ 在 X 上平坦及引理 1.2.vii) 可见

$$\mathcal{I}_D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_{D'} \cong \mathcal{I}_D \cdot \mathcal{I}_{D'} \subset \mathcal{O}_X \tag{1}$$

且理想层 $\mathcal{I}_D \cdot \mathcal{I}_{D'}$ 定义一个 S-有效除子, 称为 D 与 D' 的和, 记为 $D + D'$。故有

$$\mathcal{O}_X(D + D') \cong (\mathcal{I}_D \cdot \mathcal{I}_{D'})^{-1} \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') \tag{2}$$

显然 S-有效除子的加法满足交换律和结合律, 故所有 S-有效除子组成一个加法半群, 记为 $\mathrm{Div}_+(X/S)$。而由 (1) 还可见有消去律: 若 D, D_1, D_2 为 S-有效除子使得 $D + D_1 = D + D_2$, 则 $D_1 = D_2$。由此可以将 $\mathrm{Div}_+(X/S)$ 扩充为一个群 $\mathrm{Div}(X/S)$, 即所有形式差 $D - D'$ ($D, D' \subset X$ 为 S-有效除子) 的等价类组成的加法群, 这里两个形式差 $D_1 - D_2$ 和 $D'_1 - D'_2$ 等价当且仅当 $D_1 + D'_2 = D_2 + D'_1$ (由消去律易见这是一个等价关系); 而且可定义除子的加法和减法为 $(D_1 - D_2) + (D'_1 - D'_2) = (D_1 + D'_1) - (D_2 + D'_2)$,

$(D_1 - D_2) - (D_1' - D_2') = (D_1 + D_2') - (D_2 + D_1')$。称 $\mathrm{Div}(X/S)$ 为 X 在 S 上的**相对除子群** (其零元为零除子的等价类), 而 $\mathrm{Div}_+(X/S)$ 可以看作 $\mathrm{Div}(X/S)$ 的一个子半群, 它生成 $\mathrm{Div}(X/S)$。由消去律和 (2) 还可见 $O_X(D_1) \otimes_{O_X} O_X(D_2)^{-1}$ 在同构之下由 $D_1 - D_2$ 唯一决定, 故可记为 $O_X(D_1 - D_2)$。

现在我们再回过头来看一个域 k 上的射影曲线 C 上的有效除子: C 上的所有可逆层的同构类以 $\otimes_{O_C}$ 为乘法组成一个阿贝尔群 (其单位元为 O_C 的同构类), 称为 C 的**皮卡群**, 记为 $\mathrm{Pic}(C)$。由上所述可见 $D \mapsto O_C(D)$ 给出一个群同态 $p : \mathrm{Div}(C/k) \to \mathrm{Pic}(C)$。记 $\mathcal{K}$ 为 C 上的有理函数层 (即对任意非空开子集 $U \subset C$ 有 $\mathcal{K}(U) = k(C)$)。设 $\mathcal{L}$ 为 C 上的可逆层, 记 $L = \Gamma(C, \mathcal{L})$。若 $D \subset C$ 为有效除子使得 $O_C(D) \cong \mathcal{L}$, 则由定义可知 D 由理想层 $\mathcal{I}_D \cong O_C(D)^{-1} \cong \mathcal{L}^{-1}$ 给出, 这等价于一个 O_C-单同态 $\mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{I}_D \hookrightarrow O_C$, 由 $\otimes_{O_C}\mathcal{L}$ 又可见这等价于一个 O_C-单同态 $\phi : O_C \to \mathcal{L}$, 而 ϕ 由 $s = \phi(1) \in L$ 决定; 反之, 任意 $s \neq 0 \in L$ 定义一个单同态 $\phi : O_C \to \mathcal{L}$ 使得 $\phi(1) = s$, 而这又等价于一个 O_C-单同态 $\mathcal{L}^{-1} \hookrightarrow O_C$, 其像为 O_C 的一个理想层, 从而给出一个有效除子 $D \subset C$。由 $\Gamma(C, O_C) \cong k$ 可见任意两个非零截口 $s, s' \in L$ 给出相同的有效除子当且仅当存在 $c \in k^*$ 使得 $s' = cs$, 即它们在 k 上线性相关。记

$$|\mathcal{L}| = \{D \subset C \text{ 有效除子} | O_C(D) \cong \mathcal{L}\} \tag{3}$$

称为 $\mathcal{L}$ 所给出的**线性系**。则上面的讨论给出一个典范的一一对应

$$|\mathcal{L}| \leftrightarrow (L - \{0\})/k^* \cong P(V) \cong P_k^{n-1} \tag{4}$$

其中 $n = \dim_k L$, $V = L^\vee = Hom_k(L, k)$。

从纤维丛的观点可以这样理解: 记 $S = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$。每个截口 $t \in L$ 给出一个 O_C-模层同态 $t\cdot : O_C \to \mathcal{L}$, 它们合起来给出一个 O_C-模层同态

$$O_C^n \cong L \otimes_k O_C \to \mathcal{L} \tag{5}$$

另一方面, 由于 $O_S(1)$ 由 V 生成, 我们有 S 上的局部自由层的满同态

$$O_S^n \cong V \otimes_k O_S \twoheadrightarrow O_S(1) \tag{6}$$

对 (6) 取对偶 (即取 $\mathcal{H}om_{O_S}(\cdot, O_S)$) 得单同态

$$O_S(-1) \hookrightarrow L \otimes_k O_S \cong O_S^n \tag{7}$$

由 (5) 和 (7), 我们得到 $C \times_k S$ 上局部自由层的同态

$$\mathrm{pr}_2^* O_S(-1) \to \mathrm{pr}_2^*(L \otimes_k O_S) \cong L \otimes_k O_{C\times_k S} \cong \mathrm{pr}_1^*(L \otimes_k O_C) \to \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L} \tag{8}$$

再作张量积 $\otimes_{O_S} O_S(1)$, 我们得到 $C \otimes_k S$ 上的一个可逆层同态

$$\phi : O_{C\times_k S} \to \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L} \otimes_{O_S} O_S(1) \tag{9}$$

对任一 k-点 $s \in S$, (9) 在 s 上的纤维可以看作一个 C 上的可逆层同态 $\phi_s : O_C \to \mathcal{L}$, 注意 s 对应于一个 k-线性映射 $V \to k$, 即 L 的一个元 $\tilde{s}$, 易见 $\phi_s(1) = \tilde{s}$。由此可知 (9) 定义了 $C \times_k S$ 中的一个 S-有效除子 D, 它在任一 k-点 $s \in S$ 上的纤维 $D_s \subset C$ 为 $\tilde{s} \in L$ 定义的有效除子, 满足 $O_C(D_s) \cong \mathcal{L}$, 换言之 D_s 是 (4) 中 $\tilde{s}$ 所对应的 $|\mathcal{L}|$ 中的元。总之我们将 (3) 理解为 S 上的一族除子 (即 $C \times_k S$ 的一个 S-除子), 但注意 (4) 的右边为 $S(k)$ (S 的 k-点的集合), 而从概形的观点可考虑任意点 $s \in S$ 所对应的有效除子 (为 $\kappa(s)$-曲线 $C \otimes_k \kappa(s)$ 中的除子)。引理 1 说明 D 在 S 上平坦, 注意 S 是连通的, 由引理 1.2.v) 可见所有纤维 D_s 的次数都相同。若 C 为正则曲线, 不难验证 $\deg(D_s/\kappa(s))$ 等于按 (1.5.1) 定义的 $\deg(D_s)$ (习题 3)。总之有

命题 1. 设 $\mathcal{L}$ 为域 k 上的射影曲线 C 上的可逆层, 则线性系 $|\mathcal{L}|$ 中的所有除子具有相同的次数。此外, 若 C 是正则的, 则一个有效除子 $D \subset C$ 在 k 上的次数等于它作为抽象除子的次数 $\deg(D)$。

我们将这个共同的次数称为 $\mathcal{L}$ 的次数, 记为 $\deg \mathcal{L}$。由命题 1 可见同态 $p : \mathrm{Div}(C/k) \to \mathrm{Pic}(C)$ 是保次数的。

上面的讨论不难推广到一般的概形中的除子。设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为有限型忠实平坦态射, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 满足条件 (参看命题 3.1.iv)):

(∗) $\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{L}$ 是 S 上的有限秩局部自由层, 且对任一点 $s \in S$, 典范同态 $\mathcal{E} \otimes \kappa(s) \to \Gamma(X_s, \mathcal{L}_s)$ 为同构。

则有 O_X-模层的典范同态

$$\pi^*\mathcal{E} \to \mathcal{L} \tag{10}$$

令 $\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{E}, O_S) = \mathcal{E}^\vee$, $T = \mathbb{P}_S(\mathcal{F})$, $\tau : T \to S$ 为投射。由于 $O_T(1)$ 由 $\mathcal{F}$ 生成, 我们有局部自由层的典范满同态

$$\tau^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow O_T(1) \tag{11}$$

对 (11) 取对偶得单同态

$$O_T(-1) \hookrightarrow \tau^*\mathcal{E} \tag{12}$$

由 (10) 和 (12), 我们得到 $X \times_S T$ 上局部自由层的同态

$$\mathrm{pr}_2^* O_T(-1) \to (\pi \times_S \tau)^*\mathcal{E} \cong \mathrm{pr}_1^*(\pi^*\mathcal{E}) \to \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \tag{13}$$

再作张量积 $\otimes_{O_T} O_T(1)$, 我们得到 $X \times_S T$ 上的一个可逆层同态

$$\phi : O_{X\times_S T} \to \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_T} O_T(1) \tag{14}$$

若 π 是紧的, 由引理 1.2.xi) 易见存在一个最大开子概形 $U \subset T$ 使得对任意 $t \in U$, 几何纤维 $\phi_t : O_{X_t} \to \mathcal{L}_t$ 为单射。这给出 $X \times_S U$ 的一个 U-有效除子 D 使得 $O_{X\times_S U}(D) \cong \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_U} O_U(1)$。对任一点 $t \in U$, (14) 在 t 上的纤维给出纤维 X_t 中的一个有效除子 D_t, 满足 $O_{X_t}(D_t) \cong \mathcal{L}_t$, 换言之 D_t 是 (13) 中 t 所对应的 $|\mathcal{L}_t|$ 的元。

我们来说明投射 $U \to S$ 的纤维都非空, 为此不难约化到 $S = \mathrm{Spec}(k)$, k 为代数闭域的情形。取 X 的一个仿射开覆盖 $\{U_i = \mathrm{Spec}(R_i) | 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 使得每个 $\mathcal{L}|_{U_i}$ 由一个元 $s_i \in E = \Gamma(X, \mathcal{L})$ 生成。设 $\mathrm{Ass}_{R_i}(R_i) = \{p_{ij} | i \leqslant j \leqslant m_i\}$。则 R_i 中的零因子的集合为 $\bigcup_{j=1}^{m_i} p_{ij} - \{0\}$ (参看 [Ma, (7.B) Corollary 2] 或 [L1, 推论 V.1.1])。令 $f_{ij} : \mathrm{Spec}(R_i/p_{ij}) \to X$ 为嵌入, 而 $\mathcal{P}_{ij} = \ker(f_{ij}^\# : O_X \to f_{ij*}O_{\mathrm{Spec}(R_i/p_{ij})})$ $(\forall i, j)$。则每个 $E_{ij} = \Gamma(X, \mathcal{P}_{ij} \otimes_{O_X} \mathcal{L})$ 可以看作 E 的 k-线性子空间。对一个截口 $s \in E$, 由上所述可见 $s|_{U_i}$ 为 R_i-零因子或等于 0 当且仅当 $(s/s_i)|_{U_i} \in \bigcup_{j=1}^{m_i} p_{ij}$, 而这等价于 $s \in \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}$。由 $(s_i/s_i)|_{U_i} = 1 \notin \bigcup_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ 可见 $s_i \notin \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}$, 故每个 E_{ij} 为 E 的真线性子空间, 从而 $\mathbb{P}_k(E_{ij}^\vee)$ 是 $\mathbb{P}_k(E^\vee)$ 的真闭子集。由

此可见 $s\cdot : O_X \to \mathcal{L}$ 是单射当且仅当 s 所对应的闭点 $t \in \mathbb{P}_k(E^\vee)$ 不在任一 $\mathbb{P}_k(E_{ij}^\vee)$ 中，换言之 $U = \mathbb{P}_k(E^\vee) - \bigcup_{i,j} \mathbb{P}_k(E_{ij}^\vee)$。

此外，若 π 具有几何整纤维，则 ϕ_t 对任意 $t \in T$ 都是单射，即 $U = T$。总之有

命题 2. 设 S 为诺特概形，$\pi : X \to S$ 为忠实平坦紧态射，$\mathcal{L}$ 为 X 上满足条件 $(*)$ 的可逆层。令 $T = \mathbb{P}_S(\mathcal{E}^\vee)$，则有 $X \times_S T$ 上的一个可逆层同态 (14) 及 S-忠实平坦开子概形 $U \subset T$，使得 (14) 定义 $X \times_S U$ 的一个 U-有效除子 D，且 (14) 在任一点 $t \in T$ 上的纤维给出 X_t 中的有效除子当且仅当 $t \in U$。此外，若 π 具有几何整纤维则 $U = T$。

例 2. 设 $X = \mathbb{P}_k^n$，$A = k[X_0, ..., X_n]$ 为 X 的齐次坐标环，$f \in A$ 为 m 次齐次元，$H \subset X$ 为 f 定义的超曲面，则 H 为 X 中的有效除子。我们可以将 f 看作 $\Gamma(X, O_X(m))$ 中的截口，从而 f 给出同态

$$O_X \xrightarrow{f\cdot} \Gamma(X, O_X(m)) \otimes_K O_X \to O_X(m) \tag{15}$$

将 O_X 的每个局部截口 s 映成 fs。由 (15) 作张量积 $\otimes_{O_X} O_X(-m)$ 得到一个（单）同态 $i_f : O_X(-m) \to O_X$，由上所述 H 的理想层 $\mathcal{I}_H = \mathrm{im}(i_f) \subset O_X$，故 $\mathcal{I}_H \cong O_X(-m)$，从而 $O_X(H) \cong O_X(m)$。总之，对于 $\mathcal{L} = O_X(m)$，线性系 $|\mathcal{L}|$ 由 X 中的所有 m 次超曲面组成。

反之，由于 A 是唯一因子分解整环，其任意高度为 1 的齐次理想都是由 1 个齐次元生成，所以 X 中的有效除子 D 都满足 $O_X(D) \cong O_X(m)$（对某个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$）。对任意可逆层 $\mathcal{L}$，取充分大的 $m' \in \mathbb{Z}_{>0}$ 则有有效除子 D' 使得 $O_X(D') \cong \mathcal{L}(m')$，从而有 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\mathcal{L}(m') \cong O_X(m)$。由此可见 X 上的任一可逆层同构于某个 $O_X(m)$ $(m \in \mathbb{Z})$。

设 $Y \subset X$ 为射影代数簇，则嵌入 $i : Y \to X$ 给出同态 $i^* : \Gamma(X, O_X(m)) \to \Gamma(Y, O_Y(m))$。由引理 1.2.vii) 可知，对任意 $f \in \Gamma(X, O_X(m))$，若 $i^*(f) \neq 0$，则它定义 Y 的一个有效除子 H'，满足 $O_Y(H') \cong O_Y(m)$。作为一个集合 H' 是 f 在 Y 上的零点集，即 $H \cap Y$。用概形的语言可表达为 $H' = H \times_X Y$。注意 $i^*(f) \neq 0$ 当且仅当 $Y \not\subset H$，此时若 $\dim(Y) > 0$ 则 H' 是 Y 的非零有效除子。

对 X 上的任一可逆层 $\mathcal{L}$，记

$|\mathcal{L}/S| = \{S$-有效除子 $D \subset X|$存在 S 上的可逆层 $\mathcal{F}$ 使得 $O_X(D) \cong \mathcal{L} \otimes_{O_X} \pi^*\mathcal{F}\}$

为方便起见, 对任意态射 $\phi : S' \to S$, 我们简记 $X \times_S S'$ 中的 S'-有效除子集 $|(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{L}/S'|$ 为 $|\mathcal{L}/S'|$。

所有 X 上的可逆层的同构类以张量积 $\otimes_{O_X}$ 为乘法组成一个阿贝尔群 $\mathrm{Pic}(X)$, 称为 X 的皮卡群。对任意态射 $\phi : X \to Y$, 易见 ϕ^* 诱导群同态 $\phi^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$。我们记

$$\mathrm{Pic}(X/S) = \mathrm{Pic}(X)/\pi^*\mathrm{Pic}(S) = \mathrm{coker}(\pi^*) \tag{16}$$

称为 X 在 S 上的*相对皮卡群*。对 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 记 $\overline{\mathcal{L}}$ 为其在 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 中的像。令 $\Phi_0 : \mathrm{Div}_+(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ 为映射 $D \mapsto \overline{O_X(D)}$, 则 (2) 说明 $\Phi_0(D) + \Phi_0(D') = \Phi_0(D + D')$, 由此可将 Φ_0 扩张成一个群同态

$$\Phi : \mathrm{Div}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S) \tag{17}$$

将除子 $D - D'$ 映到 $\overline{O_X(D) \otimes_{O_X} O_X(D')^{-1}}$。注意对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$,

$$\Phi_0^{-1}(\overline{\mathcal{L}}) = \{D \in \mathrm{Div}_+(X/S) | \overline{O_X(D)} = \overline{\mathcal{L}}\} = |\mathcal{L}/S| \tag{18}$$

总之有

命题 3. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为有限型忠实平坦态射, 则 X 的所有 S-除子组成一个加法群 $\mathrm{Div}(X/S)$ (即 X 在 S 上的相对除子群), 其零元为零除子, 其中所有 S-有效除子组成一个子半群 $\mathrm{Div}_+(X/S)$, 它生成 $\mathrm{Div}(X/S)$。而 $D \mapsto O_X(D)$ 定义一个典范群同态 (17), 它在 $\mathrm{Div}_+(X/S)$ 上的限制 Φ_0 满足 (18)。

例 3. 在例 1 的情形, X 的一个除子可以理解为 R 的一个分式理想 $\prod\limits_i P_i^{r_i}$, 其中 $P_i \subset R$ 为非零素理想而 $r_i \in \mathbb{Z}$ (参看 [L1, 习题 Ⅳ.3]), 而它是有效除子当且仅当所有 $r_i \geqslant 0$, 换言之 X 的有效除子就是 R 的非零理想。

对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ (等价于 R 上的秩 1 局部自由模), 存在有效除子 $D \subset X$ 使得 $O_X(D) \cong \mathcal{L}$, 而 X 的皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$ 可以理解为秩 1 局部自由 R-模的同构类按张量积组成的群。由于任一秩 1 局部自由

R-模可以嵌入 R 作为一个理想, 所以 $\mathrm{Pic}(X)$ 同构于 R 的理想类群 (两个非零理想 $I, J \subset R$ 属于同一类当且仅当存在 $a \in \mathrm{q.f.}(R)$ 使得 $J = aI$)。

例如当 R 为 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Q}$ 的一个有限扩域中的整闭包时, $\mathrm{Pic}(X)$ 为有限群, 它的阶称为 X (或 R) 的"类数"。

设 $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射且具有几何连通约化纤维。设 $\tau : T' = \mathrm{Spec}(R) \to S$ 为 S-概形, 其中 R 为局部环, 而 $D' \subset X \times_S T'$ 为 T'-有效除子, 满足

$$O_{X \times_S T'}(D') \cong \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L} \tag{19}$$

注意 $O_{X \times_S T'}(D')^{-1} \cong \mathcal{I}_{D'} \hookrightarrow O_{X \times_S T'}$ 等价于一个 $O_{X \times_S T'}$-模层同态

$$\phi' : O_{X \times_S T'} \to O_{X \times_S T'}(D') \tag{20}$$

其在 T' 上的纤维都是单射。由推论 3.1 可见 ϕ' 诱导 $O_{T'}$-模层同态 $\mathrm{pr}_{2*}\phi' : O_{T'} \to \tau^* \mathcal{E}$, 其纤维都是单射。这等价于一个满同态

$$\tau^* \mathcal{E}^\vee \to O_{T'} \tag{21}$$

它给出一个 S-态射 $\eta : T' \to T$。和上面一样取对偶并与 $\mathrm{pr}_1^*(\pi^* \mathcal{E}) \to \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L}$ 合成可得 $X \times_S T'$ 上的一个可逆层同态 $O_{X \times_S T'} \to \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L}$, 易见它就是 ϕ', 而它与 η 相容, 故 ϕ' 为 (14) 在 η 下的拉回。注意 D' 在 T' 上的纤维都是除子, 可见 η 经过命题 2 中的开子概形 $U \subset T$, 从而有

$$D' = D \times_U T' \subset X \times_S T' \tag{22}$$

注意 η 由 ϕ' 决定。

若将 T' 换为一般的 S-概形, 则对 T' 的任意局部子概形 V, 上面的讨论给出唯一的 S-态射 $\eta_V : V \to T$, 由唯一性可知它们是相容的, 故所有 η_V 合起来给出一个 S-态射 $\eta : T' \to T$ 使得 (22) 成立。总之我们有

定理 1. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何连通约化纤维。设 $\mathcal{L}$ 为 X 上满足 $(*)$ 的可逆层, 令 $T = \mathbb{P}_S(\mathcal{E}^\vee)$, 开子概形 $U \subset T$ 与 U-有效除子 $D \subset X \times_S U$ 如命题 2, 则对任意诺特 S-概形 T' 有典范一一对应

$$|\mathcal{L}/T'| \leftrightarrow \{S\text{-态射 } T' \to U\}$$

其中一个 S-态射 $\eta : T' \to U$ 所对应的 T'-有效除子为 $\mathrm{id}_X \times_S \eta : X \times_S T' \to X \times_S U$ 和 $D \hookrightarrow X \times_S U$ 的拉回; 而一个 T'-有效除子 $D' \in |\mathcal{L}/T'|$ 所对应的 S-态射 $T' \to U$ 由 (21) 诱导。此外, 若 π 具有几何整纤维则 $U = T$。

用预层的语言 (见 1.4) 说, $|\mathcal{L}/S|$ 由 U 代表, 实际上是由 U 和 U-有效除子 $D \subset X \times_S U$ 组成的对 (U, D) 代表, 故称 D 为"泛除子"。

例 4. 设 $X = \mathbb{P}_k^n$, $\mathcal{L} = O_X(d)$, 则由例 2 可见 $\Gamma(X, \mathcal{L}) \cong k^{\oplus r}$, 其中 $r = \binom{n+d}{d}$, 由此易见 $T = U \cong \mathbb{P}_k^{r-1}$, 在 $X \times_k T$ 中有泛除子 D 代表 $|\mathcal{L}|$。

实际上很容易写出泛除子 D 的方程, 例如对 $n = 2, d = 2$ 的情形 (即平面二次曲线组成的空间), 有 $r = 6$, 令 X_0, X_1, X_2 为 X 的齐次坐标, 则可取 $\Gamma(X, \mathcal{L})$ 的基为 X_0, X_1, X_2 的所有二次单项式 $X_0^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1^2, X_1X_2, X_2^2$, 而令 $T \cong \mathbb{P}_k^5$ 的相应齐次坐标为 $Y_0, ..., Y_5$, 这样泛除子 $D \subset X \times_k T$ 就由下列方程给出:

$$Y_0X_0^2 + Y_1X_0X_1 + Y_2X_0X_2 + Y_3X_1^2 + Y_4X_1X_2 + Y_5X_2^2 = 0 \qquad (23)$$

它可以理解为带参数 $(Y_0 : \cdots : Y_5)$ 的一族平面曲线。

引理 2. 设 S 为整的有限型 $\mathbb{Z}$-概形, 维数为 1, 则 S 的正规化也是有限型 $\mathbb{Z}$-概形。

证. 问题是局部的, 故不妨设 $S = \mathrm{Spec}(R)$, 其中 R 为有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数, 且为 1 维整环。令 $K = \mathrm{q.f.}(R)$, $\tilde{R} \subset K$ 为 R 的整闭包。若 $\mathbb{Z} \to R$ 不是单射, 则有素数 p 使得 R 为有限生成的 $\mathbb{F}_p$-代数, 从而 $\tilde{R}$ 作为 R-模是有限生成的 (参看 [L1, 定理 IV.2.1])。以下设 $\mathbb{Z} \to R$ 是单射。

记 $R' = R \otimes \mathbb{Q}$, 由诺特正规化引理 (参看 [L1, 引理 IV.1.1]) 可取在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关的元 $x_1, ..., x_r \in R'$ 使得 R' 在 $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_r]$ 上是整的。由于 R 在 $\mathbb{Z}$ 上是有限生成的, 可取 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $x_1, ..., x_r \in R[\frac{1}{n}]$ 且 $R[\frac{1}{n}]$ 在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}, x_1, ..., x_r]$ 上是整的, 从而 $\dim(R[\frac{1}{n}]) = r + 1$ (参看 [L1, 推论 X.3.1])。但由所设有 $\dim(R[\frac{1}{n}]) \leqslant 1$, 故必有 $r = 0$, 从而 R' 在 $\mathbb{Q}$ 上是有限的; 再由 R 是整环可见 R' 是域, 故 $R' = K$ 且 $[K : \mathbb{Q}] < \infty$。因此可取 n 使得

$R[\frac{1}{n}]$ 作为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-模是有限生成的且 $\Omega^1_{R[\frac{1}{n}]/\mathbb{Z}} = 0$, 这样 $R[\frac{1}{n}]$ 是正则的 (参看 [L1, 定理 XV.2.2.iii)]), 从而有

$$R\left[\frac{1}{n}\right] \cong \tilde{R}\left[\frac{1}{n}\right] \tag{24}$$

令 $A \subset K$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包, 则 A 作为 $\mathbb{Z}$-模是有限生成的 (参看 [L1, 定理 IV.2.1])。由上所述可知态射 $f : \mathrm{Spec}(\tilde{R}) \to \mathrm{Spec}(A)$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}])$ 上是同构。设 $P \subset \tilde{R}$ 为非零素理想而 $p = f(P)$, 则 p 是 A 的极大理想, 且有 $A_p \subset \tilde{R}_P \subset K$, 但 A_p 是离散赋值环, 故 $A_p = \tilde{R}_P \subset K$, 再由 (24) 即可见 f 给出 $\mathrm{Spec}(\tilde{R})$ 到 $\mathrm{Spec}(A)$ 的一个非空开子概形 U 的同构。设 $\mathrm{Spec}(A) - U = \{p_1, ..., p_r\}$, 由中国剩余定理 (参看 [L1, 定理 IV.3.1]) 可取 $a_i \in \tilde{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 使得 $v_{p_i}(a_i) = -1$ 而对任意非零素理想 $p \in \mathrm{Spec}(A) - \{p_i\}$ 有 $v_p(a_i) \geqslant 0$。令 $a = a_1 + \cdots + a_r$, 则易见 $U \cong \mathrm{Spec}(A[a])$, 从而有 $\tilde{R} \cong A[a]$。证毕。

引理 3. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为有限型平坦态射, $D \subset X$ 为 S-平坦闭子概形。若点 $s \in S$ 使得 D_s 是 X_s 中的除子, 则存在 X_s 的开邻域 $U \subset X$ 使得 $D \cap U \subset U$ 为 S-有效除子。若 π 是紧的, 则还可取 s 的开邻域 $V \subset S$ 使得 $D \times_S V \subset X \times_S V$ 为 V-有效除子。

证. 先证第一个断言, 问题是局部的, 不妨设 $X = \mathrm{Spec}A$, $S = \mathrm{Spec}R$, s 对应于素理想 $p \subset R$, 而 D 的定义理想为 $I \subset A$。设 $x \in X$ 为闭点使得 $\pi(x) = s$, 则由所设 IA_x 在 A_x/pA_x 中的像 $\overline{IA_x}$ 是由一个元素生成的, 故可取 $a \in IA_x$ 使得 $\overline{aA_x} = \overline{IA_x}$, 而 a 不是 A_x 的零因子。故 a 在 x 的一个开邻域 $U \subset X$ 中定义一个 S-有效除子 D', 而 $D \cap U \subset D'$。

我们来说明 $IA_x = aA_x$。注意 $D \subset D'$ 局部由 $J = I/(a) \subset A/(a)$ 定义, 而 $JA_x \cong IA_x/aA_x \to (A_x/aA_x) \otimes_R (R/p)$ 为零同态。由于 A_x/IA_x 在 R 上平坦, 由正合列 $0 \to J \to A/(a) \to A/I \to 0$ 可见 $JA_x \otimes_R (R/p) \to (A_x/aA_x) \otimes_R (R/p)$ 是单射, 故有 $JA_x \otimes_R (R/p) = 0$, 从而由中山正引理有 $JA_x = 0$, 即 $IA_x = aA_x$。

因此可取 U 使得 $D' = D \cap U$。由 x 的任意性, 可取开子概形 $U \subset X$ 使得 $X_s \subset U$ 且 $U \cap D$ 为 S-有效除子。

若 π 是紧的, 则 $V = S - \pi(X - U)$ 为 s 的开邻域, 而 $\pi^{-1}(V) \subset U$, 故 $D \times_S V \subset X \times_S V$ 为 V-有效除子。证毕。

命题 4. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为有限型光滑满态射, $D \subset X$ 为 S-平坦闭子概形。若存在稠密开子概形 $U \subset S$ 使得 $D \times_S U \subset X \times_S U$ 为 U-有效除子, 则 $D \subset X$ 为 S-有效除子。特别地, 若 X 是连通的且 π 是紧的, 只要有一点 $s \in S$ 使得 D_s 是 X_s 中的除子, 就可保证 $D \subset X$ 是 S-有效除子。

证. 先证第一个断言, 问题是局部的。由引理 1 只需证明每一点 $s \in S$ 上的纤维 D_s 是 X_s 中的除子。

情形 1: S 是正则的。为方便起见不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$。设 $x \in X$, $s = \pi(x)$ 对应于素理想 $p \subset R$, 则 $A = O_{X,x}$ 为正则局部环, 因而是 UFD (参看 [Ma, Theorem 48] 或 [L1, 定理 XV.2.3])。令 $I \subset A$ 为 D 的定义理想层在 x 的茎, a 为 I 中元素的最大公因子, 则 $a \notin pA$, 因为 $I \not\subset pA$。故存在 x 的一个开邻域 $U' \subset X$ 使得 (a) 在 U' 中定义一个在 S 上平坦的除子 D_1 且 $J = (I : a)$ 在 U' 中定义一个闭子概形 D_2。由正合列

$$0 \to J \to A \xrightarrow{a \cdot} A/I \to A/(a) \to 0 \tag{25}$$

可见 A/J 为 R-平坦的, 即 D_2 为 S-平坦的。由所设易见 $D_2 \times_S U$ 为 $U' \times_S U$ 的除子, 故 D_2 在 U 上的非空纤维的维数等于 π 的相对维数减 1; 另一方面, D_2 在 $\pi(x)$ 上的纤维维数小于 π 的相对维数减 1。由引理 1.2.viii) 可见只能有 $D_2 = \emptyset$, 即 $I = (a)$。故 D_s 是 X_s 中的除子。

情形 2: S 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型概形。仍不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$。注意 π 将闭点映到闭点 (习题 2), 故由上所述只需证明对任意闭点 $s \in S$, 纤维 D_s 是 X_s 中的除子。设 $K = \kappa(s)$ ($= R_p/pR_p$, 其中 $p \subset R$ 为 s 所对应的极大理想)。我们可取包含 s 的 1 维整子概形 $V \subset S$ 使得 $V \cap U \neq \emptyset$ (习题 1)。令 V' 为 V 的正规化, 则由引理 2 可见 V' 是正则的。由情形 1 可见 $D \times_S V'$ 是 $X \times_S V'$ 中的除子。故存在有限域扩张 $K' \supset K$ 使得 $D_s \otimes_K K'$ 是 $X_s \otimes_K K'$ 中的除子。因此 $D_s \subset X_s$ 的理想层是忠实平坦 O_{X_s}-模, 即 D_s 是 X_s 中的除子。

情形 3: 一般情形。不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$, 其中 A 为有限生成的 R-代数。取一个多项式代数 $B = R[x_1, ..., x_n]$ 使得存在 R-代数满同态 $B \to A$, 再取有限生成的自由 B-模 M, N 使得存在 B-模正

合列

$$M \to N \to B \to A \to 0 \tag{26}$$

我们可取有限生成的 $\mathbb{Z}$-子代数 $R_0 \subset R$ 使得 (26) 定义在 R_0 上，即存在 $B_0 = R_0[x_1, ..., x_n]$ 上的有限生成的自由模 M_0, N_0 使得存在 B_0-模正合列

$$M_0 \to N_0 \to B_0 \to A_0 \to 0 \tag{27}$$

且 (27) $\otimes_{R_0} R$ 给出 (26)。令 $U_0 \subset S_0 = \mathrm{Spec} R_0$ 为最大开子集使得 $X_0 = \mathrm{Spec} A_0$ 在 U_0 上的限制为 S_0-平坦的。我们来验证 $S \to S_0$ 经过 U_0。对任一点 $p \in S$，令 $p_0 = p \cap R_0$，$R_{p0} = (R_0)_{p_0}$，由 (27) 有 $0 = Tor_1^R(R_p/pR_p, A) \cong Tor_1^{R_0}(R_p/pR_p, A_0)$，但 R_p/pR_p 是自由 (R_{p0}/p_0R_{p0})-模，故 $Tor_1^{R_0}(R_{p0}/p_0R_{p0}, A_0) = 0$，因此 $(A_0)_{p_0}$ 在 R_0 上平坦，即 $p_0 \in U_0$ (参看 [M, Theorem 49] 或 [L1, 命题 XIII.5.1])。通过进一步收缩 S 不妨设 $U_0 = S_0$。为简单起见不妨设 S_0 是连通的。用和上面同样的方法，我们可取有限生成的 R_0-子代数 $R_1 \subset R$ 使得 $A_1 = A_0 \otimes_{R_0} R_1$ 在 R_1 上光滑，即 $\Omega^1_{A_1/R_1}$为局部自由秩 $d = \dim(A_0) - \dim(R_0)$(注意 $\Omega^1_{A/R} \cong \Omega^1_{A_1/R_1} \otimes_{R_1} R$)。设 $I \subset A$ 为 D 的定义理想，再用上面的方法 (必要时再收缩 S) 可得有限生成的 R_1-子代数 $R_2 \subset R$ 及理想 $I_2 \subset A_2 = A_1 \otimes_{R_1} R_2$ 使得 A_2/I_2 为 R_2-平坦且 $I = I_2 \otimes_{R_2} R \subset A$。对任意 $a \in R$ 使得 $\mathrm{Spec} R_a \subset U$，$I_a$ 在 A 上平坦，我们可进一步假设 $a \in R_2$ 且 $(I_2)_a$ 在 A_2 上平坦，即 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2)_a \subset \mathrm{Spec}(A_2)_a$ 是 $\mathrm{Spec}(R_2)_a$ 上的除子。注意 $S_2 = \mathrm{Spec} R_2$ 的每个一般点都在 $S \to S_2$ 的象中，故所有 $\mathrm{Spec}(R_2)_a$ 给出一个稠密开子概形 $U_2 \subset S_2$，在其上 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2) \subset \mathrm{Spec} A_2$ 为除子。由于 R_2 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数，由情形 2 可见 $\mathrm{Spec}(A_2/I_2) \subset \mathrm{Spec} A_2$ 是 S_2-有效除子，从而 $D \subset X$ 是 S-有效除子。

现在来证第二个断言。由于 π 是紧的，由引理 3 可知若一点 $s \in S$ 使得 D_s 是 X_s 中的除子，则有 s 的一个开邻域 $V \subset S$ 使得 $D \times_S V \subset X \times_S V$ 为 V-有效除子。故 S 的子集 $S' = \{s \in S | D_s \subset X_s$ 为除子$\}$ 为开集。由第一个断言可见 S' 等于其在 S 中的闭包，而由 X 连通可见 S 连通，故 $S' = S$，即 $D \subset X$ 是 S-有效除子。证毕。

2. 相交类

设 k 为代数闭域, C_1, C_2 为 $X = \mathbb{P}_k^2$ 中的两条 (不同的) 代数曲线 (即 1 维闭子簇), 次数分别是 d_1, d_2 (即分别由 d_1, d_2 次齐次方程定义)。若 C_1, C_2 在它们的任一交点都不相切, 则 $C_1 \cap C_2$ 有 $d_1 d_2$ 个点 (见下文)。若 C_1, C_2 在某一点 P 相切, 我们需要引入"相交重数"的概念以使上述结果仍成立。

注意 $C_1 \times_X C_2$ 作为一个集合是 $C_1 \cap C_2$。它在 k 上是有限的, 设它的函数环为 A, 则 A 为有限秩 k-代数 (为阿廷环)。由于 $C_1 \cap C_2$ 是有限集, 可取一条直线 L 使得 $C_1 \cap C_2 \cap L = \emptyset$, 即 $C_1 \cap C_2 \subset U = X - L$。注意 U 是仿射的, 设 R 为 U 的函数环, 则 $A \cong (R/Q_1) \times \cdots \times (R/Q_n)$, 其中 $Q_1, ..., Q_n$ 为 R 中高度为 2 的准素理想, 对应于 $C_1 \cap C_2$ 的所有点 $P_1, ..., P_n$。记 $r_i = l_R(R/Q_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 称为 C_1 和 C_2 在交点 P_i 处的**相交重数**, 易见 $r_i = \dim_k A_{P_i} = l_A(A_{P_i})$, 而 $C_1 \times_X C_2$ 在 k 上的次数为 $\dim_k A = r_1 + \cdots + r_n$。

更一般地, 设 X 为 k 上的拟射影代数簇, $Y_1, Y_2 \subset X$ 为闭子集使得 $\dim(Y_1 \times_X Y_2) = 0$。令 A 为 $Y_1 \times_X Y_2$ 的函数环, 则 $\dim_k A < \infty$。对任一点 $P \in Y_1 \cap Y_2$, 我们定义 Y_1, Y_2 在 P 点的**相交重数**为 $l_A(A_P) = \dim_k A_P$, 记为 $i(Y_1, Y_2, P)$。由阿廷环的结构 (参看 [L1, Ⅲ.2]) 有 $A \cong \prod_{P \in Y_1 \cap Y_2} R_P$, 故有

$$\dim_k A = \sum_{P \in Y_1 \cap Y_2} i(Y_1, Y_2, P) \tag{1}$$

注 1. 相交重数的定义与一元函数零点重数的定义是一致的。例如设多项式 $f(x)$ 的最低次项为 x^n, 则 0 为 $f(x)$ 的 n 重零点, 而这个零点可以理解为两条平面曲线 $y = f(x)$ 和 $y = 0$ 的交点, 由定义易见点 $(0, 0)$ 是这两条曲线的 n 重交点。

命题 5 (Bézout 定理). 设(紧)曲线 $C_1 \neq C_2 \subset \mathbb{P}_k^2$ 的次数分别为 d_1, d_2, 则

$$\sum_{P \in C_1 \cap C_2} i(C_1, C_2, P) = d_1 d_2 \tag{2}$$

证. 记 $X = \mathbb{P}_k^2$, 注意 C_1, C_2 可以看作 X 的有效除子且 $\dim(C_1 \cap C_2) = 0$,

由上所述可见 (2) 式左边等于 $C_1 \times_X C_2$ 在 k 上的次数。

由例 4 我们知道有射影空间 Y_1, Y_2 及泛除子 $\mathcal{C}_1 \subset X \times_k Y_1$, $\mathcal{C}_2 \subset X \times_k Y_2$ (可看作曲线族), 分别代表 $|O_X(d_1)|$ 和 $|O_X(d_2)|$。则 C_1, C_2 分别对应于两个点 $y_1 \in Y_1$ 和 $y_2 \in Y_2$。令 $Y = Y_1 \times_k Y_2$, 则在 $X \times_k Y$ 中有两个 Y-有效除子 $\mathcal{C}_1' = \mathcal{C}_1 \times_k Y_2$ 和 $\mathcal{C}_2' = \mathcal{C}_2 \times_k Y_1$ (可以理解为 X 中除子对 (D_1, D_2) 的一个族)。令 $\mathcal{D} = \mathcal{C}_1' \times_{X \times_k Y} \mathcal{C}_2'$, 则 $\mathcal{D}$ 在点 $(y_1, y_2) \in Y_1 \times_k Y_2 = Y$ 上的纤维为 $C_1 \times_X C_2$。

注意对任意两个有效除子 $D_1, D_2 \subset X$, $D_1 \cap D_2$ 的维数为 0 当且仅当 D_1 的定义多项式在 D_2 上不是零因子, 而这又等价于 $D_1 \cap D_2$ 是 D_1 中的有效除子。故由定理 1 可见存在一个最大开子集 $T \subset Y$ 使得 $D_1 \cap D_2$ 为有限集当且仅当 (D_1, D_2) 对应于 T 中的点, 且 $\mathcal{D} \times_Y T$ 在 T 上平坦。由射影性可知 $\mathcal{D} \times_Y T$ 在 T 上有限, 故由例 1.8 可见 $\mathcal{D} \times_Y T$ 在 T 上的所有纤维有相同的次数。特别地, 若取 D_1 为 d_1 条直线的并而 D_2 为 d_2 条直线的并, 且这 $d_1 + d_2$ 条直线没有三条共点, 则 $D_1 \cap D_2$ 的点数 (即 $D_1 \times_X D_2$ 的次数) 显然为 $d_1 d_2$, 故 $C_1 \times_X C_2$ 在 k 上的次数也等于 $d_1 d_2$, 即 (2) 式成立。证毕。

注 2. Bézout 定理有一个代数的证明, 方法是利用希尔伯特多项式直接计算, 不需要很强的工具 (参看例如 [H, I.7])。上述证明则是几何的, 需要用到纤维从的概念, 但想法很直观: 由于相交次数只与两条曲线的次数有关, 只需选两条容易计算的曲线来算一下即可。

注 3. 在 Bézout 定理的叙述中, "曲线" C_1 和 C_2 不必是约化的或不可约的, 只要是 $\mathbb{P}_k^2$ 的除子即可 (但 $C_1 \cap C_2$ 须为有限集)。例如它们可以是齐次多项式 X_2^2 或 $X_0 X_1$ 定义的子概形, 这可以理解为 "退化的曲线"。

Bézout 定理不难推广到 n 维射影空间的 n 个除子的交:

命题 6. 设超曲面 $H_1, ..., H_n \subset \mathbb{P}_k^n$ 的次数分别为 $d_1, ..., d_n$, 它们的交是 0 维的 (此时我们称它们的交为*完全交*), 则 $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ 的交点个数 (计及重数) 等于 $d_1 \cdots d_n$。

证明从略, 因为它是下面定理 2 的特殊情形。

注 4. 如果不假定 k 是代数闭域, 命题 6 的断言要作如下修改: 设超曲面 $H_1, ..., H_n \subset \mathbb{P}_k^n$ 的次数分别为 $d_1, ..., d_n$, 它们的交是 0 维的。令概形

$$Y = H_1 \cap \cdots \cap H_n = H_1 \times_X H_2 \times_X \cdots \times_X H_n \tag{3}$$

对每个点 $x \in Y$, 记 $l_Y(x) = l(O_{Y,x})$ (注意 $O_{Y,x}$ 是阿廷局部环)。则有

$$\sum_{x \in Y} l_Y(x)[\kappa(x) : k] = d_1 \cdots d_n \tag{4}$$

(参看 (1.5.1))。

下面考虑一般情形。设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对维数为 n 的平坦相对射影态射。一列 S-有效除子 $D_1, ..., D_n \subset X$ 称为 *S-截断的*, 如果 $D_1 \cap D_2$ 为 D_1 的 S-有效除子, $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ 为 $D_1 \cap D_2$ 的 S-有效除子 ..., 等等。此时由引理 1.2.vii) 可见 $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$ 为有限平坦 S-概形。截断的情形是经常发生的, 如当 $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$ 在 S 上有限时, $D_1, ..., D_n$ 为 S-截断有效除子列的一个充分条件是 π 具有 C.M. 纤维 (即每个纤维 X_s 的每一点 x 的局部环 $O_{X_s,x}$ 为 C.M. 环, 关于 C.M. 环可参看 [L1, XIV.2], 特别地若 π 光滑则 π 具有 C.M. 纤维)。

一般地, 若 S 为连通诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对维数为 n 的平坦态射, $D_1, ..., D_n \subset X$ 为 S-有效除子使得 $D = D_1 \cap ... \cap D_n$ 在 S 上有限且忠实平坦, 则称 $\deg(D/S)$ 为 $D_1, ..., D_n$ 在 S 上的*相交数*, 记为 $[D_1 \cdots D_n]_S$ (在没有疑问时可以略去下标 S)。

引理 4. 设 X 为一个域 k 上的有限型概形, 则存在稠密开子概形 $U \subset X$ 使得 U 为 C.M. 概形 (即对任意 $x \in U$, $O_{X,x}$ 是 C.M. 环)。

证. 由 C.M. 的判别准则 (见 [Ma, Theorem 26] 或 [L1, 引理 XIV.1.1]) 不难化为 k 是代数闭域的情形, 且不妨设 X 是不可约的和仿射的, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\dim(X) = n$。

记 $A' = A/\sqrt{(0)}$, $X' = \operatorname{Spec}(A')$, $p \in X'$ 为一般点。令 $Y = X \times_k X'$, 通过 pr_2 视为 X'-概形, 并记 $B = B_0 = A \otimes_k A'$, $I = \ker(\Delta^* : A \otimes_k A \to A)B_0$。可取 $a_1 \in B$ 使得它不含于极小素理想中, 且 B_{0a_1} 没有嵌入的素理想。注意 $\mathrm{ht}(IB_{0a_1}) = n$, 若 $n > 0$ 则可取 $b_1 \in I$ 为 B_{0a_1} 的非零因

子, 这样 b_1 在 B_{0p} 中非零因子, 从而可取 $c_1 \in (a_1)$ 不含于的极小素理想中使得 $B_1 = B_{0c_1}/b_1B_{0c_1}$ 在 A' 上平坦 (引理 1.2)。若 $n > 1$, 则可再取 $c_2 \in (c_1)$ 使得它在 B_1 中的像不含于任一极小素理想中, B_{1c_2} 没有嵌入的素理想, 并取 $b_2 \in I$ 使得 $B_2 = B_{1c_2}/b_2B_{1c_2}$ 在 A' 上平坦, 等等。这样归纳地可取 $c_i \in B$, $b_i \in I$ 及 $B_i = B_{(i-1)c_i}/b_iB_{(i-1)c_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得 b_i 在 $B_{(i-1)c_i}$ 中非零因子, 且 B_i 在 A' 上平坦 $(\forall i)$。

令 $U = \mathrm{pr}_2(\mathrm{Spec}(B_n))$, 则 U 为 X' 中的开集 (引理 1.2.ix)), 视为 X 中的开集。对任意闭点 $q \in U$, 易见在 $B/(1 \otimes_k q)B = B \otimes_{A'} (A'/qA') \cong A$ 中, I 的像为 $I \cdot A \cong B/(I + (1 \otimes_k q)B) = q$, 而 $b_1, ..., b_n$ 在 q 中的像为一个正则列 (引理 1.2)。这说明 U 为 C.M. 概形。证毕。

推论 1. 设 X 为诺特概形 S 上的平坦有限型概形, 则存在开子概形 $U \subset X$ 使得 $U \to S$ 具有 C.M. 纤维, 且对任意点 $s \in S$, $U \cap X_s$ 在 X_s 中稠密 (故 U 在 X 中稠密)。

证. 设 $s \in S$ 为闭点而 $x \in X_s$ 为 X_s 的 C.M. 点, 令 $n = \dim(O_{X_s,x})$。由引理 4 的讨论可见存在 x 的开邻域 $\mathrm{Spec}(A) \subset X$, 使得对任意卧于 s 上的极大理想 $P \subset A$, 存在正则列 $a_1, ..., a_n \in A$ 使得每个 $\mathrm{Spec}(A/(a_1, ..., a_i)A)$ 在 S 上平坦。这样对于任意包含 $a_1, ..., a_n$ 的极大理想 $Q \subset A$, $a_1, ..., a_n$ 都是 A_Q 的正则列。再由引理 4 的讨论即可见存在一个包含 $\mathrm{Spec}(A) \cap X_s$ 的开子概形 $U' \subset X$, 使得 $U' \to S$ 具有 C.M. 纤维。证毕。

引理 5. 设 S 为连通诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对维数为 n 的有限型忠实平坦态射, $D_1, ..., D_n \subset X$ 为一列 S-截断的 S-有效除子, 其中 D_i 为两个 S-有效除子 $D, D' \subset X$ 的和。则 S-有效除子列 $D_1, ..., D_{i-1}, D, D_{i+1}, ..., D_n$ 和 $D_1, ..., D_{i-1}, D', D_{i+1}, ..., D_n$ 也是 S-截断的, 且

$$[D_1 \cdots D_n]_S = [D_1 \cdots D_{i-1} D D_{i+1} \cdots D_n]_S + [D_1 \cdots D_{i-1} D' D_{i+1} \cdots D_n]_S \tag{5}$$

简言之, 相交数是 S-截断的 S-有效除子列的加性函数。此外, 若 σ 是 $\{1, ..., n\}$ 的一个置换而 $D_{\sigma(1)}, ..., D_{\sigma(n)}$ 也是 S-截断的, 则

$$[D_{\sigma(1)} \cdots D_{\sigma(n)}]_S = [D_1 \cdots D_n]_S \tag{6}$$

换言之, 只要保持 S-截断性, S-有效除子列的相交数与除子的次序无关。

证． 由引理 1, 我们只需考虑 $S = \operatorname{Spec} k$ (k 为域) 的情形即可。设 $x \in D_1 \cap \ldots \cap D_n$, $R = O_{X,x}$, m 为 R 的极大理想, 则 $D_1, \ldots, D_n$ 分别给出 R 中由一个非零因子生成的理想, 不妨设为 $(a_1), \ldots, (a_n)$。由所设 $a_1, \ldots, a_n$ 为 m-正则列且 $\dim(R/(a_1, \ldots, a_n)) = 0$, 故 R 为 C.M. 局部环。设 D, D' 分别给出 R 中的理想 $(a), (a')$, 则 $(aa') = (a_i)$, 故不妨设 $a_i = aa'$。由于 $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \supset (a_1, \ldots, a_n)$, 有

$$\dim(R/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)) \leqslant \dim(R/(a_1, \ldots, a_n)) = 0 \tag{7}$$

故若 a 不是 R 中的单位则 $a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n$ 为 m-正则列, 此时 $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, a$ 也是 m-正则列 (参看 [L1, 命题 XIV.1.3])。同理, 若 a' 不是 R 中的单位则 $a_1, \ldots, a_{i-1}, a'$, $a_{i+1}, \ldots, a_n$ 为 m-正则列, 此时 $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, a'$ 也是 m-正则列。令

$$A = R/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \tag{8}$$

令 b, b' 分别为 a, a' 在 A 中的像, 则 a_i 在 A 中的像为 bb'。由于 b 不是 A 的零因子, 我们有 A-模同构 $(b)/(bb') \cong A/(b')$, 从而有

$$\begin{aligned}\dim_k(A/a_iA) &= \dim_k(A/(b)) + \dim_k((b)/(bb')) \\ &= \dim_k(A/(b)) + \dim_k(A/(b'))\end{aligned} \tag{9}$$

即

$$\begin{aligned}\dim_k(R/(a_1, \ldots, a_n)) = &\dim_k(R/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)) + \\ &\dim_k(R/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a', a_{i+1}, \ldots, a_n))\end{aligned} \tag{10}$$

由 (10) 对所有 $x \in D_1 \cap \ldots \cap D_n$ 作和即得 (5)。最后一个断言 (即 (6) 式) 由定义是显然的。证毕。

设 S 为连通诺特概形, $\pi : X \to S$ 为平坦相对射影态射, 相对维数处处为 n, $U \subset X$ 为引理 4 中的开子概形。设 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ 为 X 上的可逆层。设对每个 i, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$ 满足 $(*)$。则由定理 1 可知 $|\mathcal{L}_i/S|$ 由 S 上的一个射影空间从中的一个 S-忠实平坦开子概形 T_i 代表, 设其泛除子为 $D_i \subset X \times_S T_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$。在 $T = T_1 \times_S \cdots \times_S T_n$ 上有 T-有效除子

$\tilde{D}_i = D_i \times_{T_i} T \subset X \times_S T$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$。令 $D = \tilde{D}_1 \cap \ldots \cap \tilde{D}_n$, 若存在连通稠密开子集 $U' \subset T$ 使得 $D \times_T U' \subset U \times_S U'$ 且 $\mathrm{pr}_2 : D \times_T U' \to U'$ 是有限的, 则由于 $\pi|_U$ 具有 C.M. 纤维, U'-有效除子列 $\tilde{D}_1, \ldots, \tilde{D}_n$ 在 $U \times_S U'$ 上的限制是 U'-截断的, 故 $\mathrm{pr}_2 : D \times_T U' \to U'$ 是平坦的, 其次数称为 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ 在 S 上的相交数, 记为 $[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]_S$ (在没有疑问时可以略去下标 S)。由平坦性可知对任意态射 $S' \to S$ 及任意 S'-截断的 S'-有效除子列 $D'_i \in |\mathcal{L}_i/S'|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 有 $[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]_S = [D'_1 \cdots D'_n]_{S'}$。

若 $\mathcal{L}$ 是极丰富的, 局部给出闭嵌入 $X \to \mathbb{P}^n_S$, 则 $\mathcal{L}$ 的一个整体截口 t 所定义的闭子概形 $D_t \subset X$ 为一个超平面 $H_t \subset \mathbb{P}^n_S$ 与 X 的交。对任意 $s \in S$, 若 t 足够一般则 X_s 的任一不可约分支都不含于 H_t 中, 从而 $D_t \cap U \cap X_s$ 在 $D_t \cap X_s$ 中稠密。设每个 $\mathcal{L}_i$ 都是极丰富的, t_i 为 $\mathcal{L}_i$ 的整体截口, 所定义的 X 的闭子概形为 D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$。记 $D = D_1 \cap \ldots \cap D_n$, 则由归纳法可见当 $t_1, \ldots, t_n$ 都足够一般时, 对任意 $s \in S$ 都有 $D \cap X_s \subset U$。注意投射 $D \to S$ 在 s 上的纤维是有限的, 从而在 s 附近是有限的; 而由 $D \cap X_s \subset U$ 可见 $D \to S$ 在 s 附近是平坦的, 从而可以定义 $[D_1 \cdots D_n] = \deg(D/S)$。此外, 由引理 4 可见当 $t_1, \ldots, t_n$ 都足够一般时, $D_1 \cap U, \ldots, D_n \cap U$ 是截断的。

设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$ 是丰富的且满足 $(*)$ $(\forall i)$。令 $\mathcal{E}_i = \pi_* \mathcal{L}_i$, $T_i = \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $T = T_1 \times_S \cdots \times_S T_n$, 则 T 的一个点 t 代表 $X_t = X \times_S \{t\}$ 的 n 个超曲面截口 $D_{t1}, \ldots, D_{tn} \subset X_t$, 其中 D_{ti} 由 $\Gamma(X_t, \mathrm{pr}_1^* \mathcal{L}_i)$ 的非零元给出 $(1 \leqslant i \leqslant n)$。由上所述存在稠密开子集 $U' \subset T$ 使得 $U' \to S$ 忠实平坦, 且对任意 $t \in U'$ 有 $D_{t1} \cap \ldots \cap D_{tn} \subset U \times_S T$ 且为截断交, 从而在 U' 上是有限平坦的, 再注意 U' 是连通的, 从而 $\deg(D_{t1} \cap \ldots \cap D_{tn}/t)$ 是常数, 这样就可以定义这个次数为 $[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]_S$。

对一般的 $\mathcal{L}_i$, 取定一个 $O_X(1)$, 注意当 m 充分大时 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i(m)$ 是极丰富的且满足 $(*)$, 从而可以定义相交数 $[\mathcal{L}_1(m) \cdots \mathcal{L}_n(m)]_S$, 再利用相交数的加性 (引理 5), 即可定义 $[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]_S$, 而且不难验证这个定义与 $O_X(1)$ 和 m 的选择无关。总之有

定理 2. 设 S 为连通诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对维数处处为 n 的平坦相对射影态射, 则对 X 上的任意 n 个可逆层 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ 可以定义它们在 S 上的相交数 $[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]_S$, 它是 n 个可逆层的整值加性函数, 在任意基

变换 $S'\to S$ 下不变, 且与 n 个可逆层的次序无关。

若 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_i$ 是丰富的且满足 $(*)$ $(\forall i)$, 则对任意代数闭域 k 上的点 $t:\mathrm{Spec}(k)\to S$ 及足够一般的 $s_i\in\Gamma(X_t,(\mathcal{L}_i)_t)$ 所定义的除子 $D_i\subset X_t$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $D=D_1\cap D_2\cap\ldots\cap D_n$ 为有限的, 其点都是 X_t 中的 C.M. 点, 且 $\deg(D/k)=[\mathcal{L}_1\cdots\mathcal{L}_n]_S$。

两个可逆层 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ 称为**数值等价的** (*numerically equivalent*), 如果对任意可逆层 $\mathcal{L}_2,...,\mathcal{L}_n$ 都有 $[\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_n]_S=[\mathcal{L}'\cdot\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_n]_S$, 显然这是一个等价关系, 按此关系的一个等价类称为可逆层的一个**数值类** (*numerical class*)。特别地若对任意可逆层 $\mathcal{L}_2,...,\mathcal{L}_n$ 都有 $[\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_n]_S=0$, 则称 $\mathcal{L}$ 的数值类为 0。

设 $X\subset\mathbb{P}_k^m$ 为域 k 上的 n 维拟射影概形。令 $U\subset X$ 为稠密 C.M. 开子集, 则 $\mathbb{P}_k^m$ 中足够一般的超平面与 U 的交为 U 中的有效除子, 故由定理 2 可知对 $\mathbb{P}_k^m$ 中足够一般的 $m-n$ 维平面 H (为 n 个超平面的交), $(H\cap U)\to\mathrm{Spec}k$ 为有限态射, 且其次数为 $[O_X(1)\overset{n}{\cdots}O_X(1)]$, 与 H 的选择无关, 而当 H 足够一般时 $H\cap(X-U)=\emptyset$, 故 $(H\cap X)\to\mathrm{Spec}k$ 的次数也与 H 的选择无关, 称为 X 的**次数** (参看例 1.8)。

注 5. 对一个 n 维射影子概形 $X\subset\mathbb{P}_k^m$ 可用希尔伯特多项式 χ_X 更简单地定义其次数, 即 $n!\chi_X$ 的首项系数为 X 的次数 (参看 [H, I.7] 或下文)。上述定义则在几何上更直观。

设 X 为代数闭域 k 上的 n 维射影 C.M. 概形, $\mathcal{L}$ 为 X 上的极丰富可逆层, 给出闭嵌入 $X\hookrightarrow\mathbb{P}_k^m$。任取 $s\neq 0\in\Gamma(X,\mathcal{L})$ 使得其定义的超平面 $H\subset\mathbb{P}_k^m$ 不包含 X 的任一不可约分支, 则有正合列

$$0\to\mathcal{L}^{-1}\to O_X\to i_*O_{H\cap X}\to 0 \tag{11}$$

其中 $i:H\cap X\to X$ 为嵌入。由 $\otimes_{O_X}\mathcal{L}^r$ 可见

$$\chi_{i^*\mathcal{L}}(x)=\chi_{\mathcal{L}}(x)-\chi_{\mathcal{L}}(x-1)=\Delta\chi_{\mathcal{L}} \tag{12}$$

这里用 Δ 记差分。由此用归纳法即可得 n 个超平面 $H_1,...,H_n\subset\mathbb{P}_k^m$, 使得 $D=H_1\cap\ldots\cap H_n\cap X$ 是有限的, 且 $\chi_{j^*\mathcal{L}}=\Delta^n\chi_{\mathcal{L}}$, 其中 $j:D\to X$

为嵌入。但

$$\chi_{j^*\mathcal{L}} = \deg(D/k) = [\mathcal{L} \overset{n}{\cdots} \mathcal{L}] \tag{13}$$

而 $\Delta^n \chi_{\mathcal{L}}$ 等于 $\chi_{\mathcal{L}}$ 的 n 次项系数乘以 $n!$, 故有

$$\deg(\mathcal{L}) = [\mathcal{L} \overset{n}{\cdots} \mathcal{L}] \tag{14}$$

设 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ 为极丰富可逆层, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1^{n_1} \otimes_{O_X} \mathcal{L}_2^{n_2}$, 则由推论 3.2 可知 $\deg(\mathcal{L})$ 是 n_1, n_2 的 n 次齐次多项式, 易见 (14) 的右边也是 n_1, n_2 的 n 次齐次多项式, 而当 $n_1, n_2 > 0$ 时 (14) 成立, 可见 (14) 对任意 n_1, n_2 成立, 从而对任意可逆层 $\mathcal{L}$ 成立。此外, 若 X 是整的, 则对任意凝聚层 $\mathcal{F}$ 有 $d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{L})\mathrm{rank}_{O_X}\mathcal{F}$ (见 (3.2.8)), 从而有

$$d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) = [\mathcal{L} \overset{n}{\cdots} \mathcal{L}]\mathrm{rank}_{O_X}\mathcal{F} \tag{15}$$

注意 (14) 和 (15) 的两边都在基变换下不变, 故对 k 是一般域的情形也成立。总之有

推论 2. 设 X 为一个域 k 上的 n 维射影 C.M. 概形, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 则 (14) 成立。如果 X 是整的, 则 (15) 对任意凝聚层 $\mathcal{F}$ 成立。

命题 7. 设 $f: X \to Y$ 为域 k 上的 n 维射影概形的有限态射, 在 Y 的一个稠密开子概形上是忠实平坦的。则对 Y 上的任意 n 个可逆层 $\mathcal{L}_1, \ldots$, $\mathcal{L}_n$ 有

$$[f^*\mathcal{L}_1 \cdots f^*\mathcal{L}_n] = \deg(f)[\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n] \tag{16}$$

从而对 Y 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有

$$\deg(f^*\mathcal{L}) = \deg(f)\deg(\mathcal{L}) \tag{17}$$

(参看 [La, p. 109], [M3, p. 63])。

证. 不难约化为 k 是代数闭域的情形。由所设及引理 4 可取 Y 的稠密开子概形 U, 使得 f 在 U 上忠实平坦, 且 U 与 $f^{-1}U$) 都是 C.M. 概形。

先考虑每个 $\mathcal{L}_i$ 丰富且满足 $(*)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的情形。取 $s_i \neq 0 \in \Gamma(Y, \mathcal{L}_i)$ 给出 $D_i \subset Y$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得 $D = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n \subset U$ 且

为有限的, 则 $f^*(s_i) \in \Gamma(X, f^*\mathcal{L}_i)$ 给出 $D_i' = f^{-1}(D_i) \subset X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 从而 $f^{-1}(D) = D_1' \cap \ldots \cap D_n'$。由定理 2 有 $\deg(D/k) = [\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n]$, 而 $\deg(f^{-1}(D)/k) = [f^*\mathcal{L}_1 \cdots f^*\mathcal{L}_n]$。由于 $f^{-1}(U) \to U$ 是忠实平坦的且次数为 $\deg(f)$, 有$\deg(f^{-1}(D)/k) = \deg(f)\deg(D/k)$, 这就说明 (16) 成立。再利用相交数的加性即可见 (16) 对于任意可逆层 $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ 都成立。

特别地取 $\mathcal{L}_1 = \ldots = \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$, 则由 (16) 和推论 2 即得 (17)。证毕。

注 6. 在双有理几何中, 对一个域 k 上的任意代数簇态射 $f : X \to Y$ 都可以定义次数: 若 f 是一般有限的, 即存在非空开子集 $U \subset Y$ 使得 $f_U = f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ 是有限的, 则可取 U 使得 f_U 是平坦的, 并定义 $\deg(f) = \deg(f_U)$; 而若 f 不是一般有限的, 则当 f 是支配的时定义 $\deg(f) = \infty$, 而当 f 不是支配的时定义 $\deg(f) = 0$。对此也可以这样理解: 若 f 是支配的, 则 $f^* : K(Y) \to K(X)$ 是单射, 此时 $\deg(f) = [K(X) : K(Y)]$; 而若 f 不是支配的则 $\deg(f) = 0$。在 f 为有限平坦态射的情形易见这样的定义与概形的有限平坦态射的次数定义一致。

在命题 7 中, 若将 f 换为 n 维 k-射影代数簇的任意态射, 则按上述定义 (17) 也成立: 在 f 为支配的情形, 由于 f 是一般有限的, 可使用命题 7 的证明; 在 f 非支配的情形, 存在一个真闭子簇 $Y_0 \subsetneq Y$ 使得 f 经过 Y_0, 而由 $\dim(Y_0) < n$ 可见足够一般的 $D = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n$ 与 Y_0 不相交, 故 $f^{-1}(D)$ 为空集, 从而 $\deg(f^*\mathcal{L}) = 0$, 而 $\deg(f) = 0$。

习题

1. 设 R 为诺特环, $I \subset R$ 为理想, $p \subset R$ 为极大理想, 且包含于 $U(I) = \mathrm{Spec}(R) - V(I)$ 的一个维数 > 0 的不可约分支中。证明存在 $q \in U(I)$ 使得 $\dim(R/q) = 1$ 且 $q \subset p$。

2. 设R为有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数, $P \subset R$为极大理想。证明 R/P 是有限域。

3. 设 C 为域 k 上的射影正则曲线, $D \subset C$ 为有效除子, 作为抽象除子等于 $n_1D_1 + \cdots + n_rD_r$ (即 $\mathrm{Supp}(D) = \{D_1, \ldots, D_r\}$ 且 D 在 D_i 处的重数为 n_i, $i = 1, \ldots, r$)。证明 $\deg(D/k)$ 等于按 (1.5.1) 所定义的 $\deg(D)$。

第 II 章　基本概念

第 1 节　群概形的基本概念

群论产生于 19世纪20 年代, 当时的研究对象主要是有限群。到 19 世纪中期, 线性群成为群论的另一类重要对象。由于线性群与几何学 (在当时有欧几里得几何、罗巴切夫斯基几何、射影几何、椭圆几何等) 密切相关, 几何与群论的关系成为一个核心研究课题, 1872 年克莱因提出了 "爱尔兰根纲领", 对以后的几何学与群论的交叉产生了深远的影响。另一方面, 线性群及其典型子群本身也具有 (解析的) 几何结构, 自 1895 年后, 索弗斯·李, Killing, 嘉当等系统地研究了具有解析结构的群, 即李群。

一个李群是一个群 G 带有一个解析流形结构, 使得群运算都是解析的。详言之, 令 $m: G\times G\to G$ 为乘法映射 $(g,g')\mapsto gg'$, $\iota: G\to G$ 为逆元映射 $g\mapsto g^{-1}$, 则 m 和 ι 都是解析映射。我们可以换一种方式叙述这个定义, 即定义一个李群是一个解析流形 G 带有解析映射 $m: G\times G\to G$, $\iota: G\to G$, 以及一个特殊的点 $e\in G$, 满足如下条件:

i) $m\circ(\mathrm{id}_G\times m)=m\circ(m\times\mathrm{id}_G): G\times G\times G\to G$ ("乘法结合律");

ii) $m\circ(o\times\mathrm{id}_G)=m\circ(\mathrm{id}_G\times o)=\mathrm{id}_G: G\cong\{e\}\times G\to G$, 其中 $o:\{e\}\to G$ 为嵌入映射;

iii) $m\circ(\iota\times\mathrm{id}_G)\circ\Delta=m\circ(\mathrm{id}_G\times\iota)\circ\Delta=o\circ\pi: G\to G$, 其中 $\Delta: G\to G\times G$ 为对角态射, $\pi: G\to\{e\}$ 为唯一的态射 ("投射")。

此后, 这种 "带有几何结构的群" 的概念逐渐渗入其他几何学领域, 包括拓扑学、微分几何、复几何、组合学等。这是一个非常自然的概念和课题: 在每个几何学领域中都要研究相应的 "运动", 而每一类运动组成一个群, 它往往具有相应的几何结构。在上述各领域中, 带有几何结构的群都可以采用如上的两种不同的定义方式, 一种是一个群带有几何结构使得群运算都是几何映射; 另一种是一个几何对象 G 带有几何映射 $m: G\times G\to G$ 和 $\iota: G\to G$, 满足上述公理 i)-iii)。

在代数几何中, 最初所研究的 "代数群" (或称 "群簇") 也是这样, 即一个群同时是一个代数闭域上的代数簇, 其群运算是代数映射 (即态

射), 它也可以定义为一个代数闭域 k 上的代数簇 G 带有代数映射 $m: G\times_k G\to G$ 和 $\iota: G\to G$, 满足上述公理 i)-iii)。但是在概形的领域只能采取后一种定义方法,因为概形的态射不能由其作为集合的映射决定。

1. 群概形

粗糙地说, 群概形就是有代数几何的群结构的概形。详言之,

定义 1. 设 S 为概形。一个 S 上的*群概形*是指一个态射 $\pi: G\to S$, 带有 S-态射 $m: G\times_S G\to G$ ("乘法"), $o: S\to G$ ("单位") 及 $\iota: G\to G$ ("逆"), 满足

i) $m\circ(\mathrm{id}_G\times_S m) = m\circ(m\times_S \mathrm{id}_G): G\times_S G\times_S G\to G$ (结合律)。

ii) $m\circ(o\times_S \mathrm{id}_G) = m\circ(\mathrm{id}_G\times_S o) = \mathrm{id}_G: G\cong S\times_S G\to G$。

iii) $m\circ(\iota\times_S \mathrm{id}_G)\circ\Delta = m\circ(\mathrm{id}_G\times_S \iota)\circ\Delta = o\circ\pi: G\to G$, 其中 $\Delta: G\to G\times_S G$ 为对角态射。

G 称作*交换的*, 如果还有

iv) $m\circ(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1) = m: G\times_S G\to G$ (交换律)。

若 π 是仿射的 (有限型的, 光滑的, ...), 则称 G 为仿射的 (有限型的, 光滑的, ...) S-群概形。若 π 是有限的而 π_*O_G 是秩 n 局部自由的, 则称 G 的次数为 n $(=\deg(G/S))$。

若 π 是平坦相对射影的且具有几何整纤维, 则称 G 为 S 上的*阿贝尔概形*, 特别地, 当 $S=\mathrm{Spec}(k)$ (k 为域) 时称 G 为 k 上的*阿贝尔簇*, 而 1 维阿贝尔簇称为*椭圆曲线*。

用预层的语言 (参看 I.2.4) 可以这样理解群概形: 由 I.2.4 可见 m 给出自然变换 $\underline{m}: \underline{G}\times\underline{G}\to\underline{G}$, 而 ι 给出自然变换 $\underline{\iota}: \underline{G}\to\underline{G}$; 注意 $\underline{S}$ 将任意 $(t: T\to S)\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$ 映到一元集 $\{t\}$, 而 o,π 分别给出自然变换 $\underline{o}: \underline{S}\to\underline{G}$ 和 $\underline{\pi}: \underline{G}\to\underline{S}$; 此外 Δ 给出自然变换 $\underline{\Delta}: \underline{G}\to\underline{G}\times\underline{G}$。条件 i)-iii) 保证了对每个 $T\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$, $\underline{m}(T)$ 和 $\underline{\iota}(T)$ 给出 $\underline{G}(T)$ 一个群结构 (其单位元为 $\underline{o}(t)=o\circ t$)。这说明 $\underline{G}$ 经过 ((groups)), 换言之存在一个反变函子 $F_G: \mathfrak{Sch}_S\to$((groups)) 使得 $\underline{G}=\Gamma\circ F_G$, 其中

$\Gamma : ((\text{groups})) \to ((\text{sets}))$ 为遗忘函子。

反之, 对一个 S-概形 G 若存在一个反变函子 $F_G : \mathfrak{Sch}_S \to ((\text{groups}))$ 使得 $\underline{G} = \Gamma \circ F_G$, 注意 ((groups)) 的群运算都是自然变换, 就可见有乘法自然变换 $\underline{m} : \underline{G} \times \underline{G} \to \underline{G}$ 等, 由米田引理可知它们等价于 S-态射 $m : G \times_S G$ 等, 而由群的公理可见条件 i-iii) 成立, 这样就给出 G 在 S 上的一个群概形结构。总之有

引理 1. 一个 S-概形 G 为群概形当且仅当 $\underline{G}$ 经过 ((groups)), 更准确地说, G 在 S 上的一个群概形结构等价于一个反变函子 $F_G : \mathfrak{Sch}_S \to ((\text{groups}))$ 使得 $\underline{G} = \Gamma \circ F_G$。此外, G 是交换群概形当且仅当 $\underline{G}$ 经过交换群的范畴。

由引理 I.1.7 还可见, 可将 $\mathfrak{Sch}_S$ 换为 $\mathfrak{AffSch}_S$。注意对任意态射 $\tau : T \to S$, 群 $\underline{G}(T)$ 的单位元为 $o \circ \tau : T \to G$, 常称为“零态射”并记为 0 或 0_T。

采用预层的语言可以简单地定义一些概念如 (闭) 子群概形, 正规子群概形, 单群概形等, 还可以简单地表述一些态射, 例如态射

$$\alpha = \alpha_G = (m, \text{pr}_2) : G \times_S G \to G \times_S G \tag{1}$$

可以表达为 $(g, h) \mapsto (gh, h)$, 即对任意 $T \in \text{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$ 及任意 T-点 $g, h \in \underline{G}(T)$ 有 $\underline{\alpha}(g, h) = (gh, h)$。由此易见 α 是 S-概形的自同构, 其逆为 $(g, h) \mapsto (gh^{-1}, h)$。这个态射下面要多次用到, 所以总是记为 α (在可能有疑问时可记为 α_G 或 $\alpha_{G/S}$)。

由预层的语言易见 $\iota^2 = \text{id}_G$, 因而 ι 是 G **作为 S-概形的**自同构 (习题 1)。若 G, G' 为 S-群概形, 则 $G \times_S G'$ 也具有的群概形结构, 称为 G 与 G' 的 *直积* (习题 4)。

引理 2. 在定义 1 中, π 是分离的当且仅当 o 是闭嵌入。

证. 易见下面的交换图中左边的方形是拉回:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{o} & G & \xrightarrow{\text{id}_G} & G \\ \downarrow{\scriptstyle o} & & \downarrow{\scriptstyle o \times_S \text{id}_G} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ G & \xrightarrow{\text{id}_G \times_S o} & G \times_S G & \xrightarrow{\alpha} & G \times_S G \end{array} \tag{2}$$

如果 Δ 是闭嵌入, 由 (2) 可见 o 是 Δ 的拉回, 故为闭嵌入; 反之, 若 o 是闭嵌入, 注意 $o \times_S \mathrm{id}_G$ 是由 o 作基变换 π 得到, 故也是闭嵌入, 从而由 (2) 可见 Δ 是闭嵌入。证毕。

如果我们考虑多个群概形, 为明确起见可将态射 m, ι, o 分别记为 m_G, ι_G, o_G, 或 $m_{G/S}, \iota_{G/S}, o_{G/S}$。类似地, 对于一个态射 $X \to S$, 为了在讨论多个态射时避免混淆, 可将对角态射 $\Delta : X \to X \times_S X$ 记为 Δ_X 或 $\Delta_{X/S}$。

注意一个域 k 上的一个群概形至少有一个 k-点, 因而 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ 中的三次光滑曲线 $C : X^3 + 2Y^3 + 4Z^3 = 0$ 没有 $\mathbb{Q}$-群概形结构, 但 $C \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ 为 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上的阿贝尔簇 (椭圆曲线)。

设 $\pi : G \to S$ 为仿射的, 不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $G = \mathrm{Spec}A$, 则群概形结构等价于 R-代数结构 $\pi^* : R \to A$ 及 R-代数同态 $m^* : A \to A \otimes_R A$ ("余乘法"), $o^* : A \to R$, $\iota^* : A \to A$, 满足

i′) $(\mathrm{id}_A \otimes_R m^*) \circ m^* = (m^* \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ m^* : A \to A \otimes_R A \otimes_R A$ ("余结合律")。

ii′) $(o^* \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ m^* = (\mathrm{id}_A \otimes_R o^*) \circ m^* = \mathrm{id}_A : A \to R \otimes_R A \cong A$。

iii′) $\Delta^* \circ (\iota^* \otimes_R \mathrm{id}_A) \circ m^* = \Delta^* \circ (\mathrm{id}_A \otimes_R \iota^*) \circ m^* = \pi^* \circ o^* : A \to A$, 其中 $\Delta^*(a \otimes_R b) = ab$, 即为 A 的乘法。

而交换律 iv) 等价于

iv′) $\eta \circ m^* = m^* : A \to A \otimes_R A$, 其中 $\eta(a \otimes_R b) = b \otimes_R a$ ("余交换律")。

我们把这种有余乘法的代数称为 **双代数**。注意在上述各等式中, 若将 π^* 与 o^* 互换, m^* 与 Δ^* 互换并改变同态合成的次序, 则 i′) 就变成 A 的乘法结合律, iv′) 变成 A 的乘法交换律, ii′) 给出 A 的 R-代数结构而 iii′) 保持不变。这就是双代数 A 的对偶性。

具有余乘法且满足余结合律的结合代数称作 **霍普夫代数**。所以粗糙地说仿射群概形等价于交换霍普夫代数, 而交换仿射群概形等价于交换且余交换的霍普夫代数。

例 1. 下面是群概形的一些典型例子。(对于仿射群概形我们用 m^*, o^* 和 ι^* 给出其群概形结构。)

i) $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上的"加群" $\mathbb{G}_{a/\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]) \cong \mathbb{A}^1$, 定义为 $m^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $o^*(x) = 0$, $\iota^*(x) = -x$。对任意概形 S 可以定义 S 上的加群 $\mathbb{G}_{a/S} = \mathbb{G}_{a/\mathbb{Z}} \times S$。若 $S = \mathrm{Spec}(k)$, k 为代数闭域, 则 $\mathbb{G}_{a/k} = \mathbb{G}_{a/S}$ 可以看作 k 的加法群的几何结构。

ii) $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上的"乘群" $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$, 定义为 $m^*(x) = x \otimes x$, $o^*(x) = 1$, $\iota^*(x) = x^{-1}$。对任意概形 S 可以定义 S 上的乘群 $\mathbb{G}_{m/S} = \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}} \times S$。若 $S = \mathrm{Spec}(k)$, k 为代数闭域, 则 $\mathbb{G}_{m/k} = \mathbb{G}_{m/S}$ 可以看作 $k^\times$ 的乘法群的几何结构 (但当 k 为一般域时则不然, 参看下面的 v))。

iii) 一个代数闭域上的线性代数群, 即一般线性群 $GL_n(k)$ 的代数子群 $(n > 0)$, 都是仿射群簇。事实上, 一般代数群可以看作一个 $\mathbb{Z}$-群概形 (为了避免混淆起见我们将它记作 $GL_{n/\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}$ 或 $GL_{n/\mathbb{Z}}$): 取矩阵系数 x_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 为坐标函数, 则

$$GL_{n/\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n), \frac{1}{\det(x_{ij})}] \tag{3}$$

其乘法由

$$m^*(x_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} x_{il} \otimes x_{lj} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n) \tag{4}$$

给出 (习题 2), 用线性代数的记号可简记为

$$m^*((x_{ij})) = (m^*(x_{ij})) = (x_{ij}) \otimes (x_{ij}) \tag{5}$$

注意 $GL_{1/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$。不难验证 $\det(x_{ij}) - 1$ 定义 $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 的一个闭子群概形 $SL_{n/\mathbb{Z}}$。易见 $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 中的"常数矩阵" cI 组成一个正规子群概形 $C \cong \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$, 可定义 $\mathbb{Z}$-群概形 $PGL_{n/\mathbb{Z}} = GL_{n/\mathbb{Z}}/C$ (商群概形的构造见 VI.1 节, 但这里可以避免, 因为 $PGL_{n/\mathbb{Z}}$ 可以嵌入某个 $GL_{m/\mathbb{Z}}$ 中作为闭子群概形, 见下节习题 2.6)。此外, 典型群如正交群, 辛群等也都可以定义为 $\mathbb{Z}$-群概形, 分别记为 $O_{n/\mathbb{Z}}$, $Sp_{n/\mathbb{Z}}$ 等。对任意概形 S, 记 S-群概形 $GL_{n/\mathbb{Z}} \times S = GL_{n/S}$, 等等。

iv) 设 G 为任意群, S 为概形, 则可以赋予 G 一个"离散" S-群概形结构 $G_S = \coprod_{g \in G} S_g$, 其中 $S_g \cong S$, 其乘法 m 由单位态射 $S \cong S_g \times_S S_h \xrightarrow{\sim} S_{gh}$

组成。特别地，若 G 为零群 (即 G 只有单位元)，则 $G_S \cong S$，此时称 G_S 为 S 上的零群概形，常简记为 0。

v) $\mathbb{Q}$ 上的平展群概形 $G = \mathrm{Spec}R$，其中 $R = \mathbb{Q}[x]/(x^3-1) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$，$m^*(x) = x \otimes x$，$o^*(x) = 1$，$\iota^*(x) = x^2$。易见 G 是 $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}}$ 的闭子群概形。注意 m 并不给出 G (作为集合) 的群结构，而 $G \otimes \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ 具有离散 $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$-群概形结构。

vi) 在特征 $p > 0$ 的域 k 上，易见 $\mathbb{G}_{a/k}$ 中由理想 (x^{p^n}) 定义的子概形 $\alpha_{p^n} \cong \mathrm{Spec}k[x]/(x^{p^n})$ 是子群概形，而 $\mathbb{G}_{m/k}$ 中由理想 $(x^{p^n}-1)$ 定义的子概形 $\mu_{p^n} \cong \mathrm{Spec}k[x]/(x^{p^n}-1)$ 也是子群概形。α_{p^n} 和 μ_{p^n} 都是只有一个点的概形，这种群概形称作“无穷小群” (因为它们是 $\mathrm{Spec}k$ 的无穷小扩张)。下面 (例 4.ii)) 还将看到它的推广。

我们以下总假定基 S 为诺特概形，除非特别说明。

设 $\pi : G \to S$ 为有限平坦交换群概形，为简明起见设 $S = \mathrm{Spec}R$，$G = \mathrm{Spec}A$。由 R 是诺特环可知 A 作为 R-模是局部自由的。由双代数的对偶性，A 的 R-双代数结构给出 $A^\vee = Hom_R(A, R)$ 一个 R-双代数结构，故 $G^D = \mathrm{Spec}A^\vee$ 也具有有限平坦交换 S-群概形结构，称作 G 的卡迪耶对偶 (*Cartier dual*)。显然有 $(G^D)^D \cong G$。为方便起见，对任一有限秩局部自由 R-双代数 A 记 $A^\vee$ 的 R-双代数结构为 A^D。

例如，设 $G \to S$ 为有限离散群概形 (见例 1.iv))，其群结构为 $\tilde{G}$ (视作乘法群)，则 $A^\vee$ 同构于 $\tilde{G}$ 在 R 上的群代数 $R[\tilde{G}]$，它的余乘法由 $f \mapsto f \circ m^*$ 给出 (习题 5)。由此就不难进行下例中的计算。

例 2. 设 G 为域 k 上的 n 次有限交换群概形。若 $\mathrm{ch}(k) \nmid n$，则当 k 为代数闭域时 G 为离散的，而 G^D 可看作 G 上的特征标组成的群 (它非典范地同构于 G)；但当 k 非代数闭时则不然，例如 $\mathbb{Q}$ 上的 3 次离散群概形的卡迪耶对偶如例 1.1.v)。若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$，而 G 为离散 p^n 阶循环群，则 G^D 如例 1.1.vi) 中的 μ_{p^n}。此外不难得到 α_p 为其自身的卡迪耶对偶。我们将看到若 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域，则 k 上的次数为 p 的有限群概形只有 α_p, μ_p 和离散群概形 (习题 Ⅲ.1.9)。

设 $\pi : G \to S$ 为群概形，$g : S \to G$ 为 π 的一个截口，则 g 给出 G 作

为 S-概形的一个到自身的态射

$$T_g = m \circ (g \times_S \mathrm{id}_G):\ G \to G \times_S G \to G \tag{6}$$

(用预层的语言为 $x \mapsto gx$), 显然它是 S-概形自同构, 其逆为

$$T_g^{-1} = T_{g^{-1}} = m \circ ((\iota \times_S g) \times_S \mathrm{id}_G):\ G \to G \tag{7}$$

(用预层的语言为 $x \mapsto g^{-1}x$), 称为 g 给出的 (左) *平移* (translation)。当 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域) 而 g 为 k-点时, 这一术语与群论中的平移一致。特别地, 由此可见 G 在各 k-点附近的几何结构是相同的。

命题 1. 设 G 为一个域 k 上的有限型群概形。

i) 若 $U \subset G$ 为稠密开子集, 则 m 在 $U \times_k U$ 上的限制是满射, 从而是忠实平坦的。

ii) G 的每个连通分支是不可约的, 而 G 的包含单位元 e 的连通分支 (称为 *零分支*) G_0 是几何不可约的, 且为正规子群概形。

iii) 若 k 是完全域, 则 G_{red} 为 G 的闭子群概形。

iv) 若 G 是几何约化的, 或有一个在 k 上光滑的点, 则 G 在 k 上光滑。

证. i) 记 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。若 $k = \bar{k}$, 对任意闭点 $p \in G$ 有 k-概形的自同构 $T_p : G \to G$ 和 $\iota : G \to G$, 故 $T_p \circ \iota(U)$ 在 G 中稠密, 从而 $T_p \circ \iota(U) \cap U \neq \emptyset$, 这说明存在 $g, h \in U$ 使得 $pg^{-1} = h$, 从而有 $p = hg \in m(U \times_k U)$。

由此可见当 k 为一般域时, $m \otimes_k \mathrm{id}_{\bar{k}}$ 在 $U \times_k U \otimes_k \bar{k}$ 上的限制是忠实平坦的, 故由 $\bar{k}$ 在 k 上忠实平坦可见 m 在 $U \times_k U$ 上的限制忠实平坦。

ii) 若 $k = \bar{k}$, 可取 G 中只包含于一个不可约分支的闭点 p。对任意闭点 $g \in G$, 由自同构 $T_{gp^{-1}}$ 可见 g 也只含于一个不可约分支。故 G 的任意两个不可约分支不相交, 换言之每个不可约分支是既开又闭的。由此可见当 k 为一般域时, G 的每个不可约分支仍是既开又闭的, 从而是连通分支。

令 $p \in G_0$ 为一般点, $P_1, ..., P_r$ 为 $G_0 \otimes_k \bar{k}$ 的一般点, 则它们均卧于 p 上 (参看 [L1, 定理 Ⅱ.3.1]); 而 $e \in G_0$ 是 p 的特化, 它在 $G_0 \otimes_k \bar{k}$ 中的原像只有一个点 e', 故 e' 为每个 P_i 的特化, 但由上所述 $G_0 \otimes_k \bar{k}$ 的不可约分支互不相交, 从而必有 $r = 1$, 即 G_0 是几何不可约的。

令 $c_G : G \times_k G_0 \to G$ 为 k-态射 $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$。若 $k = \bar{k}$, 则对任意闭点 $g \in G$, gG_0g^{-1} 为 G 的一个连通分支, 但 $e \in gG_0g^{-1}$, 故有 $gG_0g^{-1} = G_0$, 这说明 c_G 经过 G_0。由此可见当 k 是一般域时 c_G 也经过 G_0, 即 G_0 是正规子群概形。

iii) 令 $\beta : G \times_k G \to G$ 为态射 $(g, h) \mapsto gh^{-1}$。由 k 是完全域可见 $G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}}$ 是不可约的, 故 $\beta|_{G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}}} : G_{\text{red}} \times_k G_{\text{red}} \to G$ 经过 G_{red}, 这说明 G_{red} 具有诱导的子群概形结构。

iv) 只需考虑 $k = \bar{k}$ 的情形。两个假设中的每一个均可保证 G 有一个光滑的闭点 p。对任意闭点 $g \in G$, 由自同构 $T_{gp^{-1}}$ 可见 g 也是 G 的光滑点, 故 G 在 k 上光滑。证毕。

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\pi : G \to S$ 为有限型分离群概形, 具有连通纤维。记 $\mathcal{I} = \ker(o^*) \subset O_G$。设有理想层 $\mathcal{J}_i \subset O_G$ $(i = 1, 2, ...)$ 及正整数 $n_1 < n_2 < ...$ 使得 $\mathcal{I}^{n_i} \supset \mathcal{J}_i \supset \mathcal{I}^{n_{i+1}}$ $(\forall i)$。若每个 $O_G/\mathcal{J}_i$ 在 S 上平坦, 则 G 在 S 上平坦。

证. 对任意 $t \in \text{im}(o)$, 由形式完备化可见 $O_{G,t}$ 在 O_S 上平坦, 故有一个包含 $\text{im}(o)$ 的开子概形 $U \subset G$ 在 S 上平坦 (参看引理 I.1.2.xi))。令 $T = G \times_S U$, 则 $\text{pr}_1 : T \to G$ 平坦。注意 α 在 T 上的限制为 U-自同构, 可见 $U' = \alpha(U \times_S U) \subset T$ 是 T 的开子概形, 故 $\text{pr}_1 : U' \to G$ 平坦。由命题 1 可知 $\text{pr}_1 : U' \to G$ 作为集合的映射是满射, 故为忠实平坦的。另一方面 $U' \cong U \times_S U$ 在 S 上忠实平坦, 故 G 在 S 上忠实平坦。证毕。

2. 群概形的同态

定义 2. 设 G, G' 为 S-群概形。一个从 G到G' 的 同态 (更严格地说是 S- 同态) 是指一个 S-态射 $f : G \to G'$ 与 (群概形的) 乘法交换, 详言之

$$f \circ m_G = m_{G'} \circ (f \times_S f) : G \times_S G \to G' \tag{1}$$

如果将 $\underline{G}$ 和 $\underline{G'}$ 看作从 $\mathfrak{Sch}_S$ 到 ((groups)) 的反变函子，则一个同态 $f : G \to G'$ 等价于一个自然变换 $\underline{f} : \underline{G} \to \underline{G'}$。由此可见同态 f 与 o 和 ι 也交换，即 $f \circ o_G = o_{G'} : S \to G'$，$f \circ \iota_G = \iota_{G'} \circ f : G \to G'$。

记 $\mathfrak{Ab}_{0S}$ 为诺特概形 S 上有限平坦交换群概形的范畴 (其中的态射为同态)。易见卡迪耶对偶是函子性的，即可以看作 $\mathfrak{Ab}_{0S}$ 到自身的反变函子 (事实上是反自同构，因为 $(G^D)^D \cong G$)。

例 3. 下面是群概形同态的两个重要情形。

i) 设 $G \to S$ 为交换群概形，将它看作加法群概形。对任意整数 n，G 有自同态 n_G，按预层的语言为 $x \mapsto nx$。注意 n_G 是一个自然同态，就是说它可以看作 S 上交换群概形范畴的单位函子到自身的一个自然变换。

ii) 设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数)，则可以定义 S 的"绝对夫罗贝纽斯态射" (absolute Frobenius) $F_S : S \to S$，它将每个点映到自身，而 $F_S^* : O_S \to O_S$ 将每个截口映到其 p 次幂。易见这是一个 $\mathbb{F}_p$-概形态射。注意绝对夫罗贝纽斯态射是自然的，故对任意 $\mathbb{F}_p$-概形态射 $f : X \to S$ 有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array} \tag{2}$$

令 $X^{(p)}$ 为 f 和 F_S 的拉回，则有诱导态射 $F_{X/S} : X \to X^{(p)}$，称为 X 在 S 上的**相对夫罗贝纽斯态射**，注意它是一个 S-态射，而且是自然的。更一般地，对任意非负整数 n 令 $X^{(p^n)}$ 为 f 和 F_S^n 的拉回，则 F_X^n 诱导自然的 S-态射 $F^n_{X/S} : X \to X^{(p^n)}$。

若 k 为特征 p 的完全域而 $S = \mathrm{Spec} k$，则由 k 的夫罗贝纽斯 $\sigma : k \to k$ 为同构可见 F_S 为同构。对任意正整数 n 令 $X^{(p^{-n})}$ 为 f 和 F_S^{-n} 的拉回，则有自然的 k-态射 $F_{X^{(p^{-1})}/k} : X^{(p^{-1})} \to X$。

若 G 是 S-群概形，则 $F_{G/S}$ 为自然同态，因为相对夫罗贝纽斯态射与纤维积交换且与乘法态射交换。更一般地 $F^n_{G/S}$ 为自然同态。

若 G 是有限局部自由交换的，则 G^D 的相对夫罗贝纽斯态射 $F_{G^D/S} : G^D \to (G^D)^{(p)} \cong (G^{(p)})^D$ 的对偶 $V_{G/S} : G^{(p)} \to G$ 称作 G 的**移位同态** (Verschiebung，参看 VI.2 节和 VII.2 节)。更一般地 $F^n_{G^D/S}$ 的对偶记为

$V^n_{G/S}$。

设 A 为 R-代数，且作为 R-模是秩 n 局部自由的。记 $N_{A/R}: A \to R$ 为映射 $a \mapsto \mathrm{Nm}_{A/R}(a\cdot)$。易见 $N_{A/R}$ 与乘法交换，且不难证明对任意 R-代数自同构 $\phi: A \to A$ 有 $N_{A/R} \circ \phi = N_{A/R}$ (习题 7)。

引理 3 (德利涅). 设 $\pi: G \to S$ 为有限交换群概形，使得 $\pi_* O_G$ 在 O_S 上是秩 n 局部自由的，则 $n_G = 0$。

证. 由抽象废话不难约化到证明任意截口 $\zeta \in \underline{G}(S)$ 满足 $\zeta^n = e$。不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $G = \mathrm{Spec}A$, 且 A 作为 R-模同构于 $R^{\oplus n}$。

注意对任意 S-概形 $T = \mathrm{Spec}B$, 群 $\underline{G}(T)$ 的乘法由 $(\xi_1 \cdot \xi_2)^* = \Delta_T^* \circ (\xi_1^* \otimes_R \xi_2^*) \circ m_G^*$ 给出。一个截口 $\xi \in \underline{G}(T)$ 等价于一个 R-代数同态 $A \to B$, 或者 $A^D \otimes_R B$ 的一个元，故可将 $\underline{G}(T)$ 看作 $A^D \otimes_R B$ 的子集，而 $A^D \otimes_R B$ 的一个元在 $\underline{G}(T)$ 中当且仅当它所对应的 R-模同态 $A \to B$ 是 R-代数同态。由 G 是交换的可知 A^D 是交换环，而 $A^D \otimes_R B$ 可看作交换 A^D-代数。

设 B 作为 R-模同构于 $R^{\oplus m}$, 我们来说明 $N = N_{A^D \otimes_R B/A^D}: A^D \otimes_R B \to A^D$ 将 $\underline{G}(T)$ 映入 $\underline{G}(S)$。由习题 7 只需验证若 $f \in A^D \otimes_R B$ 所对应的 R-模同态 $A \to B$ (仍记为 f) 是 R-代数同态，则 $N(f)$ 所对应的 R-模同态 $A \to R$ 是 R-代数同态。对任意 $a, b \in A$, 由 $f(ab) = f(a)f(b)$ 有

$$N(f)(ab) = N_{B/R}(f(ab)) = N_{B/R}(f(a))N_{B/R}(f(b)) = N(f)(a)N(f)(b) \tag{3}$$

这说明 $N(f)$ 是 R-代数同态，从而 $N(f) \in \underline{G}(S)$。记 $N_0: \underline{G}(T) \to \underline{G}(S)$ 为 N 的限制。注意 $A^D \otimes_R B$ 的乘法为 $(m_G^*)^\vee \otimes_R \Delta_T^*$, 由上所述可见 $\underline{G}(T)$ 的乘法与 $A^D \otimes_R B$ 的乘法一致，从而 N_0 是群同态。此外对投射 $\tau: T \to S$ 有 $N_0(\zeta \circ \tau) = \zeta^m$。

取 $T = G$, 注意平移 T_ζ 是两个元 $\mathrm{id}_G, \zeta \circ \pi \in \underline{G}(G)$ 的积，可见

$$N_0(T_\zeta) = N_0(\mathrm{id}_G) \cdot N_0(\zeta \circ \pi) = N_0(\mathrm{id}_G) \cdot \zeta^n \in \underline{G}(S) \tag{4}$$

(注：我们未必知道 $N_0(\mathrm{id}_G)$ 是什么，但只需知道它是乘法群 $\underline{G}(S)$ 的元就够了)。但 T_ζ^* 是 R-代数同构，由上所述有 $N_0(T_\zeta) = N_0(\mathrm{id}_G)$ (参看习题 7), 故由 (4) 有 $\zeta^n = e$。证毕。

注 1. 在引理 3 中若不假定 G 是交换的, 是否仍有 $n_G = 0$? 这个问题称为 Tate-Oort 问题 (见 [TO]), 至今仍未解决。已知当 S 为既约时答案是肯定的 (见 [S3.I, $\mathrm{VII_A}$.8.5] 或习题 III.1.7)。

引理 4. 设 R 为 $\mathbb{F}_p$-代数 (p 为素数), $S = \mathrm{Spec}(R)$, $G = \mathrm{Spec}(A)$ 为 S 上的有限平坦交换群概形, 则

$$V_{G/S} \circ F_{G/S} = p_G, \quad F_{G/S} \circ V_{G/S} = p_{G^{(p)}} \tag{5}$$

证. 由夫罗贝纽斯的函子性有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} G^{(p)} & \xrightarrow{F_{G^{(p)}/S}} & G^{(p^2)} \\ \downarrow{\scriptstyle V_{G/S}} & & \downarrow{\scriptstyle V_{G^{(p)}/S}} \\ G & \xrightarrow{F_{G/S}} & G^{(p)} \end{array} \tag{6}$$

由此可见 (5) 中的第二个等式可以由第一个等式推出, 故下面仅证明第一个等式。

对任一有限生成的局部自由 R-模 M, 定义 $TS^p(M) \subset M^{\otimes_R p}$ 为所有对称张量组成的子模, 易见它也是局部自由模: 为方便起见不妨设 $M \cong R^{\oplus n}$, 具有自由生成元 $v_1, ..., v_n$, 注意对称群 $\mathfrak{S}_p$ 在张量积 $M^{\otimes_R p}$ 上有一个置换因子作用, 可取 $TS^p(M)$ 的自由生成元为 $M^{\otimes_R p}$ 的生成元 $v_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R v_{i_p}$ 的 $\mathfrak{S}_p$-轨迹和。若 $v_{i_1}, ..., v_{i_p}$ 不全相同, 则 $v_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R v_{i_p}$ 在 $\mathfrak{S}_p$ 的作用下的安定子群是 $\mathfrak{S}_p$ 的真子群, 从而它的轨迹的元素个数是 p 的倍数。令 $s : M^{\otimes_R p} \to TS^p(M)$ 为对称化同态 $v \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \sigma v$, 则 $\mathrm{im}(s) \subset TS^p(M)$ 且也是局部自由子模, 其生成元为 $TS^p(M)$ 的自由生成元中除去 $v_{i_1} = ... = v_{i_p}$ 外的那些。记 $M^{(p)}$ 为 M 通过 S 的绝对夫罗贝纽斯的基变换。定义 $\alpha : M^{(p)} \to TS^p(M)$ 为映射 $r \otimes_R v \mapsto rv \otimes_R \cdots \otimes_R v$, 则合成 $M^{(p)} \to TS^p(M) \to TS^p(M)/\mathrm{im}(s)$ 为同构, 记其逆为 λ, 并记 $q : TS^p(M) \to TS^p(M)/\mathrm{im}(s)$ 为投射。

注意 A^D 的乘法为 m_G^* 的对偶, 记 $m_p : G \times_S \overset{p}{\cdots} \times_S G \to G$ 为乘法, 则由 G 的交换性可见 m_p^* 的像为对称张量, 故诱导一个同态 $\mu : A \to TS^p(A)$。由定义对任意 $y \in A^D$ 有

$$F_{G^D/S}^*(y) = m_p^{*\vee}(y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y) = \mu^\vee(\alpha(y)) \tag{7}$$

而由定义 $V_{G/S} = F^D_{G^D/S}$, 对 (7) 取对偶得

$$V^*_{G/S}(x) = \lambda \circ q \circ \mu(x) \quad (\forall x \in A) \tag{8}$$

换言之

$$V^*_{G/S} = \lambda \circ q \circ \mu : A \to A^{(p)} \tag{9}$$

记 $\langle , \rangle : A^D \times A \to R$ 为 R-双线性映射 $\langle y, x\rangle = y(x)$。则由定义有

$$\langle 1 \otimes_R y, V^*_{G/S}(x)\rangle = \langle y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y, m^*_{G/S}(x)\rangle = \langle y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y, \mu(x)\rangle \tag{10}$$

其中 $1 \otimes_R y \in A^{D(p)} \cong A^{(p)D}$, $V^*_{G/S}(x) \in A^{(p)}$。令 $z = \lambda(\mu(x))$, 则由上所述存在 $u \in A^{\otimes_R p}$ 使得 $\mu(x) = \alpha(z) + s(u)$。由上所述可见 $\langle y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y, s(u)\rangle = 0$, 故有

$$\langle y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y, \mu(x)\rangle = \langle y \otimes_R \overset{p}{\cdots} \otimes_R y, \alpha(z)\rangle = \langle y, z\rangle^p = \langle 1 \otimes_R y, z\rangle \tag{11}$$

由 (10) 和 (11) 得 $V^*_{G/S}(x) = z = \lambda(\mu(x))$, 故有

$$F^*_{G/S} \circ V^*_{G/S}(x) = F^*_{G/S} \circ \lambda \circ \mu(x) \tag{12}$$

不难验证 $F^*_{G/S} \circ \lambda$ 由乘法同态 $\Delta^*_p : A^{\otimes_R p} \to A$ 诱导, 故有

$$F^*_{G/S} \circ V^*_{G/S} = \Delta^*_p \circ \mu = \Delta^*_p \circ m^*_p = p^*_G \tag{13}$$

这就证明了 (5) 中的第一个等式。证毕。

设 $f : G \to G'$ 为 S-群概形的同态, 则 f 和 $o_{G'} : S \to G$ 的拉回称作 f 的核, 记为 $\ker(f)$。易见 $H = \ker(f) \overset{i}{\hookrightarrow} G$ 代表预层 $\ker(\underline{f} : \underline{G} \to \underline{G'})$, 即对任意 S-概形 $t : T \to S$ 及任意 S-态射 $g : T \to G$, 若 $f \circ g = 0_T$ (零态射), 则存在唯一 S-态射 $g' : T \to H$ 使得 $g = i \circ g'$。注意 $\ker(f)$ 为 G 的正规子群概形。

若 G 为交换群概形, 对任意整数 n 记 $G[n] = \ker(n_G)$。若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数), 对任意非负整数 n 记 $G[F^n] = \ker(F^n_{G/S})$。

与核的建立相比, 商的建立要困难得多 (而且商不一定存在), 见第 V 章和第 VI 章。

例 4. i) 设 G 为域 k 上的有限型交换群概形。如果 G 为阿贝尔簇或 $G \cong \mathbb{G}_{m/k}$, 则 $H_n = G[n]$ 为有限群概形 (见下面的命题 VII.1.1), 而 n_{H_n} 为零同态。

ii) 设 S 为 $\mathbb{F}_p$-诺特概形而 G 为有限型 S-群概形。令 $H = G[F]$, $\mathcal{M}$ 为 $o_G : S \to G$ 的定义理想层, 则由 $F_{G/S}$ 的定义易见 $H \hookrightarrow G$ 的定义理想层由 $\mathcal{M}$ 的所有截口的 p 次幂生成, 记为 $\mathcal{M}^{(p)}$。由此可见 $o_H : S \to H$ 的定义理想层是幂零的 (为 $\mathcal{M}/\mathcal{M}^{(p)}$ 在 H 上的限制)。故 H 为有限 S-群概形, 而作为一个拓扑空间 H 和 S 相同, 我们将这样的群概形称作 *S-无穷小群* (参看例 1.vi))。

特别地, 若 $S = \mathrm{Spec} k$ (k 为域), 则当 $G = \mathbb{G}_{a/k}$ 时 $H \cong \alpha_p$, 而当 $G = \mathbb{G}_{m/k}$ 时 $H \cong \mu_p$ (参看例 1.vi))。我们还将看到当 G 为椭圆曲线时, 若 G 为正常的则 $H \cong \mu_p$, 而若 G 为超奇的则 $H \cong \alpha_p$ (见 VII.1.1)。若 $G = GL_{n/k}$ ($n > 1$), 则 H 为非交换无穷小群。

引理 5. 设 $f : G \to G'$ 为一个域 k 上的有限型群概形的同态, 则 f (作为集合映射) 的像是闭集。特别地, 若 k 是代数闭域, 则 $\mathrm{im}(f)$ 的约化概形结构为 G' 的闭子群概形。

证. 令 $V = \mathrm{im}(f)$ (作为 G' 的子集), 则 V 是可建造集 (见 [Ma, Theorem 6] 或 [L1, VIII.3])。记 $\bar{V}$ 为 V 的闭包的约化概形结构, 则 V 包含 $\bar{V}$ 的一个稠密开子集 U。

先考虑 k 是代数闭域的情形。由于 f 是同态, 有

$$m_{G'}(U \times_k U) \subset V, \quad \iota_{G'}(U) \subset V \tag{14}$$

不难验证 $\bar{V} \times_k \bar{V}$ 是 $U \times_k U$ 的闭包 (习题 I.2.2), 且为约化概形, 故有 $m_{G'}(\bar{V} \times_k \bar{V}) \subset \bar{V}$, 类似地有 $\iota_{G'}(\bar{V}) \subset \bar{V}$, 由此可见 $\bar{V}$ 是 G' 的闭子群概形。由于 U 在 $\bar{V}$ 中稠密, 由命题 1.i) 有 $m_{G'}(U \times_k U) = \bar{V}$, 从而由 (14) 有 $V = \bar{V}$, 即 V 是 G' 的闭子集。

对于一般的域 k, 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则 $f \otimes_k \mathrm{id}_{\bar{k}} : G \otimes_k \bar{k} \to G' \otimes_k \bar{k}$ 为有限型 $\bar{k}$-群概形同态, 故由上所述 $H = \mathrm{im}(f \otimes_k \mathrm{id}_{\bar{k}})_{\mathrm{red}}$ 为 $G' \otimes_k \bar{k}$ 的闭子群概形。注意 $U \otimes_k \bar{k}$ 的约化结构含于 H 中, 从而其闭包 $\bar{V} \otimes_k \bar{k}$ 的约化结构含于 H 中, 由此得 $V = \bar{V}$。证毕。

命题 2. 设 $f: G \to G'$ 为 S-群概形的同态, $H = \ker(f)$。则

i) α 诱导 S-概形同构

$$\alpha_*: \ H \times_S G \cong G \times_{G'} G \tag{15}$$

ii) 若 $H = 0$, 且或者 f 是紧的或者 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 则 f 为闭嵌入。

证. i) 显然有交换图

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G & \xrightarrow{\alpha_G} & G \times_S G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f \times_S f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f \times_S f} \\ G' \times_S G' & \xrightarrow{\alpha_{G'}} & G' \times_S G' \end{array} \tag{16}$$

令 $i = o_{G'} \times_S \mathrm{id}_{G'}: G' \to G' \times_S G'$ (即 $g \mapsto (e, g)$), 则

$$\alpha_{G'} \circ i = \Delta_{G'}: G' \to G' \times_S G' \tag{17}$$

由定义 H 为 $o_{G'}: S \to G'$ 与 f 的拉回, 故 i 与 $f \times_S f$ 的拉回同构于 $H \times_S G$。另一方面, 由 (16) 和 (17) 可见 i 与 $f \times_S f$ 的拉回同构于 $\Delta_{G'} = \alpha_{G'} \circ i$ 与 $f \times_S f$ 的拉回, 而它同构于 $G \times_{G'} G$。

ii) 由 i) 有

$$G \cong G \times_{G'} G \tag{18}$$

若 f 是紧的, 则由此及引理 I.2.1 可知 f 是闭嵌入。以下讨论 $S = \mathrm{Spec}(k)$ 的情形。

设 $x \in G$ 为一个一般点, $A = O_{G,x}$, $B = O_{G',f(x)}$, 并分别记 $P \subset A$ 和 $Q \subset B$ 为极大理想, 则由 (18) 可见 $\Delta^*: \ A \otimes_B A \to A$ 是同构。由此可见 $P = QA$ 且 $A/P \cong B/Q$。注意 A 是阿廷局部环, 即可见 $B \to A$ 是满同态。由于 G, G' 是 k-有限型的, 可见存在稠密开子概形 $U \subset G$ 使得 $f|_U: U \to G'$ 是 k-概形的局部闭嵌入。

若 k 是代数闭域, 对任意闭点 $p \in G$, 由 f 是同态可见 $f \circ T_p = T_{f(p)} \circ f$, 故 $f|_{T_p(U)}: T_p(U) \to G'$ 也是局部闭嵌入, 从而由 $G = \bigcup_{p \in G_{\mathrm{cl}}} T_p(U)$ 可见 f 是局部闭嵌入, 而由引理 5 可知 f 的像是闭集, 故 f 为闭嵌入。

对于一般的域 k, 由此可见 $f\otimes_k \mathrm{id}_{\bar{k}}: G\otimes_k \bar{k}\cong V\otimes_k \bar{k}$ 是闭嵌入, 从而由 $\bar{k}$ 在 k 上忠实平坦可见 f 是闭嵌入。证毕。

引理 6. 设 S 为诺特概形, $f: G\to G'$ 为局部有限型分离 S-群概形的同态, $U\subset G$ 为开子概形。

i) 若 U 在 S 上平坦, 则 $m' = m|_{U\times_S U}: U\times_S U\to G$ 平坦, 且 $\mathrm{im}(m')$ 在 S 上平坦。特别地, 此时若 $G_s\cap U$ 在 G_s 中稠密 $(\forall s\in S)$, 则 G 在 S 上忠实平坦。

ii) 若 U 在 G' 上平坦, $U' = f(U)$ 在 S 上平坦, 且 $G_s\cap U$ 在 G_s 中稠密 $(\forall s\in S)$, 则 f 平坦, 且 $\mathrm{im}(f)$ 是 G' 的开子群概形。

iii) 若 ii) 的条件成立, 且 $f^{-1}(U')\to U'$ 是仿射的 (或紧的, 相对射影的, 有限的), 则 $G\to \mathrm{im}(f)$ 亦然。

证. i) 由所设 $\mathrm{pr}_1: G\times_S U\to G$ 平坦, 注意 α 是 $G\times_S G$ 的右 G-自同构, 而 m' 是开嵌入 $U\times_S U\to G\times_S U$, 自同构 $\alpha|_{G\times_S U}$ 与 pr_1 的合成, 故为平坦的, 从而 $\mathrm{im}(m')$ 有意义。由 $U\times_S U\to \mathrm{im}(m')$ 忠实平坦及 $U\times_S U\to S$ 平坦可见 $\mathrm{im}(m')\to S$ 平坦。若每个 $G_s\cap U$ 在 G_s 中稠密, 则由命题 1.i) 可知 m' 是满射, 而 $G\to S$ 也是满射, 故 $G=\mathrm{im}(m')$ 在 S 上忠实平坦。

ii) 由 f 是同态可见有交换图

$$\begin{array}{ccccc} G\times_S U & \xrightarrow[\alpha_G]{\simeq} & G\times_S U & \xrightarrow[\mathrm{pr}_1]{} & G \\ \downarrow{\scriptstyle f\times_S f} & & \downarrow{\scriptstyle f\times_S f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G'\times_S U' & \xrightarrow[\alpha_{G'}]{\simeq} & G'\times_S U' & \xrightarrow[\mathrm{pr}_1]{} & G' \end{array} \tag{19}$$

而 $f\times_S f: U\times_S U\to U'\times_S U'$ 忠实平坦。由 i) 的证明可见 $\mathrm{pr}_1: \alpha_G(U\times_S U)\to G$ 忠实平坦。另一方面, 由 $\mathrm{pr}_1: \alpha_{G'}(U'\times_S U')\to G'$ 平坦可见

$$\mathrm{pr}_1\circ(f\times_S f) = f\circ \mathrm{pr}_1: \alpha_G(U\times_S U)\to G' \tag{20}$$

平坦, 故 f 平坦。

这样 $\mathrm{im}(f)$ 就有意义且为 G' 的开子概形, 记为 G_1。注意 $f: G\to G_1$ 忠实平坦, 再由 f 是同态可见有 $m_{G'}(G_1\times_S G_1) = G_1$, $\iota_{G'}(G_1) = G_1$, 故 G_1 是 G' 的开子群概形。

iii) 由 ii) 可知 f 平坦, 故 $H=\ker(f)$ 在 S 上平坦。由命题 2.i) 可见 α_G 诱导同构 $H\times_S f^{-1}(U')\cong f^{-1}(U')\times_{U'} f^{-1}(U')$, 故由所设可见 $\mathrm{pr}_2: H\times_S f^{-1}(U')\to f^{-1}(U')$ 是仿射的 (或紧的, 相对射影的, 有限的), 再由 $f^{-1}(U')\to S$ 忠实平坦可知 $H\to S$ 是仿射的 (或紧的, 相对射影的, 有限的)。这样由命题 2.i) 就可见 $\mathrm{pr}_2: G\times_{G_1} G\cong H\times_S G\to G$ 是仿射的 (或紧的, 相对射影的, 有限的), 从而由 $G\to G_1$ 忠实平坦可知 $G\to G_1$ 是仿射的 (或紧的, 相对射影的, 有限的)。证毕。

习题

1. 设 $\pi: G\to S$ 为群概形, 证明 $\iota^2=\mathrm{id}_G$, 因而 ι 是 G 作为 S-概形的自同构。

2. 验证 $GL_{n/\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}$ 可以看作 $\mathbb{A}^{n^2}$ 的一个仿射开子概形, 并给出 m^*, o^* 和 ι^* 的公式。

3. 设 G 是一个域 k 上的群概形, $H\subset G$ 是开子群概形。证明 H 也是闭子群概形。

4. 设 G, G' 为 S-群概形, 则 $G\times_S G'$ 也具有的 S-群概形结构, 称为 G 与 G' 的直积。

设 G 为诺特概形 S 上的有限交换群概形。证明 G 可以分解成一个有限直积使得在每一个直因子 H 上有一个素数幂 $p_H^n=0$。特别地, 若 S 连通而 $G\to S$ 为平坦的, 则 G 可以分解成次数为素数幂的有限平坦群概形的直积。(提示: 先证明存在正整数 n 使得 $n_G=0$。)

5. 设 $S=\mathrm{Spec}(R)$, $G\to S$ 为有限离散交换群概形, 其群结构为 $\tilde{G}$ (视作乘法群)。令 $A=R[\tilde{G}]$, 即 $\tilde{G}$ 在 R 上的群代数。证明 $G^D\cong \mathrm{Spec}(A)$ (作为 S-概形)。

6. 证明一个域上的任意群概形是分离的。

7. 设 A 为 R-代数, 且作为 R-模是秩 n 局部自由的。对任一 $a\in A$ 记 χ_a 为 $a\cdot: A\to A$ 的特征多项式。设 ϕ 为 A 作为 R-代数的一个自同构。证

明对于任一 $a \in A$ 有 $\chi_{\phi(a)} = \chi_a$。特别地 $\mathrm{Nm}_{A/R}(\phi(a)\cdot) = \mathrm{Nm}_{A/R}(a\cdot)$, $\mathrm{tr}_{A/R}(\phi(a)\cdot) = \mathrm{tr}_{A/R}(a\cdot)$。

8. 设 G 是 $\mathbb{F}_q$ ($q = p^r$, p 为素数) 上的有限群概形, R 为有限维交换 $\mathbb{F}_q$-代数。令 $n = \deg(G/\mathbb{F}_q)$, $d = \dim_{\mathbb{F}_q} R$。证明:

i) $|\underline{G}(R)| \leqslant q^{d(n-1)}$;

ii) 若 G 是交换的而 $n = p^s m$ ($p \nmid m$), 则 $|\underline{G}(R)| \leqslant mq^{d(p^s-1)}$。

并对 $r = 1$, $G = \alpha_p$, $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^d)$ ($d \leqslant p$) 的情形计算 $\underline{G}(R)$。

9. 设 k 为特征非 2 的域。证明特殊正交群概形 $SO_{2/k}$ 与 $\mathbb{G}_{m/k}$ 几何同构 (即 $SO_{2/k} \otimes_k \bar{k} \cong \mathbb{G}_{m/k} \otimes_k \bar{k}$, 其中 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包)。

10. 设 $f_1 : G_1 \to G$ 和 $f_2 : G_2 \to G$ 为域 k 上的群概形的同态。证明 $G_1 \times_G G_2$ 是 $G_1 \times_k G_2$ 的闭子群概形, 且当 f_1 是满 (或单) 同态时 $\mathrm{pr}_2 : G_1 \times_G G_2 \to G_2$ 亦然。

11. 设 S 为连通概形, G 为 S 上的有限平展群概形。证明存在一个**群** G_0 使得 G 在 S 的任一几何点 (即一个态射 $T = \mathrm{Spec}(k) \to S$, k 为代数闭域) 上的纤维 (即 $G \times_S T$) 是离散群概形, 其群结构同构于 G_0。

第 2 节　群概形作用的基本概念

1. 群概形的作用

定义 1. 设 $\pi : G \to S$ 为群概形而 $\tau : X \to S$ 为态射。一个 G 在 X 上的*作用*是指一个 S-态射 $\rho : G \times_S X \to X$, 满足

i) $\rho \circ (\mathrm{id}_G \times_S \rho) = \rho \circ (m \times_S \mathrm{id}_X) : G \times_S G \times_S X \to X$;

ii) $\rho \circ (o \times_S \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X : X \cong S \times_S X \to X$。

用预层的语言, 可以将 ρ 表达为一个自然变换 $\underline{\rho} : \underline{G} \times \underline{X} \to \underline{X}$ ($(g,x) \mapsto gx$), 满足 $g(g'x) = (gg')x$, $ex = x$。

令 $\alpha = \alpha_\rho = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_S X \to X \times_S X$ (用预层的语言为 $(g,x) \mapsto (gx, x)$)。若 α 为闭嵌入, 则称 ρ 为*自由的*; 若 α 为忠实平坦的, 则称 ρ

为可迁的 (这是将群表示论的相应概念结合几何结构的考虑而定义的)。若对任何 $x \in X$ 存在 $\tau(x)$ 的仿射开邻域 $V \subset S$ 及 x 的仿射开邻域 $U \subset \tau^{-1}(V)$ 使得 $\rho(G \times_S U) = U$, 则称 ρ 为**仿射的**。如果 ρ 既是自由的又是可迁的, 即 α 为同构, 则称 X 为一个 **G-伪挠子** (G-pseudo-torsor); 此时若 $X \to S$ 是忠实平坦的则称 X 为一个 **G-挠子** (G-torsor)。

例如, 一个 S-群概形 G 的子群概形 H 在 G 上有一个左乘作用 $\rho = m|_{H \times_S G} : H \times_S G \to G$, 称作 (左) **平移** (translation), 用预层的语言就是 $(h, g) \mapsto hg$; 此外还有一个右平移作用 $(h, g) \mapsto gh^{-1}$。若 $H \subset G$ 为闭子群概形, 则平移是自由作用。若 H 是正规子群概形, 则 G 在 H 上有一个共轭作用, 用预层的语言就是 $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$。

在群论中, 作用是和表示等价的: 一个群 G 在一个集合 X 上的作用等价于 G 在 X 上的一个置换表示, 即一个同态 $G \to \mathrm{Per}(X)$; 如果 X 是一个域 k 上的线性空间, 则 G 在 X 上的一个线性作用等价于一个线性表示 $G \to GL_k(X)$。但是在代数几何中, 一个 S-概形 X 的自同构群未必由一个 S-群概形代表 (详见例 IX.1.2), 所以一个 S-群概形 G 在一个 S-概形 X 上的作用未必能理解为一个 S-群概形同态, 除非 X 的 S-自同构预层是可代表的, 即存在"自同构群概形" (后面将深入讨论)。在其他几何中也有类似的情况。所以我们主要讨论作用而不是表示, 尽管经常会使用表示论的术语。

设 G 为仿射的而且 ρ 是仿射的, 不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $G = \mathrm{Spec}A$, $X = \mathrm{Spec}B$, 则 ρ 等价于一个 R-代数同态 $\rho^* : B \to A \otimes_R B$, 满足

i′) $(\mathrm{id}_A \otimes_R \rho^*) \circ \rho^* = (m^* \otimes_R \mathrm{id}_B) \circ \rho^* : B \to A \otimes_R A \otimes_R B$;

ii′) $(o^* \otimes_R \mathrm{id}_B) \circ \rho^* = \mathrm{id}_B : B \to R \otimes_R B \cong B$。

例 1. 如同经典的线性群理论, $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{A}^n$ 上有一个典范 ("同义反复") 作用 ρ: 取定 $\mathbb{A}^n$ 的坐标 $x_1, ..., x_n$ 及 $\mathbb{A}^{n^2}$ 的坐标 t_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 为 $\mathbb{A}^{n^2}$ 的开子概形 $\{\det(t_{ij}) \neq 0\}$ (习题 1.2), 则

$$\rho^*(x_i) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \otimes x_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1}$$

这可以用线性代数的记号简记为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{1n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

注意 ρ 不是可迁的: 零截口 $0:\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{A}^n$ 在 ρ 下不动。但 $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 在开子概形 $U = \mathbb{A}^n - \mathrm{im}(0)$ 上的作用是可迁的, 且在 $\mathbb{P}^{n-1} \cong U/\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$ 上有可迁的诱导作用 (习题 1)。

由此可见对任意基 S, $GL_{n/S}$ 在 $\mathbb{A}^n_S$ 上有一个典范 (“同义反复”) 作用, 且在 $\mathbb{P}^{n-1}_S$ 上有可迁的诱导作用。

我们已经看到群概形本身不一定是群 (见例 1.1.v)), 类似地, 群概形的作用不一定是群的作用。下面的例子说明, 没有非平凡群作用的概形上仍可能有非平凡的群概形作用。

例 2. 设 $K \subset L$ 为有限域扩张, 则 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在 L 上的作用可以看作一个 K-离散群概形在 $X = \mathrm{Spec}L$ 上的作用。但即使 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 是平凡的, X 作为 K-概形仍可能有非平凡的 K-群概形作用。

i) 设 $K = \mathbb{Q}$, $L = K[t]/(t^3-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, G 如例 1.v), 则易见 $t \mapsto x \otimes_K t$ 定义了 G 在 X 上的一个非平凡作用。不难验证这个作用既是可迁的又是自由的, 换言之 X 是 G-挠子。注意 G 与 X 作为概形不同构, 甚至点数都不同, 这是与群论中的挠子很不相同的。

ii) 设 $\mathrm{ch}(K) = p > 0$, L 为纯不可分扩张 $K[t]/(t^p - a)$ $(a \in K - K^p)$, 则有 α_p (见例 1.vi)) 在 X 上的作用 $t \mapsto x \otimes_K 1 + 1 \otimes_K t$ 及 μ_p 在 X 上的作用 $t \mapsto x \otimes_K t$, 这两个作用都是可迁的和自由的, 换言之 X 既是 α_p-挠子又是 μ_p-挠子。

我们将看到, 对任何有限域扩张 $L \supset K$ 都存在 K-群概形在 $\mathrm{Spec}L$ 上的可迁作用 (引理 VI.1.1)。

设 $\rho: G \times_S X \to X$ 为 S-群概形 G 在 S-概形 X 上的作用, $\phi: G' \to G$ 为 S-群概形的同态, 则由预层的语言易见 ϕ 诱导一个 G' 在 X 上的作用 $\rho \circ (\phi \times_S \mathrm{id}_X): G' \times_S X \to X$ (习题 2)。

设 G 为 S-群概形, $f: X \to Y$ 为 S-概形的态射, $\rho_X : G \times_S X \to X$ 和 $\rho_Y : G \times_S Y \to Y$ 分别为 G 在 X 和 Y 上的作用。我们称 G 在 X 和 Y 上的作用与 f 相容, 如果下图交换:

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\rho_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times_S f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G \times_S Y & \xrightarrow{\rho_Y} & Y \end{array} \tag{3}$$

用预层的语言说就是对任意 $T \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$ 及任意 $g \in \underline{G}(T)$, $x \in \underline{X}(T)$ 有 $\underline{f}(T)(gx) = g\underline{f}(T)(x)$。

例 3. 设 $\tilde{G}$ 为群, $G = \tilde{G}_S$, 即 $\tilde{G}$ 的离散群概形结构。设 X 为 S-概形, $\tilde{\rho}$ 为 $\tilde{G}$ 在 X 上的作用。我们说 $\tilde{\rho}$ 是一个 S-作用, 如果它与 $\tilde{G}$ 在 S 上的平凡作用在 $X \to S$ 下相容。此时可定义 G 在 X 上的一个作用 $\rho : G \times_S X \cong \coprod_{g\in\tilde{G}} X \to X$, 它在对应于 $g \in \tilde{G}$ 的拷贝 X 上的限制为 g 在 X 上的作用。显然 $\tilde{\rho}$ 与 ρ 等价。

特别地, 设 $K \subset L$ 为有限伽罗瓦扩张, $X = \mathrm{Spec}L$, $S = \mathrm{Spec}K$, $\tilde{G} = \mathrm{Gal}(L/K)$, 则由本原元素定理可取 $a \in L$ 使得 $L = K[a]$。令 a 的共轭元为 $a_1, ..., a_n \in L$, 其中 $n = [L:K]$, 则 $\mathrm{Gal}(L/K) = \{g_1, ..., g_n\}$, 其中 g_i 为满足 $g_i(a) = a_i$ 的元。这样 $L \otimes_K L \cong L_1 \times \cdots \times L_n$, 其中 L_i 对应于 a_i; 而 $G \times_S X \cong \mathrm{Spec}(L_1 \times \cdots \times L_n)$。易见 α^* 将 L_i 映到 L_i, 故为同构, 换言之 X 为 G-挠子。

若 $L' \subset L$ 为包含 K 的子域, 且为 K 的正规扩张, 则由伽罗瓦理论可知 G 在 $Y = \mathrm{Spec}(L')$ 上有诱导作用, 且投射 $X \to Y$ 与 G 的作用相容。

为明确起见我们用下面的记号: 设 $f: X \to S$, $g: T \to S$ 为态射, 则记 f 的拉回 $f \times_S \mathrm{id}_T : X \times_S T \to T$ 为 $f \times_S \mathrm{id}_g$, 这是因为对同一个 T 可能有多个不同的 g。同样为了明确起见可以记 $X \times_S T$ 为 $X_f \times_g T$。

引理 1. 设 G 为 S-群概形而 X 为 S-概形, 则 G 在 X 上的一个作用等价于 $G \times_S X$ 的一个 G-自同构 Φ, 满足

$$\mathrm{id}_m \times_G \Phi = (\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_1} \times_G \Phi) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2} \times_G \Phi) : G \times_S G \times_S X \to G \times_S G \times_S X \tag{4}$$

用预层的语言, Φ 等价于 $\underline{G}\times\underline{X}$ 的一个 $\underline{G}$-自然等价 $(g,x)\mapsto(g,gx)$, 满足 $(g,g',gg'x)=(g,g',g(g'x))$。

证. 给定一个作用 $\rho: G\times_S X\to X$, 令

$$\Phi=(\mathrm{pr}_1,\rho): G\times_S X\to G\times_S X \tag{5}$$

(即 $(g,x)\mapsto(g,gx)$), 则易见 Φ 为 G-自同构, 其逆为 $(\mathrm{pr}_1,\rho\circ(\iota\times_S \mathrm{id}_X))$ (即 $(g,x)\mapsto(g,g^{-1}x)$), 而由定义 1 中的条件 i) 可见 (4) 成立。

反之, 若给定一个满足 (4) 的 G-自同构 Φ, 令

$$\rho=\mathrm{pr}_2\circ\Phi: G\times_S X\to X \tag{6}$$

则由 (4) 可见定义 1 中的条件 i) 满足。记 $\Phi_0: X\to X$ 为 Φ 通过 $o: S\to G$ 的拉回 (为 X 的 S-自同构)。对 (4) 通过 $o\times_S o: S\to G\times_S G$ 拉回, 则得到 $\Phi_0=\Phi_0\circ\Phi_0$, 故 $\Phi_0=\mathrm{id}_X$, 这说明定义 1 中的条件 ii) 也满足。证毕。

对任意 S-概形 X 记 $\mathrm{Aut}(X/S)$ 为 X 的 S-自同构组成的群, 易见 $T\mapsto \mathrm{Aut}(X\times_S T/T)$ 给出一个群预层

$$\mathfrak{Aut}_{X/S}:\ \mathfrak{Sch}_S\to((\mathrm{groups})) \tag{7}$$

由引理 1 易见一个 S-群概形 G 在 X 上的一个作用等价于一个群预层自然变换 $\underline{G}\to\mathfrak{Aut}_{X/S}$ (习题 7)。

2. 安定子

若 G 为 S-群概形, ρ 为 G 在 S-概形 X 上的作用, 如定义 1 那样记

$$\alpha=\alpha_{G,X}=\alpha_\rho=(\rho,\mathrm{pr}_2): G\times_S X\to X\times_S X \tag{1}$$

(用预层的语言为 $(g,x)\mapsto(gx,x)$)。当 $X=G$ 而 ρ 为左乘作用时, 这个定义与 (1.1.1) 一致。

对于一个作用 $\rho: G\times_S X\to X$, 令 H 为拉回

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ G\times_S X & \xrightarrow{\alpha} & X\times_S X \end{array} \tag{2}$$

称为 ρ 的**安定子**(*stabilizer*), 记为 Stab_ρ 或 $\mathrm{Stab}_G(X)$。易见它在每个点 $x\in X$ 上的纤维就是 x 的安定子群概形 $(\{g|gx=x\})$。

命题 1. 设 X 为分离 S-概形, ρ 为 S-群概形 G 在 X 上的作用, $H=\mathrm{Stab}_\rho$。

i) H 是 X-群概形 $G\times_S X$ 的闭子群概形, 且 $\alpha_{G,X}$ 与 $\alpha_{G,X}$ 的拉回 (作为 X-概形) 同构于 $G\times_S H$。

ii) 设 $\phi: G'\to G$ 为 S-群概形的同态, $\rho': G'\times_S X\to X$ 为 ϕ 诱导的作用, $H'=\mathrm{Stab}_{\rho'}$, 则 ϕ 诱导典范的 X-群概形同态 $H'\to H$, 其核同构于 $\ker(\phi)\times_S X$。

iii) 设 $f: X\to Y$ 为 S-概形的分离态射, ρ_Y 为 G 在 Y 上的作用, 使得 f 与 G 的作用相容, 则 H 为 $\mathrm{Stab}_{\rho_Y}\times_Y X$ 的闭子群概形。

iv) 若 ρ 是可迁的则 H 在 X 上平坦。

v) 若 $G\to S$ 是紧的则 $\alpha_{G,X}$ 是紧的, 从而 $H\to X$ 是紧的。

证. i) 由 $X\to S$ 分离可见 H 是 $G\times_S X$ 的闭子概形。

注意对任意 $T\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$ 及任意 $x\in\underline{X}(T)$ 有 $\underline{G\times_S X}(x)=\{(g,x)|g\in\underline{G}(T)\}$, 作为群它与 $\underline{G}(T)$ 同构; 而

$$\underline{H}(x)=\{(g,x)|g\in\underline{G}(T),gx=x\}\subset\underline{G\times_S X}(x) \tag{3}$$

由此可见 H 具有 X-群概形结构, 且嵌入 $H\hookrightarrow G\times_S X$ 为群概形同态。

设 L 为 $\alpha_{G,X}$ 与 $\alpha_{G,X}$ 的拉回, 则可将 L 看作 $G\times_S G\times_S X$ 的闭子概形。对任意 $T\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$ 及任意 $x\in\underline{X}(T)$ 有

$$\underline{L}(x)=\{(g,g',x)|gx=g'x\} \tag{4}$$

令 β 为 $G\times_S G\times_S X$ 作为 X-概形的自同构 $(g,g',x)\mapsto(g,gg',x)$, 则由 (4) 可见 $\beta(G\times_S H)=L$, 从而 $L\cong G\times_S H$。

ii) 由 (3) 可见对任意态射 $t:T\to S$ 及任意 $x\in \underline{X}(T)$ 有 $\underline{H'}(x)=\{(g',x)|g'\in \underline{G'}(T),g'x=x\}$, 由此可见 ϕ 诱导群同态 $\underline{\phi}(x):\underline{H'}(x)\to \underline{H}(x)$, 它显然是函子性的, 故诱导 X-群概形的同态 $H'\to H$。易见

$$\ker(\underline{\phi}(x))\cong\{(g',x)|g'\in \underline{G'}(t),\underline{\phi}(g')=\underline{o_G}(t)\}\cong \underline{\ker(\phi)}(t) \qquad (5)$$

故 $\ker(H'\to H)\cong\ker(\phi)\times_S X$。

iii) 注意 $\mathrm{Stab}_{\rho_Y}\times_Y X$ 同构于 $H\hookrightarrow G\times_S Y$ 与 $\mathrm{id}_G\times_S f$ 的拉回, 而由交换图

$$\begin{array}{ccc} G\times_S X & \xrightarrow{\alpha_{G,X}} & X\times_S X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times_S f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f\times_S f} \\ G\times_S Y & \xrightarrow{\alpha_{G,Y}} & Y\times_S Y \end{array} \qquad (6)$$

又可见它同构于 $(X\times_S X)_{f\times_S f}\times_{\Delta_Y}Y\cong X\times_Y X$ 与 $G\times_S X$ 在 $X\times_S X$ 上的拉回。这样闭嵌入 $\Delta:X\to X\times_Y X$ 就诱导闭嵌入 $\phi:H\hookrightarrow \mathrm{Stab}_{\rho_Y}\times_Y X$。我们来说明 ϕ 是 X-群概形的同态。由 (3) 可见对任意态射 $t:T\to S$, 任意 $x\in\underline{X}(T)$ 及任意 $(g,x)\in\underline{H}(x)$, $\underline{\phi}(x)(g,x)$ 等于 $(g,f(x))$ 在 $\underline{G\times_S X}(x)$ 中的原象, 即 (g,x) 本身。

iv) 注意 $\alpha_{G,X}$ 通过 $\Delta_X:X\to X\times_S X$ 的拉回 $H\to X$ 等于嵌入 $H\hookrightarrow G\times_S X$ 与 $\mathrm{pr}_2:G\times_S X\to X$ 的合成, 由所设 $\alpha_{G,X}$ 是忠实平坦的, 故 $H\to X$ 也是忠实平坦的。

v) 若 $G\to S$ 是紧的则 $\mathrm{pr}_{23}:G\times_S X\times_S X\to X\times_S X$ 是紧的。令 γ 为 $G\times_S X\times_S X$ 的自同构 $(g,x,y)\mapsto(g,gx,y)$, 则因 $X\to S$ 是分离的, $\mathrm{pr}_{23}\circ\gamma\circ(\mathrm{id}_G\times_S\Delta_X):G\times_S X\to X\times_S X$ 也是紧的, 但这个态射是 $(g,x)\mapsto(g,x,x)\mapsto(g,gx,x)\mapsto(gx,x)$, 即 $\alpha_{G,X}$。证毕。

推论 1. 设 G 为 S-群概形, ρ 为 G 在 S-概形 X 上的作用。若 α 是紧的 (特别地若 $G\to S$ 是紧的), 则 ρ 是自由的当且仅当 $\mathrm{Stab}_\rho\cong X$。

证. 若 $G\to S$ 是紧的, 则由命题 1.v) 知 α 是紧的。记 $H=\mathrm{Stab}_\rho$。

若 ρ 是自由的, 即 α 是闭嵌入, 则 $H\to X$ 是闭嵌入, 而由 $\alpha\circ(o\times_S X)=\Delta$ 可见 id_X 经过 H, 从而 $H\to X$ 是同构。

反之, 若 $H\to X$ 是同构, 则由命题 1.i) 可见 α 与 α 的拉回同构于 $G\times_S X$, 从而由引理 I.2.1 可见 α 是闭嵌入。证毕。

例 4. 设 k 为代数闭域, $G = GL_{n/k}$, ρ 为 G 在 $X = \mathbb{A}_k^n$ 上的典范作用, 则 Stab_ρ 在 $0 \in \mathbb{A}_k^n$ 上的纤维 (即 0 的安定子群概形) 为 G, 而在其他闭点上的纤维都是 G 的真子群概形。令 $U = X - \{0\}$, 则由例 1 和命题 1.iv) 可见 $\mathrm{Stab}_\rho \times_X U$ 在 U 上平坦。

习题

1. 证明例 1 中的断言。

2. 设 $\rho : G \times_S X \to X$ 为 S-群概形 G 在 S-概形 X 上的作用, $\phi : G' \to G$ 为 S-群概形的同态, 证明 $\rho \circ (\phi \times_S \mathrm{id}_X) : G' \times_S X \to X$ 为 G' 在 X 上的作用。

3. 设 X, Y 为 S-概形, G 为 S-群概形, ρ_X, ρ_Y 分别为 G 在 X, Y 上的作用。验证 $(g, x, y) \mapsto (gx, gy)$ 为 G 在 $X \times_S Y$ 上的作用，且 G 的作用与 $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ 相容。特别地, ρ_X 诱导 G 在 $X \times_S X$ 上的作用, 且 G 的作用与 $\Delta_X : X \to X \times_S X$ 相容。

4. 设 X, Y, Z 为 S-概形, G 为 S-群概形, ρ_X, ρ_Y, ρ_Z 分别为 G 在 X, Y, Z 上的作用, S-态射 $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ 与 G 的作用相容。验证 G 在 $X \times_Z Y$ 上有诱导作用 (参看上题)，且嵌入 $X \times_Z Y \to X \times_S Y$ 与 G 的诱导作用相容。

5. 设 G 为 S-群概形, X 为 S-概形, ρ 为 G 在 X 上的自由作用。若 $Y \subset X$ 为闭子概形使得 $\rho|_{G \times_S Y}$ 经过 Y, 则 ρ 诱导 G 在 Y 上的一个作用 ρ_Y。证明 ρ_Y 也是自由作用。

6. 令 ρ 为 $GL_{n/\mathbb{Z}}$ 在 $End(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n/\mathbb{Z})$ $(\cong \mathbb{A}^{n^2})$ 上的共轭作用 (即 $(g, f) \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$), 这等价于一个 $\mathbb{Z}$-群概形同态 $\Phi : GL_{n/\mathbb{Z}} \to GL_{n^2/\mathbb{Z}}$。验证 Φ 的像同构于 $PGL_{n/\mathbb{Z}}$, 并证明 $GL_{n/\mathbb{Z}}$可以嵌入$PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$作为闭子群概形。

7. 设 X 为 S-概形而 G 为 S-群概形。证明 G 在 X 上的一个作用等价于一个群预层自然变换 $\underline{G} \to \mathfrak{Aut}_{X/S}$。

8. 设 S-群概形 G 可迁地作用于 S-概形 X 上。证明若 $X \to S$ 忠实平坦 (特别地若 X 为 G-挠子) 则 $G \to S$ 忠实平坦。

第 Ⅲ 章　群概形与作用的微积分

第 1 节　群概形的微积分

1. 不变微分

我们以下只考虑分离概形, 例如用 $\mathfrak{Sch}_S$ 记分离 S-概形的范畴。

设 $\pi: G \to S$ 为分离群概形。记 $\mathcal{M}$ 为闭嵌入 $o: S \to G$ 的定义理想层, 称 $\omega_{G/S} = o^*\mathcal{M}$ 为 G 的 (一阶) 不变微分层。注意 $\omega_{G/S}$ 是 S 上的拟凝聚层, 而当 S 为诺特概形且 π 为有限型时 $\omega_{G/S}$ 是 S 上的凝聚层。

命题 1. 自同构 α (见 (Ⅱ.1.1.1)) 诱导拟凝聚层的典范同构

$$\alpha^*: \Omega^1_{G/S} \cong \pi^*\omega_{G/S} \tag{1}$$

证. 令 $\mathcal{I}$ 为 $\Delta: G \to G \times_S G$ 的定义理想, $i = o \times_S \mathrm{id}_G: G \to G \times_S G$。我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\pi} & G & \xrightarrow{\mathrm{id}_G} & G \\ \downarrow{\scriptstyle o} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ G & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} & G \times_S G & \xrightarrow[\alpha]{\simeq} & G \times_S G \end{array} \tag{2}$$

注意左边的方框是拉回且 o 为 π 的截口, 可见 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}$ 同构于 i 的定义理想, 由右边的方框可见 $\alpha^*\mathcal{I}$ 也同构于 i 的定义理想, 故有

$$\pi^*\omega_{G/S} \cong \pi^*(o^*\mathcal{M}) \cong i^*(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}) \cong i^*(\alpha^*\mathcal{I}) \cong \Delta^*\mathcal{I} \cong \Omega^1_{G/S} \tag{3}$$

证毕。

在 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域) 的情形, 由此立得

推论 1. 设 G 为域 k 上的有限型群概形, $n = \dim_k \omega_{G/k}$, 则 $\Omega^1_{G/k} \cong O_G^{\oplus n}$, 且切层 $\mathcal{T}_{G/k} \cong O_G^{\oplus n}$。

由推论 1 和引理 I.2.1 立得

推论 2. 设 G 为域 k 上的有限型群概形。

i) 若 $\mathrm{ch}(k)=0$, 则 G 在 k 上光滑, 即为群簇。

ii) 若 $\mathrm{ch}(k)=p>0$ 而 $a_1,...,a_r\in\mathcal{M}O_{G,e}$ 在 $\omega_{G/k}$ 中的像为 k-线性无关的, 则所有 $a_1^{m_1}\cdots a_r^{m_r}\in O_{G,e}$ $(0\leqslant m_1,...,m_r<p)$ 在 k 上线性无关, 从而 $\dim_k(O_{G,e})\geqslant p^r$ (可能为 ∞)。特别地若 G 是有限的则 $\deg(G/k)\geqslant p^{\dim_k\omega_{G/k}}$。

例 1. 设 $G=\mathrm{Spec}R$ 为特征 $p>0$ 的域 k 上的无穷小群, 则 R 为局部环且 $M=\ker(o_G^*)$ 为幂零理想, 故 G 有非平凡切空间。取 M 的一个极小生成元组 $\{a_1,...,a_n\}$, 则 $R=k[a_1,...,a_n]$ 且 $a_1,...,a_n$ 生成 $\omega_{G/k}$。特别地, 若 $F_{G/k}=0$, 则由推论 2.ii) 可知 $R\cong k[x_1,...,x_n]/(x_1^p,...,x_n^p)$。

设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, $G=\mathrm{Spec}R$ 为 k 上的无穷小群。由例 1 可取 $m>0$ 使得 $M^{(p^m)}=0$, 换言之 $F_{G/k}^m=0$。对任意 $0\leqslant i\leqslant m$, 注意 $F_{G/k}^{i*}$ 的像为 $R^{p^i}\subset R$, 易见 $m^*(R^{p^i})\subset R^{p^i}\otimes_k R^{p^i}$, $\iota^*(R^{p^i})\subset R^{p^i}$, $o^*(R^{p^i})=k$, 故 $G_i=\mathrm{Spec}(R^{p^i})$ 具有 k-无穷小群结构使得 $G\to G_i$ 为同态。令 $x_1,...,x_r\in M$ 为 M 的一个极小生成元组, 则它们在 $\omega_{G/k}$ 中的像为 $\omega_{G/k}$ 的一组 k-基, 而 R^{p^i} 的极大理想由 $x_1^{p^i},...,x_r^{p^i}$ 生成, 故 $\omega_{G_i/k}$ 在 k 上由 $x_1^{p^i},...,x_r^{p^i}$ 的像生成。不妨设 $x_1^{p^i},...,x_{s_i}^{p^i}$ $(s_i\leqslant r)$ 组成 $\omega_{G_i/k}$ 的一组 k-基。记 $q_i:G_i\to G_{i+1}$ 为 $R^{p^{i+1}}\hookrightarrow R^{p^i}$ 给出的群概形同态, 则 $q_i^*:\omega_{G_{i+1}/k}\to\omega_{G_i/k}$ $(i>0)$ 显然是零同态, 故由命题 1 可知 $q_i^*\Omega^1_{G_{i+1}/k}\to\Omega^1_{G_i/k}$ 是零同态, 从而由正合列 $q_i^*\Omega^1_{G_{i+1}/k}\to\Omega^1_{G_i/k}\to\Omega^1_{G_i/G_{i+1}}\to 0$ 有 $\Omega^1_{G_i/k}\cong\Omega^1_{G_i/G_{i+1}}$, 为自由 R^{p^i}-模。仿照例 1 的讨论可见 R^{p^i} 在 $R^{p^{i+1}}$ 上为 $x_1^{n_1p^i}\cdots x_{s_i}^{n_{s_i}p^i}$ $(0\leqslant n_1,...,n_{s_i}<p)$ 生成的自由模。对 i 用逆向归纳法, 可设 $R^{p^{i+1}}=k[x_1^{p^{i+1}},...,x_{s_{i+1}}^{p^{i+1}}]$, 这样每个 $x_j^{p^i}$ $(j>s_i)$ 都可以表为 $x_1^{p^i},...,x_{s_i}^{p^i}$ 的系数在 k 中的多项式 $f_j(x_1^{p^i},...,x_{s_i}^{p^i})$。由于 k 是完全域, 存在 k 上的多项式 g_j 使得 $f_j(x_1^{p^i},...,x_{s_i}^{p^i})=g_j(x_1,...,x_{s_i})^{p^i}$, 将 x_j 换为 $x_j-g_j(x_1,...,x_{s_i})$ 就化为 $x_j^{p^i}=0$ $(j>s_i)$ 的情形。这样由归纳法可得

$$R\cong k[x_1,...,x_r]/(x_1^{p^{m_1}},...,x_r^{p^{m_r}})\quad(m_1\geqslant...\geqslant m_r)\tag{4}$$

注意 $\ker(G\to G_i)=G[F^i](\forall i)$。总之有

推论 3. 设 $G = \mathrm{Spec}R$ 为特征 $p > 0$ 的完全域 k 上的无穷小群, 则

i) R 作为 k-代数的结构如 (4), 从而 $\deg(G/k)$ 为 p 的幂;

ii) 对任意 $i > 0$, $R^{p^i} \subset R$ 的谱 $G_i = \mathrm{Spec}(R^{p^i})$ 具有 k-群概形结构, 使得投射 $G \to G_i$ 为忠实平坦同态, 而 $\ker(G \to G_i) = G[F^i]$。

若 $f : G \to G'$ 为 k-群概形的忠实平坦同态而 $H = \ker(f)$, 则称 G' 为 G 模 H 的*商群概形*, 并记 $G' = G/H$。我们后面将看到 G/H 是群概形范畴中的商 (见命题 VI.1.6)。

命题 1 不难推广到高阶微分。对任意正整数 n 记

$$M^n_{G/S} = o^{-1}(O_G/\mathcal{M}^{n+1}) \tag{5}$$

称为 G 的 (阶不超过 n 的) *不变微分层*。由 (2) 的左方框为拉回可见

$$\ker(i^*) \cong \mathrm{pr}_1^*\ker(o^*) = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{M} \tag{6}$$

由此可见对于阶不超过 n 的相对微分层 $P^n_{G/S}$ (见 I.1.1) 有

$$\begin{aligned} P^n_{G/S} &= \Delta^{-1}(O_{G\times_S G}/\ker(\Delta^*)^{n+1}) \\ &\cong i^{-1}(O_{G\times_S G}/\ker(i^*)^{n+1}) \\ &\cong i^{-1}(O_{G\times_S G}/\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}^{n+1}) \\ &\cong \pi^*(o^{-1}(O_G/\mathcal{M}^{n+1})) = \pi^* M^n_{G/S} \end{aligned} \tag{7}$$

注意 α 是右 G-自同构, 故 α^* 诱导的 (7) 是右 O_G-代数同构。对称地, 令

$$\alpha' = (\mathrm{pr}_1, m) : G \times_S G \to G \times_S G \tag{8}$$

(即 $(g, g') \mapsto (g, gg')$), 则同样可见 α' 诱导从 $P^n_{G/S}$ 到 $\pi^* M^n_{G/S}$ 的典范左 O_G-代数同构。总之有

命题 2. 对任意 $n \geqslant 0$, α 诱导右 O_G-代数的典范同构

$$\alpha^* : P^n_{G/S} \cong \pi^* M^n_{G/S} \tag{9}$$

其中 $P^n_{G/S}$ 为 G 在 S 上的阶不超过 n 的相对微分层, $M^n_{G/S}$ 为 G 的阶不超过 n 的不变微分层。而 α' 诱导左 O_G-代数的典范同构

$$\alpha'^* : P^n_{G/S} \cong \pi^* M^n_{G/S} \tag{10}$$

注意对 $P^n_{G/S}$ 的一个局部截口 $\overline{a\otimes_{O_S}b}$ (a,b 为 O_G 的局部截口), $\alpha^*(\overline{a\otimes_{O_S}b})$ 为 $m^*(a)(1\otimes\otimes_{O_S}b)$ 对第一个因子模 $\mathcal{M}^{n+1}$, 而 $\alpha'^*(\overline{a\otimes_{O_S}b})$ 为 $m^*(b)(a\otimes\otimes_{O_S}1)$ 对第二个因子模 $\mathcal{M}^{n+1}$。

注意 $M^0_{G/S}\cong O_S$, 我们有正合列

$$0\to\omega_{G/S}\to M^1_{G/S}\xrightarrow{o^*}O_S\to 0 \tag{11}$$

而 o^* 有一个分拆 π^*, 故命题 1 是命题 2 的直接推论。

2. 不变微分算子与李代数

定义 1. 设 $\pi:G\to S$ 为分离群概形,一个整体微分算子 $D\in\mathrm{Diff}(O_G/S)=\Gamma(S,Diff(O_G/S))$ 称为*左不变的*, 如果下图交换:

$$\begin{array}{ccc} O_G & \xrightarrow{D} & O_G \\ \downarrow{\scriptstyle m^*} & & \downarrow{\scriptstyle m^*} \\ m_*O_{G\times_S G} & \xrightarrow{m_*\mathrm{pr}_2^*(D)} & m_*O_{G\times_S G} \end{array} \tag{1}$$

(这可以理解为 $m^*\circ D=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_{O_S}D)\circ m^*$)。

若 $D,D'\in\Gamma(S,Diff(O_G/S))$ 都是左不变的, 易见 $D\circ D'$ 亦然, 故所有左不变整体微分算子组成一个环 $\mathrm{Diff}(G/S)$。层 $U\mapsto\mathrm{Diff}(G\times_S U/U)$ (对任意开集 $U\subset S$) 为 O_S-代数层, 称为 G 的 (左) *不变微分算子层*, 记为 $Diff(G/S)$; 其中次数不超过 n 的微分算子组成一个 O_S-子模层 $Diff^n(G/S)\subset Diff(G/S)$; 而其中所有导数 (即 1 阶左不变微分算子) 组成一个李子代数层, 称为 G 的*李代数层*, 记为 $Lie(G/S)$。这样 $\Gamma(S,Lie(G/S))$ 是环 $\Gamma(S,O_S)$ 上的李代数, 记为 $\mathrm{Lie}(G/S)$。此外, 若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数), 则 $Lie(G/S)$ 为 p-李代数子层, 即对任意 $\theta\in Lie(G/S)(U)$ 有 $\theta^p\in Lie(G/S)(U)$ (其中 $U\subset S$ 为任意开子集)。

仍用上面的记号, 为简单起见设 $S=\mathrm{Spec}(R)$, 并将 $M^n_{G/R}$ 理解为 R-模。记 $d:O_G\to P^n_{G/R}$ 为 pr_2^* 诱导的微分算子 (即 $a\mapsto\overline{1\otimes_R a}$)。对任意 $\bar{D}\in Hom_R(M^n_{G/R},R)$, 令

$$\eta(\bar{D})=\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}\in Hom_{O_G}(O_G\otimes_R M^n_{G/R},O_G) \tag{2}$$

并令

$$\theta(\bar{D}) = \eta(\bar{D}) \circ \alpha'^* \in Hom_{O_G}(P^n_{G/R}, O_G) \tag{3}$$

令 $\psi(\bar{D}) = \theta(\bar{D}) \circ d$, 则有 $\psi(\bar{D}) \in \mathrm{Diff}^n(O_G/R)$, 这定义一个 O_S-模层同态

$$\psi : \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \to Diff^n(O_G/S) \tag{4}$$

注意 $\mathrm{pr}_2 \circ \alpha' = m$, 故

$$\psi(\bar{D}) = (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R \bar{D}) \circ m^* \tag{5}$$

我们来证明 $\psi(\bar{D}) \in \mathrm{Diff}^n(G/R)$, 为方便起见将 (1) 表为

$$m^* \circ D = (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R D) \circ m^* \tag{6}$$

对 $D = \psi(\bar{D})$ 有

$$\begin{aligned} m^* \circ D &= m^* \circ (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R \bar{D}) \circ m^* \\ &= (\mathrm{id}_{O_{G\times_R G}} \otimes_R \bar{D}) \circ (m^* \otimes_R \mathrm{id}_{O_G}) \circ m^* \\ &= (\mathrm{id}_{O_{G\times_R G}} \otimes_R \bar{D}) \circ (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R m^*) \circ m^* \\ &= (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R D) \circ m^* \end{aligned} \tag{7}$$

即 D是左不变的。反之,若 $D \in \mathrm{Diff}^n(O_G/R)$满足(6),令 $\tilde{D} \in Hom_{O_G}(P^n_{G/R}, O_G)$ 为 D 所对应的同态。注意 α'^* 为左 O_G-模同构, 故有 $o^*P^n_{G/R} \cong M^n_{G/R}$。令

$$\bar{D} = o^*\tilde{D} \in Hom_R(M^n_{G/R}, R) \tag{8}$$

记 $i' = \mathrm{id}_G \times_S o : G \to G \times_S G$, 注意 α'^* 由 α' 和 i' 诱导。由 $m \circ i' = \mathrm{id}_G$ 有

$$\begin{aligned} D &= i'^* \circ m^* \circ D \\ &= i'^* \circ (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R D) \circ m^* \\ &= (\mathrm{id}_{O_G} \otimes_R o^*\tilde{D}) \circ m^* = \psi(\bar{D}) \end{aligned} \tag{9}$$

由 (7) 和 (9) 可见 ψ 为从 $Hom_R(M^n_{G/R}, R)$ 到 $\mathrm{Diff}^n(G/R)$ 的一一映射, 故为同构。

下面再来看左不变微分算子的合成。记 $m_{123}: G\times_R G\times_R G\to G$ 为乘法态射 (即 $(x,y,z)\mapsto xyz$)。对任意 $\bar{D},\bar{D}'\in Hom_R(M^n_{G/R},R)$, 注意

$$\begin{aligned}\psi(\bar{D})\circ\psi(\bar{D}') &= (\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D})\circ m^*\circ(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}')\circ m^*\\ &= (\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m^*_{123}\\ &= (\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R m^*)\circ m^* \qquad (10)\\ &= (\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R((\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m^*))\circ m^*\\ &= \psi((\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m^*)\end{aligned}$$

注意 $\psi(\bar{D})\circ\psi(\bar{D}')$ 是阶不超过 $2n$ 的微分算子, 故对应于一个 O_G-同态 $\delta: P^{2n}_{G/R}\to O_G$, 由此得

$$(\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m^* = o^*\delta\in Hom_R(M^{2n}_{G/R},R) \qquad (11)$$

特别地, 若 G 是有限平坦无穷小群 (此时 $\mathcal{M}$ 是幂零的), 则 (10) 说明对 $n\gg 0$, $Hom_R(M^n_{G/R},R)$ 恰为 O_G 作为 O_S-双代数层的对偶 O_G^D (见 Ⅱ.1.1), 故 $Diff(G/R)$ 同构于 O_G^D。

若 $f: G\to G'$ 为 R-群概形的同态, 则 f 诱导典范的 R-模同态 $Hom_R(M^n_{G/R},R)\to Hom_R(M^n_{G'/R},R)$, 从而由 (10) 可见 f 诱导典范的 R-代数同态 $f_*: Diff(G/R)\to Diff(G'/R)$。总之有

定理 1. 设 S 为诺特概形而 $\pi: G\to S$ 为分离群概形。

i) 对任意非负整数 n, α' 诱导典范的 O_S-模层同构

$$\psi: \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S},O_S)\xrightarrow{\simeq} Diff^n(G/S) \qquad (12)$$

其中每个局部截口 $\bar{D}\in\mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S},O_S)(U)$ ($U\subset S$ 为开集) 对应于 $\psi(\bar{D})=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_{O_S}\bar{D})\circ m^*$, 而每个 $D\in Diff^n(G/S)(U)$ 对应于 $\psi^{-1}(D)=o^*\tilde{D}$, 其中 $\tilde{D}\in\mathcal{H}om_{O_G}(P^n_{G/S},O_G)(\pi^{-1}(U))$ 为 D 所对应的同态。故当 $M^n_{G/S}$ 为凝聚层时 (特别地当 π 为有限型时) $Diff^n(G/S)$ 是凝聚层。左不变微分算子层 $Diff(G/S)$ 是所有 $Diff^n(G/S)$ 的并 (同构于 $\varinjlim_n Diff^n(G/S)$)。

ii) G 的李代数层 $Lie(G/S)$ 为 $Diff(G/S)$ 的 O_S-李代数子层, 且作为 O_S-模层

$$\psi^{-1}: Lie(G/S)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{H}om_{O_S}(\omega_{G/S},O_S) \qquad (13)$$

故 $Lie(G/S)$ 为拟凝聚层，且当 π 为有限型时是凝聚层。

此外，若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数)，则 $Lie(G/S)$ 为 $Diff(G/S)$ 的 p-李代数子层。

iii) 对任意开集 $U \subset S$ 及任意 $\bar{D}, \bar{D}' \in \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S)(U)$ 有

$$\psi(\bar{D}) \circ \psi(\bar{D}') = \psi((\bar{D} \otimes_{O_S} \bar{D}') \circ m^*) \tag{14}$$

由此可见若 G 是交换的，则 $Diff(G/S)$ 为交换代数。

特别地，若 G 是有限平坦无穷小群，则 $Diff(G/S)$ 同构于 O_G 作为 O_S-双代数层的对偶 O_G^D，而当 G 为有限平坦交换无穷小群时它同构于 G^D 的结构层。

iv) 若 $\bar{D}, \bar{D}' \in \mathcal{H}om_{O_S}(\omega_{G/S}, O_S)(U)$，则 $Lie(G/S)$ 中的李积

$$[\psi(\bar{D}), \psi(\bar{D}')] = \psi((\bar{D} \otimes_R \bar{D}' - \bar{D}' \otimes_R \bar{D}) \circ m^*) \tag{15}$$

特别地，若 G 是交换的，则 $Lie(G/S)$ 为交换李代数。

v) 若 $f : G \to G'$ 为 S-群概形的同态，则 f 诱导典范的 O_S-代数层同态 $f_* : Diff(G/S) \to Diff(G'/S)$，与典范 O_S-模层同态 $f^* : \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \to \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G'/S}, O_S)$ 一致。而典范 O_S-模层同态 $f^* : \mathcal{H}om_{O_S}(\omega_{G/S}, O_S) \to \mathcal{H}om_{O_S}(\omega_{G'/S}, O_S)$ 给出典范的 O_S-李代数层同态 $f_* : Lie(G/S) \to Lie(G'/S)$，它在 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形时是 p-李代数层同态。

若 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域)，则 $Hom_k(\omega_{G/k}, k)$ 可以看作 G 在 (单位) 点 $e \in G$ 处的切空间 $T_{G,e}$，而 $Hom_k(M^n_{G/k}, k)$ 可以看作 G 在点 $e \in G$ 处的阶不超过 n 的微分算子组成的线性空间。直观地一个切向量 $\bar{D} \in T_{G,e}$ 所对应的左不变导数 $\psi(\bar{D})$ 可以理解为“通过将 $\bar{D}$ 平移到各点所得到的向量场”。

注 1. 对称地可以定义“右不变微分算子”，将 (1) 中的 pr_2 换成 pr_1 即可。由此可以建立与定理 1 对称的定理：令 $Diff'^n(G/S)$ 为阶不超过 n 的右不变微分算子层，则 α (以及 i) 诱导典范 O_S-模同构 $\psi' : \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \to Diff'^n(G/S)$，对任意 $\bar{D} \in Hom_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S)$ 有

$$\psi'(\bar{D}) = (\bar{D} \otimes_R \mathrm{id}_{O_G}) \circ m^* \tag{5'}$$

但合成次序不同: $\psi'((\bar{D}\otimes_{O_S}\bar{D}')\circ m^*)=\psi'(\bar{D}')\circ\psi'(\bar{D})$。为说明这一点, 令 $m_{21}:G\times_S G\to G$ 为态射 $(g,g')\mapsto g'g$, 则 $\psi'(\bar{D})=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D})\circ m_{21}^*$。注意 $m_{21}\circ(m_{21}\times_S\mathrm{id}_G)=m_{21}\circ(\mathrm{id}_G\times_S m_{21})$, 可见

$$\begin{aligned}\psi'(\bar{D})\circ\psi'(\bar{D}')&=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D})\circ m_{21}^*\circ(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}')\circ m_{21}^*\\&=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m_{321}^*\\&=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R m_{21}^*)\circ m_{21}^*\qquad(10')\\&=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R((\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m_{21}^*))\circ m_{21}^*\\&=\psi'((\bar{D}\otimes_R\bar{D}')\circ m_{21}^*)=\psi'((\bar{D}'\otimes_R\bar{D})\circ m^*)\end{aligned}$$

其中 $m_{321}:G\times_S G\times_S G\to G$ 为态射 $(g,g',g'')\mapsto g''g'g$。

由此可见 $\psi(\bar{D})\mapsto\psi'(\bar{D})$ 给出一个环层反同构 $\phi:Diff(G/S)\to Diff'(G/S)$。若令 $Lie'(G/S)$ 为右不变导数层, 则 ϕ 给出从 $Lie(G/S)$ 到 $Lie'(G/S)$ 的李代数反同构, 但我们可以更改定义 $Lie(G/S)\to Lie'(G/S)$ 为 $-\phi$, 这样就是李代数层的同构了。

例 2. 设 k 为代数闭域, G 为 k 上的有限型群概形。

i) 若 $G=\mathbb{G}_{a/k}$, 可取坐标函数 t 使得 $m^*(t)=t\otimes_k 1+1\otimes_k t$, 故由定理 1.i) 可见 $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{a/k}/k)$ 由 $\frac{d}{dt}$ 生成; 若 $G=\mathbb{G}_{m/k}$, 可取坐标函数 t 使得 $m^*(t)=t\otimes_k t$, 故由定理 1.i) 可见 $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{m/k}/k)$ 由 $t\frac{d}{dt}$ 生成。

若 $\mathrm{ch}(k)=p>0$, 则对闭子群概形 $\alpha_p\subset\mathbb{G}_{a/k}$ 仍可取 t 使得 $m^*(t)=t\otimes_k 1+1\otimes_k t$, 从而 $\mathrm{Lie}(\alpha_p/k)$ 由 $\frac{d}{dt}$ 生成; 而对闭子群概形 $\mu_p\subset\mathbb{G}_{m/k}$ 仍可取 t 使得 $m^*(t)=t\otimes_k t$, 从而 $\mathrm{Lie}(\mu_p/k)$ 由 $t\frac{d}{dt}$ 生成。注意 $(\frac{d}{dt})^p=0$ 而 $(t\frac{d}{dt})^p=t\frac{d}{dt}$, 这说明 $\mathrm{Lie}(\alpha_p/k)$ 和 $\mathrm{Lie}(\mu_p/k)$ 作为 p-李代数是不同构的, 尽管它们作为李代数是同构的。

ii) 若 $G=GL_{n/k}$, 可取坐标 x_{ij} $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 如例 Ⅱ.1.iii)。注意 G 的单位元为 n 阶单位方阵 I, 而 $O_{G,I}$ 的极大理想由 $x_{ij}-\delta_{ij}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 生成。故一个切向量 $\bar{D}\in T_{G,I}$ 可以看作一个 $n\times n$ 矩阵 $(\bar{D}(x_{ij}))$。令 $\bar{D}_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I$, $D_{ij}=\psi(\bar{D}_{ij})$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 则由 $m^*(x_{ij})=\sum_{l=1}^n x_{il}\otimes_k x_{lj}$ 易得

$$D_{ij}(x_{lm})=\delta_{jm}x_{li}\quad(1\leqslant l,m\leqslant n)\tag{16}$$

由此得

$$D_{ij}=\sum_{l=1}^{n}x_{li}\frac{\partial}{\partial x_{lj}}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n)\tag{17}$$

在李群论中通常用下面的方法使得 (17) 较容易掌握。令 $V\subset O_G(G)$ 为所有线性齐次函数 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}$ $(a_{ij}\in k)$ 组成的 k-线性空间, 则由 (16) 可见 $D_{ij}(V)\subset V$, 即 D_{ij} 线性地作用于 V 上。这个作用可以简单地表为在矩阵 (x_{ij}) 上的作用, 即将第 i 列移到第 j 列而将其他列化为 0, 这相当于用 $E_{ij}(1)$ 右乘, 其中 $E_{ij}(1)$ 为第 i 行 j 列的元为 1 而其他元为 0 的矩阵。由此可见对任意 $\bar{D}\in T_{G,I}$ 有

$$\psi(\bar{D})(x_{ij})=(x_{ij})(\bar{D}(x_{ij}))\tag{18}$$

此外对任意 $\bar{D}'\in T_{G,I}$ 有

$$[\psi(\bar{D}),\psi(\bar{D}')](x_{ij})=(x_{ij})[(\bar{D}(x_{ij})),(\bar{D}'(x_{ij}))]\tag{19}$$

即可将 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 的李积理解为矩阵的李积, 从而 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 同构于 n 阶方阵组成的李代数。

iii) 若 $G=SL_{n/k}$, 注意它是由方程 $\det(x_{ij})=1$ 定义的 $GL_{n/k}$ 的闭子群概形。设 $\bar{D}=\sum\limits_{i,j}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I\in T_{GL_{n/k},I}$, 则 $\bar{D}\in T_{G,I}$ 当且仅当

$$\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\det(x_{ij})\Big|_I=0\tag{20}$$

注意 (20) 的左边等于 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}\delta_{ij}$, 故 $\mathrm{Lie}(SL_{n/k}/k)$ 同构于迹为 0 的 n 阶方阵组成的李代数。

当 S 为 $\mathbb{Q}$-概形时, 由下面的命题不难理解 $Diff(G/S)$ 的结构。

命题 3. 设 k 为特征 0 的域, G 为 k 上的有限型群概形。则 $\mathrm{Diff}(G/k)$ 典范同构于 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 的泛包络代数。

证. 令 U 为 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 的泛包络代数, 并令 $U_n\subset U$ 为次数 $\leqslant n$ 的元素的集合 $(n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$。则 $\mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(G/k)}$ 诱导典范同态 $\phi:U\to\mathrm{Diff}(G/k)$ 使得 $\phi(U_n)\subset\mathrm{Diff}^n(G/k)$。

令 $r=\dim(G)$, 且令 $P\subset O_{G,e}$ 为极大理想。由推论 2.i) 可知 G 是光滑的, 故存在 P 的一组生成元 $x_1,...,x_r$, 因此 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 具有一组 k-基 $D_1,...,D_r$ 使得 $D_i(x_j)|_e=\delta_{ij}$ $(1\leqslant i,j\leqslant r)$。由引理 I.2.1.i) 可见 $x_1,...,x_r$ 在 k 上代数无关。注意

$$\dim_k U_n=\dim_k \mathrm{Diff}^n(G/k)=\binom{n+r}{r} \tag{21}$$

故只需证明 ϕ 是单射。

对任意指标 $i=(i_1,...,i_s)$ $(i_1,...,i_s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, 记 $D^i=D_1^{i_1}\circ\cdots\circ D_r^{i_r}\in U$。任一元 $D\in U$ 可唯一表为形如 $D=\sum\limits_i a_iD^i$ $(a_i\in k)$, 在这个和中我们取字典序。若 $D\neq 0$, 令 a_jD^j 为 D 中 (在字典序下) 的首项, 则不难验证

$$\phi(D)(x_1^{j_1}\cdots x_r^{j_r})\equiv j_1!\cdots j_r!a_j \pmod P \tag{22}$$

故 $\phi(D)\neq 0$。证毕。

但当 G 为特征 $p>0$ 的域上的群概形时, $\mathrm{Diff}(G/k)$ 的结构与命题 3 的情形大不相同, 因为由 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 的 p-李代数结构, 易见 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 在 $\mathrm{Diff}(G/k)$中生成的 k-子代数在 k 上是有限秩的, 故一般不等于$\mathrm{Diff}(G/k)$。下面的例子可以更清楚地说明这种情形下 $\mathrm{Diff}(G/k)$ 的结构。

例 3. 设 k 为特征 $p>0$ 的代数闭域, G 为 k 上的有限型群概形。用定理 1 的记号。对任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 记 $H_n=G[F^n]$ (即 $\ker(F^n_{G/k})$), 为 G 的无穷小子群。注意闭嵌入 $i_n: H_n\hookrightarrow G$ 的理想层为 $\mathcal{M}^{(p^n)}$, 即 O_G 中由 $\mathcal{M}$ 的所有局部截口的 p^n 次幂生成的子层。由 $\mathcal{M}^{p^n}\supset\mathcal{M}^{(p^n)}$ 可见 $M^{p^n}_{G/k}$ 是 H_n 的结构层的一个商层, 故由定理 1 可见典范同态 $i_{n*}:\mathrm{Diff}(H_n/k)\to\mathrm{Diff}(G/k)$ 的像包含 $\mathrm{Diff}^{p^n-1}(G/k)$。因此

$$\mathrm{Diff}(G/k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{im}(i_{n*}) \tag{23}$$

现在考虑 G 是 g 维阿贝尔簇的情形 (参看第 Ⅶ 章或略过)。若 G 是正常的, 有 $H_n\cong\mu^g_{p^n}$。由于 $H_n^D\cong(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ 的结构环同构于 k 的 p^{gn} 个拷贝的直积, 有

$$\mathrm{Diff}(G/k)\cong k[x_1,x_2,...]/(x_i^2-x_i,x_ix_j|i\neq j\in\mathbb{Z}_{>0}) \tag{24}$$

若 G 为甚特殊的, 则每个 H_n^D 都是无穷小的, 故 $\mathrm{Diff}(G/k)$ 为局部环, 且对任意 $D \in \mathrm{Diff}(G/k)$, 存在 $a \in k$ 使得 $D - a$ 是幂零的。注意每个 $\mathrm{Diff}(H_n/k)$ 同构于 $k[x_1, ..., x_g]/I_n$, 其中 $I_n = (x_1^{p^{n_1}}, ..., x_g^{p^{n_g}})$ $(n_1 + \cdots + n_g = gn)$ 为分次理想, 而 $\mathrm{Diff}(H_{n-1}/k) \to \mathrm{Diff}(H_n/k)$ 的像是由一些 $x_1^{p^{r_1}}, ..., x_g^{p^{r_g}}$ $(r_1 + \cdots + r_g = g)$ 生成的 k-子代数。故

$$\mathrm{Diff}(G/k) \cong k[x_1^{p^{-i}}, ..., x_g^{p^{-i}} | i \in \mathbb{Z}_{>0}]/(x_1, ..., x_g) \tag{25}$$

对一般的 G, $\mathrm{Diff}(G/k)$ 的结构是上面两种类型 (24) 和 (25) 的混合。

设 $S = \mathrm{Spec}(R)$ 为诺特概形, $G = \mathrm{Spec}(A)$ 为有限平坦 S-群概形, 则一个导数 $\theta \in Der_R(A, R)$ 可以看作 $A^D = Hom_R(A, R)$ 的一个元, 而 $\theta(ab) = \bar{a}\theta(b) + \bar{b}\theta(a)$ $(\forall a, b \in A)$ 可表为

$$\theta \circ \Delta^* = \theta \otimes_R o^* + o^* \otimes_R \theta \tag{26}$$

注意 o^* 是 A^D 的单位元, 可将 (26) 改写为

$$m_{A^D}^* \theta = \theta \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \theta \tag{27}$$

因此 $Der_R(A, R)$ 可以看作 A^D 中满足 (27) 的元组成的 R-子模。此外, 对任意 $a \in R$ 有 $\theta(a) = 0$, 这可表为

$$o_{A^D}^*(\theta) = 0 \tag{28}$$

由 (26), (28) 及群概形的定义 (见 II.1.1 中的 iii′)) 易得

$$\iota_{A^D}^*(\theta) = -\theta \tag{29}$$

注意 $\iota_{A^D}^*$ 是 A^D 作为 R-代数的**反自同构** (习题 4)。

引理 1. 设 L 为域 k 上的李代数, A 为 L 的泛包络代数, 则 A 有唯一的霍普夫代数结构使得

$$m^*\theta = \theta \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \theta, \ \iota^*\theta = -\theta, \ o^*\theta = 0 \quad (\forall \theta \in L) \tag{30}$$

且这个霍普夫代数是余交换的。

证. 令 $\tilde{L}$ 为 L 的一组 k-基, 则张量代数 $T_k(L)$ 可以看作以 $\tilde{L}$ 为生成元组的自由代数, 故可用

$$m^*\theta = \theta \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \theta,\ \ o^*\theta = 0,\ \ \iota^*\theta = -\theta \quad (\forall \theta \in \tilde{L}) \tag{31}$$

定义 k-代数同态 $m^* : T_k(L) \to T_k(L) \otimes_k T_k(L)$, $o^* : T_k(L) \to k$ 和 k-代数**反自同构** $\iota^* : T_k(L) \to T_k(L)$, 且 (31) 对任意 $\theta \in L$ 成立。易见

$$(m^* \otimes_k \mathrm{id}_{T_k(L)}) \circ m^* = (\mathrm{id}_{T_k(L)} \otimes_k m^*) \circ m^*,\ \ m^* = e \circ m^* \tag{32}$$

其中 $e : T_k(L) \otimes_k T_k(L) \to T_k(L) \otimes_k T_k(L)$ 为交换因子给出的 k-自同构。简言之"余乘法" m^* 满足余结合律与余交换律。记 $\Delta^* : T_k(L) \otimes_k T_k(L) \to T_k(L)$ 为乘法, $\pi^* : k \to T_k(L)$ 为嵌入。我们来验证

$$\Delta^* \circ (\iota^* \otimes_k \mathrm{id}_{T_k(L)}) \circ m^* = \pi^* \circ o^* : T_k(L) \to T_k(L) \tag{33}$$

只需考虑两边在形如 $\alpha = \theta_1 \otimes_k \cdots \otimes_k \theta_n$ $(\theta_1, ..., \theta_n \in L)$ 的元上的作用即可。对 n 用归纳法, $n = 0, 1$ 时可直接验证。若 $n > 1$, 记 $\beta = \theta_1 \otimes_k \cdots \otimes_k \theta_{n-1}$, 则

$$m^*\alpha = (m^*\beta)(\theta_n \otimes_k 1 + 1 \otimes_k \theta_n) \tag{34}$$

将 $\phi = \Delta^* \circ (\iota^* \otimes_k \mathrm{id}_{T_k(L)})$ 作用于 (34), 由归纳法假设可见

$$\begin{aligned} \phi((m^*\beta)(\theta_n \otimes_k 1)) = \theta_n \otimes_k \phi(m^*\beta) = 0, \\ \phi((m^*\beta)(1 \otimes_k \theta_n)) = \phi(m^*\beta) \otimes_k \theta_n = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

故 $\phi(m^*\alpha) = 0$, 这样就完成了归纳证明。同理有

$$\Delta^* \circ (\mathrm{id}_{T_k(L)} \otimes_k \iota^*) \circ m^* = \pi^* \circ o^* : T_k(L) \to T_k(L) \tag{36}$$

总之 m^*, o^* 和 ι^* 给出 $T_k(L)$ 的一个余交换霍普夫代数结构。

令 $I \subset T_k(L)$ 为所有

$$\theta \otimes_k \theta' - \theta' \otimes_k \theta - [\theta, \theta'] \quad (\theta, \theta' \in L) \tag{37}$$

生成的双边理想, 则 $A \cong T_k(L)/I$。我们来证明 $T_k(L)$ 的霍普夫代数结构诱导 A 的一个霍普夫代数结构, 为此只需验证对 (37) 中的任意元 α 有

$$m^*\alpha \in I \otimes_k T_k(L) + T_k(L) \otimes_k I,\ \iota^*\alpha \in I,\ o^*\alpha = 0 \tag{38}$$

即可。后两者是显而易见的, 对于第一个可以直接验证:

$$\begin{aligned}
&m^*(\theta \otimes_k \theta' - \theta' \otimes_k \theta - [\theta, \theta'])\\
=&(\theta \otimes_k 1 + 1 \otimes_k \theta)(\theta' \otimes_k 1 + 1 \otimes_k \theta') - (\theta' \otimes_k 1 + 1 \otimes_k \theta')(\theta \otimes_k 1 + 1 \otimes_k \theta) -\\
&([\theta, \theta'] \otimes_k 1 + 1 \otimes_k [\theta, \theta'])\\
=&(\theta \otimes_k \theta' - \theta' \otimes_k \theta - [\theta, \theta']) \otimes_k 1 + 1 \otimes_k (\theta \otimes_k \theta' - \theta' \otimes_k \theta - [\theta, \theta'])\\
\in& I \otimes_k T_k(L) + T_k(L) \otimes_k I
\end{aligned} \tag{39}$$

最后, 显然 A 的满足 (30) 的霍普夫代数结构是唯一的。证毕。

设 k 为特征 $p > 0$ 的域, 记 $\mathfrak{G}_k$ 为域 k 上的所有有限型群概形组成的范畴, 而记 $\mathfrak{G}_k^1$ 为 $\{G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{G}_k) | F_{G/k} = 0\}$ 组成的全子范畴。注意 $\mathfrak{G}_k^1$ 中的对象都是有限无穷小群。记 $\mathfrak{L}_k^1$ 为 k 上的所有有限维 p-李代数组成的范畴。为避免混淆起见记 k 上的一个 p-李代数 L 的 p 次幂映射为 η_L 或 η。我们有 (见 [DGa, II.7] 或 [DG, VII$_{\mathrm{A}}$.7.4])

命题 4. 若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 则 $G \mapsto \mathrm{Lie}(G/k)$ 给出一个范畴等价 $\mathfrak{G}_k^1 \simeq \mathfrak{L}_k^1$。

证. 由定理 1 可见 $G \mapsto \mathrm{Lie}(G/k)$ 给出一个 (共变) 函子 $F : \mathfrak{G}_k^1 \to \mathfrak{L}_k^1$。设 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{G}_k^1)$, 则由上所述任意 $\theta \in Der_k(R, k)$ 满足 (30)。我们下面给出 F 的逆。

设 L 为 k 上的 p-李代数, A 为 L 的泛包络代数, 按引理 1 看作余交换霍普夫代数。令 $J \subset A$ 为所有 $\theta^p - \eta(\theta)$ $(\theta \in L)$ 生成的双边理想, 并令 $R = A/J$。我们来验证 A 的霍普夫代数结构诱导 R 的一个霍普夫代数结构, 为此只需验证对任意 $\alpha = \theta^p - \eta(\theta) \in A$ $(\theta \in L)$ 有

$$m^*\alpha \in J \otimes_k A + A \otimes_k J,\ \iota^*\alpha \in J,\ o^*\alpha = 0 \tag{40}$$

由 $\mathrm{ch}(k) = p$ 及 η 的性质, 这些都是显而易见的。

这样 $G=\mathrm{Spec}(R^D)$ 为 k-群概形。易见对任意 $D_1,...,D_n\in Lie(G/k)$ $(n>0)$ 及任意 $a\in R^D$ 均有 $D_1\circ\cdots\circ D_n(a^p)=0$, 故由定理 1.iii) 可见对任意 $\alpha\in\ker(o_R^*)$ 有 $\alpha(a^p)=0$, 从而 $a^p\in k$, 这说明 $F_{G/k}=0$。这就给出一个函子 $\mathfrak{L}_k^1\to\mathfrak{G}_k^1$, 易见它是 F 的逆。证毕。

习题

1. 设 G 为域 k 上的有限型连通群概形。证明若 $Diff(G/k)$ 是交换代数则 G 是交换的。

2. 设 G 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形 S 上的有限平坦群概形, 使得 $F_{G/S}=0$。证明若 $Lie(G/S)$ 是交换 O_S-李代数层则 G 是交换的。

3. 设 G 为域 k 上的有限群概形, 使得 $\deg(G/k)$ 为素数。证明 G 是交换的。

4. 设 $S=\mathrm{Spec}(R)$ 为诺特概形, $G=\mathrm{Spec}(A)$ 为有限平坦 S-群概形, A^D 为 A 的对偶霍普夫代数 (注意它不一定是交换环)。对任意 $\phi\in A^D$ 令 $\iota_{A^D}^*\phi=\phi\circ\iota_G^*$, 这样定义了 A^D 的一个 R-模自同态 $\iota_{A^D}^*$。证明 $\iota_{A^D}^*$ 是 A^D 作为 R-代数的反自同构, 且 $\iota_{A^D}^{*2}=\mathrm{id}_{A^D}$。

5. 设 G,G' 为 S-群概形, 证明 $\omega_{G\times_S G'/S}\cong\omega_{G/S}\oplus\omega_{G'/S}$, 而 $Lie(G\times_S G'/S)$ 同构于 $Lie(G/S)$ 和 $Lie(G'/S)$ 作为李代数层的直积。

6. 对任意群概形 $\pi:G\to S$ 及任意整数 n 都可以定义一个 S-态射 $n_G:G\to G$: 若 $n>0$ 它是对角态射 $G\to G\times_S\overset{n}{\cdots}\times_S G$ 与乘法态射 $G\times_S\overset{n}{\cdots}\times_S G\to G$ 的合成; 若 $n<0$ 它是 $(-n)_G$ 与 ι 的合成; 若 $n=0$ 它是 π 与 o 的合成。若 G 是交换的则 n_G 是同态 (见例 Ⅱ.1.3)。证明:

i) n_G 诱导的 O_S-模层同态 $\omega_{G/S}\to\omega_{G/S}$ 将 $\omega_{G/S}$ 的任意局部截口 ω 映到 $n\omega$。

ii) 若 G 是交换的, 则 n_G 诱导的 O_G-模层同态 $n_G^*\Omega_{G/S}^1\to\Omega_{G/S}^1$ 将 $\Omega_{G/S}^1$ 的任意局部截口 ω 映到 $n\omega$。

iii) 若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数) 且 G 是交换的, 则 $\ker(F_{G/S})\subset$

$\ker(p_G)$。

iv) 设 G 为域 k 上的有限群概形, $n = \deg(G/k)$, 则 $n_G = 0$。(提示: 先约化到 k 是特征 $p > 0$ 的代数闭域而 G 是无穷小群的情形, 这样 G 的函数环形如 (1.5), 再利用引理 II.1.4 的证明中的方法, 证明每个 $p_G^*(x_i)$ 为 $x_1^p, ..., x_r^p$ 的多项式。)

7. 用局部生成元写出命题 2 中的同构 α^* 的表达式。

8. 设 G 为域 k 上的有限型不可约群概形, $\xi \in G$ 为一般点, $p \in G$ 为任意点。证明典范同态 $O_{G,p} \to O_{G,\xi}$ 是单同态。(提示: 可约化为 k 是代数闭域的情形, 由推论 I.4.1 可见 G 是 C.M. 概形。)

9. 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域。证明 k 上次数为 p 的有限群概形在同构之下只有 α_p, μ_p 和 p 阶离散群概形。

第 2 节　群概形作用的微积分

1. 群概形作用诱导的微分层典范同态

设 $\pi : G \to S$ 为分离群概形, $\tau : X \to S$ 为分离态射而 $\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的作用。仍用上面的记号如 α, $\mathcal{M}$, $Lie(G/S)$ 等。

命题 1. 设 $\pi : G \to S$ 为分离群概形, $\tau : X \to S$ 为分离态射, $\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的作用, 则对任意非负整数 n, ρ 诱导典范 (右) O_X-代数同态

$$\alpha^* : P^n_{X/S} \to \tau^* M^n_{G/S} \tag{1}$$

对 $P^n_{X/S}$ 的任意局部截口 $\overline{a \otimes_{O_S} b}$ (a, b 为 O_G 的局部截口) 有

$$\alpha^*(a \otimes_{O_S} b) = \overline{\rho^*(a)} \cdot b \tag{2}$$

(其中 $\overline{\rho^*(a)}$ 为 $\rho^*(a)$ 在 $o^{-1}(O_{G\times_S X}/\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}^{n+1})$ 中的像)。且当 ρ 是自由作用时 α^* 是满同态。特别地有典范 O_X-模同态

$$\alpha^* : \Omega^1_{X/S} \to \tau^* \omega_{G/S} \tag{3}$$

当 ρ 是自由作用时它是满同态。

证. 我们有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\tau} & X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X \\ \downarrow o & & \downarrow i & & \downarrow \Delta \\ G & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} & G\times_S X & \xrightarrow{\alpha} & X\times_S X \end{array} \tag{4}$$

其中 $\alpha=(\mathrm{pr}_2,\rho)$ (即 $(g,x)\mapsto(x,gx)$), $i=o\times_S \mathrm{id}_X$ (即 $x\mapsto(e,x)$)。令 $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I}'$, $\mathcal{M}$) 为 Δ (i, o) 的理想层。由 (4) 的右方框可见 α 诱导一个同态 $\alpha^*\mathcal{I}\to\mathcal{I}'$, 故诱导同态

$$P^n_{X/S}\to i^{-1}(O_{G\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1})\quad(\forall n\in\mathbb{Z}_{>0}) \tag{5}$$

另一方面, 由于 (4) 的左方框是拉回而 o 有一个截口, 对正合列 $0\to\mathcal{M}\to O_G\to o_*O_S\to 0$ 应用 pr_1^* 得到一个交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to & \mathrm{pr}_1^*\mathcal{M} & \to & \mathrm{pr}_1^*O_G & \to & \mathrm{pr}_1^*o_*O_S & \to 0 \\ & & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \\ 0\to & \mathcal{I}' & \to & O_{G\times_S X} & \to & i_*O_X & \to 0 \end{array} \tag{6}$$

其行都是正合的。故 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}\cong\mathcal{I}'$。因此有

$$O_{G\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1}\cong\mathrm{pr}_1^*(O_G/\mathcal{M}^{n+1}) \tag{7}$$

应用 i^{-1} 得到同构

$$\begin{aligned} i^{-1}(O_{G\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1}) &\cong i^{-1}\mathrm{pr}_1^*(O_G/\mathcal{M}^{n+1})\cong\tau^*o^{-1}(O_G/\mathcal{M}^{n+1}) \\ &=\tau^*M^n_{G/S} \end{aligned} \tag{8}$$

由 (5) 和 (8) 得到一个同态 $\alpha^*: P^n_{X/S}\to\tau^*M^n_{G/S}$。

最后, 当 ρ 是自由作用, 即 α 是闭嵌入时, (5) 是满射, 从而 α^* 是满射。证毕。

注意若 $X=G$ 而 ρ 为左乘或右乘作用, 则命题 1 给出命题 1.2。

例 1. 设 C 为域 k 上的光滑完备曲线, G 为非平凡有限型连通 k-群概型, ρ 为 G 在 C 上的自由作用, 则命题 1 给出右 O_C-模满同态 $\alpha^*:\Omega^1_{C/k}\to$

$\omega_{G/k}\otimes_k O_C$。注意 $\Omega^1_{C/k}$ 为秩 1 局部自由 O_C-模, 而由所设易见 $\omega_{G/k}\neq 0$, 故必有 $\dim_k(\omega_{G/k})=1$, 且 $\Omega^1_{C/k}\cong O_C$, 换言之 $g(C)=1$。

命题 2. 设 $\pi: G\to S$ 为分离群概形, $\tau: X\to S$ 为分离态射, $\rho: G\times_S X\to X$ 为 G 在 X 上的作用, $H=\mathrm{Stab}_G(X)$ (见 II.2.2)。则 (3) 可以扩展成一个右正合列

$$\Omega^1_{X/S}\to\tau^*\omega_{G/S}\to\omega_{H/X}\to 0 \tag{9}$$

证. 仍用命题 1 的证明中的记号。令 $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}'$ 为 $\alpha^*\mathcal{I}\to\mathcal{I}'$ 的像, 则由定义可见 $\mathcal{J}$ 为 $H\subset G\times_S X$ 的理想层。注意 $G\times_S X$ 作为 X-群概形的单位截口是 $o\times_S\mathrm{id}_X$, 它给出 X-群概形 H 的单位截口 $o_H: X\to H$, 故 o_H 的理想层就是 $\mathcal{I}'$ 在 H 上的拉回, 即 $\mathcal{I}'/\mathcal{J}$ 在 H 上的限制。因此

$$\omega_{H/X}\cong(o\times_S\mathrm{id}_X)^*(\mathcal{I}'/\mathcal{J}) \tag{10}$$

对正合列

$$\alpha^*\mathcal{I}\to\mathcal{I}'\to\mathcal{I}'/\mathcal{J}\to 0 \tag{11}$$

应用 $(o\times_S\mathrm{id}_X)^*$ 即得 (9)。证毕。

例 2. 设 C 为域 k 上的光滑完备曲线, G 为有限型连通 k-群概型, ρ 为 G 在 C 上的非平凡作用, 我们来证明 $g(C)\leqslant 1$。

若 $\mathrm{ch}(k)=0$, 则由推论 1.2.i) 知 G 为群簇。由 ρ 非平凡可知 $H=\mathrm{Stab}_G(C)$ 是 $G\times_k C$ 在 C 上的的真子群概形, 故由推论 1.2.i) 可见存在稠密开子集 $U\subset C$ 使得 $H\times_C U$ 在 U 上光滑, 且 $H\times_C U$ 是 $G\times_k U$ 在 U 上的真闭子群概形。令 $d=\dim(G)$, 则 $H\times_C U$ 在 U 上的相对维数小于 d, 故 $\omega_{G\times_k U/U}\ncong\omega_{H\times_C U/U}$。由命题 2 这说明 $\alpha^*:\Omega^1_{C/k}\to\omega_{G/k}\otimes_k O_C\cong O_C^{\oplus d}$ 是非平凡同态, 从而给出一个非零同态 $f:\Omega^1_{C/k}\to O_C$, 而由 $\Omega^1_{C/k}$ 是秩 1 局部自由的可见 f 是单射, 从而有

$$g(C)=h^0(\Omega^1_{C/k})\leqslant h^0(O_C)=1 \tag{12}$$

若 $\mathrm{ch}(k)=p>0$, 则由命题 II.1.ii) 可知 G 是不可约的。用命题 1 中的记号, 并记 $H_n=\ker(F^n_{G/k})$ $(\forall n>0)$。首先注意至少有一个正整数 n 使

得 (1) 中的 α^* 在 $\mathcal{I}P^n_{C/S}$ 上的限制不是零同态。因若不然，则由 n 的任意性，由定理 1.1.ii) 可见 α 诱导的 $\mathcal{I}\Delta^{-1}P_{C/S}\to\tau^*M^{p^n}_{H_n/S}$ 为零同态，从而 H_n 在 C 上的诱导作用是平凡的；再由 G 的不可约性和形式完备化可见 G 在 C 上的作用是平凡的，与所设矛盾。再注意 α^* 为 O_C-代数同态。对任一 n 记 $K_n=\ker(M^n_{G/S}\to M^{n-1}_{G/S})$。若 $\alpha^*:\Omega^1_{C/k}\to\omega_{G/k}\otimes_k O_C$ 为零同态，则有诱导同态 $\phi_2:\Omega^1_{C/k}\to K_2\otimes_k O_C$。若 ϕ_2 亦为零同态则有诱导同态 $\phi_3:\Omega^1_{C/k}\to K_3\otimes_k O_C$，等等。由此可归纳地定义 ϕ_i $(i=2,3,\ldots)$。但由上所述至少有一个非零同态 $\mathcal{I}P^n_{C/S}\to M^n_{G/S}\otimes_k O_C$，故可得到一个 $\phi_n\neq 0$。这样与 $\mathrm{ch}(k)=0$ 的情形类似地可得到一个非零同态 $\Omega^1_{C/k}\to O_C$，从而 (12) 仍成立。

我们后面将看到更简单的证明和进一步的讨论。

2. 群概形的作用与微分算子

定义 1. 设 $\pi:G\to S$ 为群概形，$\tau:X\to S$ 为态射，$\rho:G\times_S X\to X$ 为 G 在 X 上的作用。一个微分算子 $D\in\mathrm{Diff}(O_X/S)$ 称为 *ρ-左不变的*，如果下图交换：

$$\begin{array}{ccc} O_X & \xrightarrow{D} & O_X \\ \downarrow{\scriptstyle\rho^*} & & \downarrow{\scriptstyle\rho^*} \\ \rho_*O_{G\times_S X} & \xrightarrow{\rho_*\mathrm{pr}_2^*(D)} & \rho_*O_{G\times_S X} \end{array} \tag{1}$$

(这可以理解为 $\rho^*\circ D=(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_{O_S}D)\circ\rho^*$)。

易见所有开集上的所有 ρ-左不变微分算子组成 $Diff(O_X/S)$ 的一个 O_S-子代数层 $Diff(O_X/S)^\rho$，其中阶不超过 n 的微分算子组成一个 O_S-子模层 $Diff^n(O_X/S)^\rho$。特别地，所有 ρ-左不变导数组成 $Der_S(O_X,O_X)$ 的一个 O_S-李代数子层 $Der_S(O_X,O_X)^\rho$，且当 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数) 时它是 p-李代数子层。

注意 $D\mapsto\mathrm{pr}_2^*(D)$ 给出一个 $O_S(S)$-线性映射 $\mathrm{Diff}^n(O_X/S)\to\mathrm{Diff}^n(O_{G\times_S X}/G)$，易见一个 $\tilde{D}\in\mathrm{Diff}^n(O_{G\times_S X}/G)$ 给出一个 $\rho_*(\tilde{D})\in\mathrm{Diff}^n_{X/S}(O_X,\rho_*O_{G\times_S X})$，由此可见 $D\mapsto\rho_*\mathrm{pr}_2^*(D)$ 给出一个 O_S-模同态

$$\rho_*\mathrm{pr}_2^*:Diff^n(O_X/S)\to Diff^n_{X/S}(O_X,\rho_*O_{G\times_S X}) \tag{2}$$

另一方面, 令 $\alpha' = \alpha'_\rho : G\times_S X \to G\times_S X$ 为态射 $(g,x)\mapsto(g,gx)$, 显然它是 $G\times_S X$ 的 G-自同构。由此可见 $O_{G\times_S X}$ 作为 O_G-模由 $\rho^*(a)$ (对 O_X 的所有局部截口 a) 生成。故对任意 $D\in \mathrm{Diff}^n(O_X/S)$, $\rho^*(D)$ 通过 O_G-线性扩张给出一个 O_G-线性同态 $\rho^*(D) : O_{G\times_S X}\to O_{G\times_S X}$, 由自同构 α' 可见 $\rho^*(D)\in \mathrm{Diff}^n(O_{G\times_S X}/G)$, 故 $\rho_*\rho^*(D)\in \mathrm{Diff}^n_{X/S}(\rho_*O_{G\times_S X},\rho_*O_{G\times_S X})$。这样 $D\mapsto \rho_*\rho^*(D)$ 给出一个 O_S-模同态

$$\rho_*\rho^* : Diff^n(O_X/S)\to Diff^n_{X/S}(O_X,\rho_*O_{G\times_S X}) \tag{3}$$

由定义可见有正合列

$$0\to Diff^n(O_X/S)^\rho \xrightarrow{\tau_*} \tau_*Diff^n(O_X/S) \xrightarrow{\tau_*(\rho_*\rho^*-\rho_*\mathrm{pr}_2^*)} \tau_*Diff^n_{X/S}(O_X,\rho_*O_{G\times_S X}) \tag{4}$$

注意若 S 是诺特的而 τ 是有限型的, 则 $Diff^n(O_X/S)$ 和 $Diff^n_{X/S}(O_X,\rho_*O_{G\times_S X})$ 为 X 上的拟凝聚层, 故此时 $Diff^n(O_X/S)^\rho$ 为 S 上的拟凝聚层, 特别地 $Der(O_X,O_X)^\rho$ 为 S 上的拟凝聚层。

易见 $Diff(O_X/S)^\rho$ 及每个 $Diff^n(O_X/S)^\rho$ 对 G 是典范的, 详言之对任意 S-群概形同态 $\phi : G'\to G$, 令 $\rho' : G'\times_S X\to X$ 为 ϕ 诱导的作用, 则 ϕ 诱导典范的 O_S-代数层同态

$$\phi^* : Diff(O_X/S)^\rho \to Diff(O_X/S)^{\rho'} \tag{5}$$

将 $Diff^n(O_X/S)^\rho$ 映到 $Diff^n(O_X/S)^{\rho'}$。

定理 1. 设 $\pi : G\to S$ 为分离群概形, $\tau : X\to S$ 为分离态射, $\rho : G\times_S X\to X$ 为 G 在 X 上的作用。

i) 对任意非负整数 n, ρ 诱导典范的 O_S-模层同态

$$\rho_* : Diff^n(G/S)\to Diff^n(O_X/S) \tag{6}$$

具体说, 对 $\mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S},O_S)$ 的任一局部截口 $\bar{D}$, ρ_* 将 $\psi(\bar{D})$ 映到 $\tau^*(\bar{D})\circ\rho^*$。对所有 n, 同态 (6) 与嵌入 $Diff^n(G/S)\to Diff^{n+1}(G/S)$ 和 $Diff^n(O_X/S)\to Diff^{n+1}(O_X/S)$ 相容。

ii) 对所有 n, (6) 合起来给出 O_S-代数层的反同态

$$\rho_* : Diff(G/S) \to Diff(O_X/S) \tag{7}$$

iii) 上述 ρ_* 诱导典范 O_S-李代数同态

$$-\rho_* : Lie(G/S) \to Der(O_X, O_X) \tag{8}$$

且当 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数) 时它是 p-李代数同态。

iv) 若 G 是交换的, 则上述 ρ^* 经过 $Diff(O_X/S)^\rho$。

v) 若 ρ 是自由的而 $\tau^* : O_S \to \tau_* O_X$ 是单同态 (特别地当 τ 忠实平坦或有一个截口时), 则 ρ_* 是单同态。

证. i) 将 $P^n_{X/S}$ 看作右 O_X-模, 令 $d : O_X \to P^n_{X/S}$ 为由 pr_1^* 诱导的微分算子,

$$\beta = (\rho \circ \mathrm{pr}_{12}, \rho \circ \mathrm{pr}_{13}) : G \times_S X \times_S X \to X \times_S X \tag{9}$$

(即 $(g, x, y) \mapsto (gx, gy)$)。由命题 1 可知对任意非负整数 n 有典范的 O_X-模层同态 $\alpha^* : P^n_{X/S} \to \tau^* M^n_{G/S}$, 这给出 O_S-模层同态 $\alpha_* : \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \to Diff^n(O_X/S)$, 将 $\mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S)$ 的一个局部截口 $\bar{D}$ 映到 $(\tau^*\bar{D}) \circ \alpha^* \circ d$。由定理 1.1 有 O_S-模层的典范同构 $\psi : \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \to Diff^n(G/S)$, 故有典范的 O_S-模层同态

$$\rho_* = \alpha_* \circ \psi^{-1} : Diff^n(G/S) \to Diff^n(O_X/S) \tag{10}$$

使得对 $\mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S)$ 的任一局部截口 $\bar{D}$ 有

$$\rho_*(\psi(\bar{D})) = \tau^*(\bar{D}) \circ \alpha^* \circ d = \tau^*(\bar{D}) \circ \rho^* \tag{11}$$

显然 $\rho_* : Diff^n(G/S) \to Diff^n(O_X/S)$ 与 $\rho_* : Diff^{n+1}(G/S) \to Diff^{n+1}(O_X/S)$ 相容。

ii) 由 (6) 对所有 n 的相容性可得一个 O_S-线性同态

$$\rho_* : Diff(G/S) \to Diff(O_X/S) \tag{12}$$

为简单起见不妨设 S 是仿射的, $S=\mathrm{Spec}R$, 如 (1.2.2) 那样将 (11) 的右边表为 $(\bar{D}\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ\rho^*$。对任意 $\bar{D},\bar{D}'\in Hom_{O_S}(M^n_{G/S},O_S)$ 有

$$\begin{aligned}
&((\bar{D}\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ\rho^*)\circ((\bar{D}'\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ\rho^*)\\
=&(\bar{D}\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ(\bar{D}'\otimes_R \mathrm{id}_{O_G}\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ(\mathrm{id}_{O_G}\otimes_R\rho^*)\circ\rho^*\\
=&(\bar{D}'\otimes_R\bar{D}\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ(m^*\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ\rho^*\\
=&(((\bar{D}'\otimes_R\bar{D})\circ m^*)\otimes_R \mathrm{id}_{O_X})\circ\rho^*
\end{aligned}\tag{13}$$

另一方面, 由定理 1.1 知 $\psi(\bar{D}')\circ\psi(\bar{D})=\psi((\bar{D}'\otimes_R\bar{D})\circ m^*)$, 这说明

$$\rho_*(\psi(\bar{D}')\circ\psi(\bar{D}))=\rho_*(\psi(\bar{D}))\circ\rho_*(\psi(\bar{D}'))\tag{14}$$

即 ρ_* 为 O_S-代数的反同态。

iii) 由 ii) 立得。

iv) 仍设 $S=\mathrm{Spec}R$, 注意下图是拉回:

$$\begin{array}{ccc}
G\times_S X & \xrightarrow{\rho} & X\\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta}\\
G\times_S X\times_S X & \xrightarrow{\beta} & X\times_S X
\end{array}\tag{15}$$

用定理 1.1 的证明中的方法, 可见 β 诱导一个典范 O_S-同态

$$\beta^*: P^n_{X/S}\to\rho_*\mathrm{pr}_2^*P^n_{X/S}\tag{16}$$

不难验证下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
O_X & \xrightarrow{d} & P^n_{X/S}\\
\downarrow{\scriptstyle\rho^*} & & \downarrow{\scriptstyle\beta^*}\\
\rho_*O_{G\times_S X} & \xrightarrow{\rho_*\mathrm{pr}_2^*(d)} & \rho_*\mathrm{pr}_1^*P^n_{X/S}
\end{array}\tag{17}$$

这是因为 $\rho_*\mathrm{pr}_1^*(d)$ 由 pr_{12}^* 诱导, 只需验证 $\rho\circ\mathrm{pr}_{12}=\mathrm{pr}_1\circ\beta$, 而这是显然的。

由 (17), 一个截口 $D\in\mathrm{Diff}^n(O_X/S)^\rho$ 对应于一个 O_X-线性映射 $\tilde{D}: P^n_{X/S}\to O_X$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
P^n_{X/S} & \xrightarrow{\tilde{D}} & O_X\\
\downarrow{\scriptstyle\beta^*} & & \downarrow{\scriptstyle\rho^*}\\
\rho_*\mathrm{pr}_2^*P^n_{X/S} & \xrightarrow{\rho_*\mathrm{pr}_2^*(\tilde{D})} & \rho_*O_{G\times_S X}
\end{array}\tag{18}$$

令 $\bar{D} \in \mathrm{Hom}_{O_S}(M^n_{G/S}, O_S) \cong \mathrm{Diff}^n(G/S)$ (参看定理 1.1), 定义

$$\tilde{D} = \tau^*(\bar{D}) \circ \alpha^* : P^n_{X/S} \to \tau^* M^n_{G/S} \to O_X \tag{19}$$

我们来验证下图交换:

$$\begin{array}{ccccc}
P^n_{X/S} & & \xrightarrow{\quad\tilde{D}\quad} & & O_X \\
& \searrow^{\alpha^*} & & \nearrow_{\tau^*(\bar{D})} & \\
\downarrow^{\beta^*} & & \tau^* M^n_{G/S} & & \downarrow^{\rho^*} \\
& & \downarrow^{\lambda^*} & & \\
\rho_* \mathrm{pr}_2^* P^n_{X/S} & & \xrightarrow{\quad\rho_*\mathrm{pr}_2^*(\tilde{D})\quad} & & \rho_* O_{G\times_S X} \\
& \searrow^{\nu^*} & & \nearrow_{\rho_*(\pi\times_S\tau)^*(\bar{D})} & \\
& & \rho_*(\pi \times_S \tau)^* M^n_{G/S} & &
\end{array} \tag{20}$$

其中 λ^* 由 $\lambda = (\mathrm{pr}_2, \rho \circ \mathrm{pr}_{13}) : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ (即 $(g, g', x) \mapsto (g', gx)$) 与下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S X & \xrightarrow{\rho} & X \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times_S o_G \times_S \mathrm{id}_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle o_G \times_S \mathrm{id}_X} \\
G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{\lambda} & G \times_S X
\end{array} \tag{21}$$

诱导, 而 ν^* 由

$$\nu = (\mathrm{pr}_1, \rho \circ \mathrm{pr}_{23}, \mathrm{pr}_3) : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X \times_S X \tag{22}$$

(即 $(g, g', x) \mapsto (g, g'x, x)$) 与下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \times_S X \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times_S o_G \times_S \mathrm{id}_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times_S \Delta_X} \\
G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{\nu} & G \times_S X \times_S X
\end{array} \tag{23}$$

诱导。由 $\tilde{D}$ 的定义可见 (20) 上面的三角形交换; 下面的三角形是 O_G-线性的, 故对其交换性只需在 $1 \otimes_{O_S} P^n_{X/S}$ 上验证, 这仍由 $\tilde{D}$ 的定义得出; 左边的平行四边形的交换性由 $\alpha \circ \lambda = \beta \circ \nu$ 可见 (这里用到 G 的交换性); 右边的平行四边形的交换性是显然的 (系数变换), 这就验证了 (20) 的交换性。

由上所述，(20) 的交换性说明 $\tilde{D} \circ d$ 是 ρ-不变的。

v) 若 ρ 是自由的，则由命题 1 可知 $\alpha^* : P^n_{X/S} \to \tau^* M^n_{G/S}$ 是满同态，故

$$\alpha_* : \tau_* \mathcal{H}om_{O_X}(\tau^* M^n_{G/S}, O_X) = Hom_{O_X}(\tau^* M^n_{G/S}, O_X) \to Hom_{O_X}(P^n_{X/S}, O_X) \tag{24}$$

是单同态。注意 $\mathcal{H}om_{O_X}(\tau^* M^n_{G/S}, O_X) \cong \mathcal{H}om_{O_S}(M^n_{G/S}, O_X)$，若 $\tau^* : O_S \to \tau_* O_X$ 是单同态，则 $\tau^* : Hom_R(M^n_{G/S}, R) \to \tau_* \mathcal{H}om_{O_X}(\tau^* M^n_{G/S}, O_X)$ 是单同态，从而

$$\alpha_* \circ \tau^* : Hom_R(M^n_{G/S}, R) \to Hom_{O_X}(P^n_{X/S}, O_X) \tag{25}$$

是单同态。故由 i) 可见 $\rho_* : Diff^n(G/S) \to Diff^n(O_X/S)$ 是单同态。证毕。

注 1. 由注 1.1 与定理 1 可见 ρ 诱导典范的 O_S-代数层同态$Diff'(G/S) \to Diff(O_X/S)$。

3. 群概形作用的外微分与德拉姆复形

设 $\pi : G \to S$ 为分离群概形，$\tau : X \to S$ 为分离态射，$\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的作用。令态射

$$p_{n,i} : G \times_S \overset{n+1}{\cdots} \times_S G \times_S X \to G \times_S \overset{n}{\cdots} \times_S G \times_S X \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{1}$$

为对除第 i 个外的所有因子的积的投射 (因子指标从 0 到 n)，并令

$$\nu_n : G \times_S \overset{n+1}{\cdots} \times_S G \times_S X \to G \times_S \overset{n}{\cdots} \times_S G \times_S X \tag{2}$$

为态射 $(g_0, ..., g_n, x) \mapsto (g_0 g_n^{-1}, ..., g_{n-1} g_n^{-1}, g_n x)$。由正合列 (见 (1.1.11))

$$0 \to \omega_{G/S} \to M^1_{G/S} \to O_S \to 0 \tag{3}$$

可得正合列

$$0 \to \bigwedge^n_{O_S} \omega_{G/S} \to \bigwedge^n_{O_S} M^1_{G/S} \to \bigwedge^{n-1}_{O_S} \omega_{G/S} \to 0 \quad (\forall n > 0) \tag{4}$$

令 $\bar{\delta}^n : \bigotimes_{O_S}^n M_{G/S}^1 \otimes_{O_S} O_X \to \bigotimes_{O_S}^{n+1} M_{G/S}^1 \otimes_{O_S} O_X$ 为由 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i p_{n,i}^* + (-1)^{n+1}\nu_n^*$ 诱导的态射 (参看注 I.1.1)。易见 $\bar{\delta}^n$ 诱导一个态射 $\hat{\delta}^n : \bigwedge_{O_S}^n M_{G/S}^1 \otimes_{O_S} O_X \to \bigwedge_{O_S}^{n+1} M_{G/S}^1 \otimes_{O_S} O_X$。我们下面来证明 $\hat{\delta}^n(\bigwedge_{O_S}^n \omega_{G/S} \otimes_{O_S} O_X) \subset \bigwedge_{O_S}^{n+1} \omega_{G/S} \otimes_{O_S} O_X$。

引理 1. 设 a 为 $\mathcal{M}$ 的局部截口, 则

i) $m^*(a) - a\otimes 1 - 1\otimes a$ 是 $\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{M})\cdot\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{M})$ 的截口;

ii) $\iota^*(a) + a$ 是 $\mathcal{M}^2$ 的截口。

证. i) 注意 $o^* : O_G \to \pi^{-1}O_S$ 有分拆, 可见下列正合:

$$0 \to \mathrm{pr}_1^*(\mathcal{M})\cdot\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{M}) \to (\mathrm{id}_G\times_S o)_*\mathcal{M} \oplus (o\times_S \mathrm{id}_G)_*\mathcal{M} \to \ker(o_{G\times_S G}^*) \to 0 \tag{5}$$

由 a 为 $\mathcal{M}$ 的截口可知 $m^*(a)$ 为 $\ker(o_{G\times_S G}^*)$ 的截口, 而 $a\otimes 1$ 和 $1\otimes a$ 也是 $\ker(o_{G\times_S G}^*)$ 的截口。但

$$(\mathrm{id}_G\times_S o)^*(m^*(a) - a\otimes 1 - 1\otimes a) = (o\times_S \mathrm{id}_G)^*(m^*(a) - a\otimes 1 - 1\otimes a) = 0 \tag{6}$$

故 $m^*(a) - a\otimes 1 - 1\otimes a$ 为 $\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{M})\cdot\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{M})$ 的截口。

ii) 令 $\mu = m\circ(\mathrm{id}_G, \iota) : G\times_S G \to G$ (即 $(g, g') \mapsto gg'^{-1}$), 则 $\mu\circ\Delta_G = o\circ\pi$。由 i) 有 $\mu^*(a) = a\otimes 1 + 1\otimes \iota^*(a) + b$, 其中 b 为 $\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{M})\cdot\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{M})$ 的截口。故

$$0 = \Delta_G^*\circ\mu^*(a) = \Delta_G^*(a\otimes 1 + 1\otimes\iota^*(a) + b) \equiv a + \iota^*(a) \pmod{\mathcal{M}^2}. \tag{7}$$

证毕。

设 $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ 为 $\omega_{G/S}$ 的截口, b 为 O_X 的截口。由引理 1 直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}^n(\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}\otimes b)\\
\equiv&\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{i-1}\otimes 1\otimes\omega_i\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}\otimes b+\\
&(-1)^{n+1}(\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}\otimes 1\otimes 1-\\
&\sum_{i=0}^{n-1}\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{i-1}\otimes 1\otimes\omega_{i+1}\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}\otimes\omega_i\otimes 1)\cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot(1\otimes \overset{n-1}{\cdots} \otimes 1\otimes(1\otimes b-\bar{\delta}^0(b)))\ (\mathrm{mod}\ \bigotimes_{O_S}^{n}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X) \\
\equiv&\sum_{i=0}^{n-1}((-1)^i\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{i-1}\otimes 1\otimes\omega_i\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}+ \\
&(-1)^n\omega_0\otimes\cdots\otimes\omega_{i-1}\otimes 1\otimes\omega_{i+1}\otimes\cdots\otimes\omega_{n-1}\otimes\omega_i)\otimes b \\
&\qquad(\mathrm{mod}\ \bigotimes_{O_S}^{n}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X)
\end{aligned} \tag{8}
$$

注意 (8) 中的最后一式映到 $\bigwedge_{O_S}^{n+1}O_G^1\otimes_{O_S}O_X$ 中的像为 0, 这说明

$$
\hat{\delta}^n(\bigwedge_{O_S}^{n}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X)\subset\bigwedge_{O_S}^{n+1}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X \tag{9}
$$

故 $\hat{\delta}^n$ 诱导一个态射

$$
\delta^n\colon \bigwedge_{O_S}^{n}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X\to\bigwedge_{O_S}^{n+1}\omega_{G/S}\otimes_{O_S}O_X \tag{10}
$$

我们来验证 $\delta^n\circ\delta^{n-1}=0$, 为此只需验证 $\bar{\delta}^n\circ\bar{\delta}^{n-1}=0$。由 $\bar{\delta}^n$ 的定义, $\bar{\delta}^n\circ\bar{\delta}^{n-1}$ 等于下列项的和:

$$
\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j p_{n,i}^*\circ p_{n-1,j}^*\ ; \tag{11}
$$

$$
\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+1+i}\nu_n^*\circ p_{n-1,i}^*\ ; \tag{12}
$$

$$
\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i}p_{n,i}^*\circ\nu_{n-1}^*\ ; \tag{13}
$$

$$
p_{n,n}^*\circ\nu_{n-1}^*\ ; \tag{14}
$$

$$
-\nu_n^*\circ\nu_{n-1}^*\ . \tag{15}
$$

(11) 显然等于 0; (12) 与 (13) 相消, 因为 $\nu_{n-1}\circ p_{n,i}=p_{n-1,i}\circ\nu_n$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$; 不难验证 $\nu_{n-1}\circ p_{n,n}=\nu_{n-1}\circ\nu_n$, 故 (14) 与 (15) 相消。

现在可以定义一个复形态射 $\Omega^{\cdot}_{X/S} \to \mathrm{DR}_\rho$, 其次数为 n 的分态射为

$$\mu_n^* : \Omega^n_{X/S} \to \bigwedge_{O_S}^{n} \omega_{G/S} \otimes_{O_S} O_X \tag{16}$$

其中 μ_n^* 由

$$\mu_n = (\rho \circ \mathrm{pr}_{0n}, \ldots, \rho \circ \mathrm{pr}_{(n-1)n}, \mathrm{pr}_n) : G \times_S \overset{n}{\cdots} \times_S G \times_S X \to X \times_S \overset{n+1}{\cdots} \times_S X \tag{17}$$

(即 $(g_0, ..., g_{n-1}, x) \mapsto (g_0 x, ..., g_{n-1} x, x)$) 诱导。为验证交换性 $\mu_{n+1}^* \circ d^n = \delta^n \circ \mu_n^*$, 只需验证 $\tau_{n,i} \circ \mu_{n+1} = \mu_n \circ p_{n,i}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 和 $\tau_{n,n+1} \circ \mu_{n+1} = \mu_n \circ \nu_n$, 这些都是显然的。由于 $\Omega^{n+1}_{X/S}$ 在 O_X 上由 $d^n(\Omega^n_{X/S})$ 生成, 可见只有一个 O_X-线性同态 $\Omega^{\cdot}_{X/S} \to \mathrm{DR}_\rho$, 其零次分同态为单位自同构。总之有

定理 2. 设 $\pi : G \to S$ 为分离群概形, $\tau : X \to S$ 为分离态射, $\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的作用, 则

i) ρ 诱导一个典范 O_S-线性复形

$$\mathrm{DR}_\rho : \; O_X \xrightarrow{\delta^0} \tau^* \omega_{G/S} \xrightarrow{\delta^1} \tau^* \textstyle\bigwedge^2_{O_S} \omega_{G/S} \xrightarrow{\delta^2} \tau^* \bigwedge^3_{O_S} \omega_{G/S} \xrightarrow{\delta^3} \cdots \tag{18}$$

其中每个 δ^n 由 $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i p_{n,i}^* + (-1)^{n+1} \nu_n^*$ 诱导;

ii) O_X 的单位自同构诱导 (唯一) 典范 O_X-线性同态 $\Omega^{\cdot}_{X/S} \to \mathrm{DR}_\rho$, 其 1 次分同态为 (1.3) 中的 α^*, 且当 ρ 为自由作用时它是满同态。

由谱序列理论 (参看例如 [L1, XIII.4]) 立得

推论 1. 在定理 2 的条件下, 若 $\omega_{G/S}$ 平坦, 则 ρ 诱导典范强收敛谱序列 $(E^{\cdot}, E^{\cdot\cdot}_{\cdot})$:

$$E_1^{i,j} = \bigwedge_{O_S}^{i} \omega_{G/S} \otimes_{O_S} R^j \tau_* O_X, \quad E^n = \mathbb{H}^n(\mathrm{DR}_\rho) \tag{19}$$

且 $F^0 E^n = E^n$, $F^{n+1} E^n = 0$。此外, 若令 $(E'^{\cdot}, E'^{\cdot\cdot}_{\cdot})$ 为谱序列

$$E'^{i,j}_1 = R^j \tau_* \Omega^i_{X/S}, \quad E'^n = \mathbb{H}^n(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \tag{20}$$

则典范 O_X-线性同态 $\Omega^{\cdot}_{X/S} \to \mathrm{DR}_\rho$ 诱导典范的谱序列同态 $(E'^{\cdot}, E'^{\cdot\cdot}_{\cdot}) \to (E^{\cdot}, E^{\cdot\cdot}_{\cdot})$。

注 2. 我们猜想当 G 交换时有

$$\omega_{G/S} \otimes_{O_S} 1 \subset \ker(\delta^1) \tag{21}$$

当 $X = G$ 而 $\rho = m$ 时，(21) 对一些特殊情形是已知的。事实上，(21) 至少在大多数情形成立，这是因为若 ω 为 $\omega_{G/S}$ 的截口，则 $\bar{\delta}^1(\omega \otimes 1) = (m^*(\omega) - \omega \otimes 1 - 1 \otimes \omega) \otimes 1$ 是对称的 (因 G 是交换的)，故 $\delta^1(\omega \otimes 1) = 0$ 当 S 为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-概形或 $\omega_{G/S}$ 局部自由时成立。

习题

1. 详细写出 $\bar{\delta}^n$ 的定义。

2. 证明推论 1。

3. 设 G 为特征 $p > 0$ 的域 k 上的 d 维有限型几何约化群概形。将 $O_{G^{(p)}}$ 看作 O_G 的子层。证明局部可取 O_G 的截口 $x_1, ..., x_d$ 使得 O_G 在 $O_{G^{(p)}}$ 上局部为所有 $x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$ $(0 \leqslant i_1, ..., i_d < p)$ 生成的自由模，且有 $D_1, ..., D_d \in Der_{O_{G^{(p)}}}(O_G, O_G)$ 使得 $D_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$。

第 3 节　切丛与诱导作用

1. 切丛与微分算子丛

设 X 为诺特概形。对 X 上的任一凝聚层 $\mathcal{E}$，定义

$$\mathbb{V}_X(\mathcal{E}) := \mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{O_X}(\mathcal{E})) \tag{1}$$

在没有疑问时可简记为 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$。若 $\mathcal{E}$ 是局部自由层，则 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 为 X 上的向量丛；反之，X 上的任一向量丛同构于某个 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 为局部自由层 (习题 1)。注意 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 的典范性：X 上的任一凝聚层同态 $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ 诱导 X-概形态射 $f^*: \mathbb{V}(\mathcal{E}') \to \mathbb{V}(\mathcal{E})$。

对一般的 $\mathcal{E}$, 我们来说明 $G=\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 具有 X-群概形结构。简记 $\mathcal{A}=\mathrm{Sym}_{O_X}(\mathcal{E})=\bigoplus_{i=o}^{\infty}\mathcal{A}_i$, 其中 $\mathcal{A}_i$ 为 $\mathcal{A}$ 的 i 次齐次部分。作为 O_X-代数, $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}_1\cong\mathcal{E}$ 生成。不难验证

$$\mathcal{A}\otimes_{O_X}\mathcal{A}\cong\mathrm{Sym}_{O_X}(\mathcal{A}_1\otimes_{O_X}1\oplus 1\otimes_{O_X}\mathcal{A}_1) \tag{2}$$

对 $\mathcal{E}$ 的任意局部截口 a 令 $m^*(a)=a\otimes_{O_X}1+1\otimes_{O_X}a$, $o^*(a)=0$ 及 $\iota^*(a)=-a$, 就给出 O_X-模层同态 $m^*:\mathcal{A}_1\to(\mathcal{A}_1\otimes_{O_X}1\oplus 1\otimes_{O_X}\mathcal{A}_1)$, $o^*:\mathcal{E}\to O_X$ 及 $\iota^*:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, 从而给出 O_X-代数同态 $m^*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes_{O_X}\mathcal{A}$, $o^*:\mathcal{A}\to O_X$ 及 $\iota^*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, 这等价于 X-态射 $m:G\times_X G\to G$, $o:X\to G$ 和 $\iota:G\to G$。不难验证这给出 G 的一个交换 (加法) 群概形结构。由定义易见

$$\omega_{G/X}\cong\mathcal{E} \tag{3}$$

(习题 2)。

仿照群概形的定义, 我们可以定义环概形, 以及一个给定的环概形上的模概形。

定义 1. 一个概形 S 上的环概形是指一个 S-概形 $\mathcal{R}$ 连同 S-态射 $a=a_{\mathcal{R}}:\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ (“加法”), $m=m_{\mathcal{R}}:\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ (“乘法”), $o_{\mathcal{R}}:S\to\mathcal{R}$ (“零截口”), $e_{\mathcal{R}}:S\to\mathcal{R}$ (“单位截口”) 和 $\iota_{\mathcal{R}}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$, 满足如下条件:

i) $\mathcal{R}$ 是以 a 为加法, $o_{\mathcal{R}}$ 为零截口及 $\iota_{\mathcal{R}}$ 为 (加法) 逆的 (加法) 交换群概形;

ii) $m\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{R}}\times_S m)=m\circ(m\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{R}}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ (即乘法满足结合律);

iii) $m\circ(e_{\mathcal{R}}\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{R}})=m\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{R}}\times_S e_{\mathcal{R}})=\mathrm{id}_{\mathcal{R}}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$;

iv) $m\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{R}}\times_S a)=a\circ(m\circ\mathrm{pr}12,m\circ\mathrm{pr}_{13}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ (“左分配律”);

$m\circ(a\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{R}})=a\circ(m\circ\mathrm{pr}13,m\circ\mathrm{pr}_{23}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ (“右分配律”)。

如果乘法还满足交换律, 则称 $\mathcal{R}$ 为交换环概形。

定义 2. 给定一个概形 S 上的环概形 $\mathcal{R}$, 一个 $\mathcal{R}$- 模概形是指一个加法 S-交换群概形 $\mathcal{M}$ (其加法、零截口和加法逆分别记为 $a_{\mathcal{M}}, o_{\mathcal{M}}$ 和 $\iota_{\mathcal{M}}$) 连同一个"$\mathcal{R}$ 的作用" $\rho:\mathcal{R}\times_S\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, 满足如下条件:

i) $\rho\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{R}}\times_S\rho)=\rho\circ(m_{\mathcal{R}}\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{M}}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\times_S\mathcal{M}\to\mathcal{M}$;

ii) $\rho\circ(e_{\mathcal{R}}\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{M}})=\mathrm{id}_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\cong S\times_S\mathcal{M}\to\mathcal{M}$;

iii) $\rho\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{R}}\times_S a_{\mathcal{M}})=a_{\mathcal{M}}\circ(\rho\circ\mathrm{pr}12,\rho\circ\mathrm{pr}_{13}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{M}\times_S\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ ("左分配律");

$\rho\circ(a_{\mathcal{R}}\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{M}})=a_{\mathcal{M}}\circ(\rho\circ\mathrm{pr}13,\rho\circ\mathrm{pr}_{23}):\mathcal{R}\times_S\mathcal{R}\times_S\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ ("右分配律")。

一个 S-环概形等价于一个可代表的反变函子 $\mathfrak{Sch}_S\to$((rings)); 而对于一个给定的 S-环概形 $\mathcal{R}$, 一个 $\mathcal{R}$-模概形等价于一个可代表的反变函子 $M:\mathfrak{Sch}\to\mathfrak{Ab}$ 连同一个自然变换 $\rho:\underline{\mathcal{R}}\times M\to M$, 使得对任意 $T\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch})$, $\rho(T):\underline{\mathcal{R}}(T)\times M(T)\to M(T)$ 给出 $M(T)$ 一个 $\underline{\mathcal{R}}(T)$-模结构 (习题 4)。

例如, 不难验证 $\mathcal{R}=\mathbb{A}^1\cong\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x]$ 具有一个环概形结构, 由

$$a^*(x)=x\otimes1+1\otimes x,\quad m^*(x)=x\otimes x,\quad o^*_{\mathcal{R}}(x)=0,\quad e^*_{\mathcal{R}}(x)=1,\quad \iota^*(x)=-x \tag{4}$$

给出, 从而对任意概形 X, $\mathbb{A}^1_X$ 具有 X-环概形结构; 若 X 为诺特概形而 $\mathcal{E}$ 为 X 上的凝聚层, 则 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 具有 $\mathbb{A}^1_X$-模概形结构 (习题 5)。特别地, X 上的向量从都具有 $\mathbb{A}^1_X$-模概形结构。

注意对任意环概形 $\mathcal{R}$ 上的模概形 $\mathcal{M}$ 均有

$$\rho\circ(o_{\mathcal{R}}\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{M}})=o_{\mathcal{M}},\quad \iota_{\mathcal{M}}=-1_{\mathcal{M}}=\rho\circ((\iota_{\mathcal{R}}\circ e)\times_S\mathrm{id}_{\mathcal{M}}) \tag{5}$$

(习题 3)。

引理 1. 设 S 为诺特 $\mathbb{Q}$-概形, S-环概形 $\mathcal{R}=\mathbb{A}^1_S$, $\tau:V\to S$ 为有限型分离态射。若 V 为 $\mathcal{R}$-模概形, 则存在 S 上的凝聚层 $\mathcal{E}$ 使得有 $\mathcal{R}$-模概形同构 $V\cong\mathbb{V}(\mathcal{E})$。

证. 对任意 $n\geqslant0$, 记 $\mathcal{E}_n\subset O_V$ 为所有满足 $\rho^*(b)=x^n\otimes_{O_S}b$ 的局部截口

b 组成的子层, 则易见 O_V 分解为 O_S-模层的直和

$$O_V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n \tag{6}$$

且显然对任意 $m, n \geqslant 0$ 有 $\mathcal{E}_m \cdot \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{m+n}$, 这给出 O_V 一个分次 O_S-代数层结构。对 O_V 的任一局部截口 b, 由 (5) 可见 $o_V^*(b) = 0$ 当且仅当 $\rho^*(b)$ 在 $xO_{\mathcal{R}\times_S V}$ 中, 故

$$\mathcal{I} := \ker(o_V^*) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \tag{7}$$

且 $\mathcal{E}_0 = \tau^{-1} O_S$。

我们对 n 用归纳法来证明 $\mathcal{E}_1^n = \mathcal{E}_n$, 对 $n=1$ 无须证。对 $\mathcal{E}_n$ 的任一局部截口 b, 设

$$a_V^*(b) = b \otimes_{O_S} 1 + 1 \otimes_{O_S} b + \sum_i b_i \otimes_{O_S} b_i' \tag{8}$$

其中 b_i, b_i' 为齐次截口, 其次数之和记为 d_i。由左分配律有

$$x^n \otimes_{O_S} a_V^*(b) = \sum_i x^{d_i} \otimes_{O_S} b_i \otimes_{O_S} b_i' \tag{9}$$

比较两边 x 的各次幂的项, 即可见所有 $d_i = n$。由引理 2.1 可见 (8) 的右边除了两项 $b \otimes_{O_S} 1$ 和 $1 \otimes_{O_S} b$ 外都是 $\mathrm{pr}_1^* \mathcal{I} \cdot \mathrm{pr}_2^* \mathcal{I}$ 的截口, 故 b_i 和 b_i' 的次数都 > 0, 从而次数都 $< n$。特别地, 若 $n=1$ 则 (8) 的右边只有两项 $b \otimes_{O_S} 1$ 和 $1 \otimes_{O_S} b$。将 Δ_V^* 作用于 (9) 的两边得

$$2_V^*(b) = 2b + \sum_i b_i b_i' \tag{10}$$

由右分配律得 $\rho \circ 2_V = \rho \circ (2_{\mathcal{R}} \times_S \mathrm{id}_V)$, 将 ρ^* 作用于 (10) 的两边得

$$(2x)^n \otimes_{O_S} b = x^n \otimes_{O_S} (2b + \sum_i b_i b_i') \tag{11}$$

由此得 $(2^n - 2)b = \sum_i b_i b_i'$, 若 $n > 1$ 则由归纳法假设可见右边在 $\mathcal{E}_1^n$ 中, 再由 S 是 $\mathbb{Q}$-概形可见 b 在 $\mathcal{E}_1^n$ 中。

由此有 $o_V^*\mathcal{E}_1 \cong \omega_{V/S}$, 为 S 上的凝聚层, 且 $\tau^{-1}\omega_{V/S} \cong \mathcal{E}_1$, 而 O_V 作为 O_S-代数层由 $\mathcal{E}_1$ 生成。这样对于任意仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}R \subset S$ 有分次 R-代数满同态

$$\phi : \mathrm{Sym}_R(\omega_{V/S}(U)) \to O_V(\tau^{-1}(U)) \tag{12}$$

且 $O_V|_{\tau^{-1}(U)}$ 由 $O_V(\tau^{-1}(U))$ 生成。由上所述还可见这给出 $\mathcal{R}$-模概形同态 $f : V \to \mathbb{V}(\omega_{V/S})$。我们来证明 ϕ 是同构。记 $A = \mathrm{Sym}_R(\omega_{V/S}(U))$, $\mathcal{M} = \mathrm{Spec}A$, $I = \ker(\phi)$, $J = \omega_{V/S}(U)A$。设 $b \in I$ 为 n 次齐次元 $(n > 0)$, 则由 f 是同态可见 $m_{\mathcal{M}}^*(b) \in (I \otimes_R 1, 1 \otimes_R I)$, 这样就有

$$m_{\mathcal{M}}^*(b) - b \otimes_R 1 - 1 \otimes_R b = \sum_i b_i \otimes_{O_S} b_i' + \sum_i c_i \otimes_{O_S} c_i' \tag{13}$$

其中 $b_i, c_i' \in I$, $b_i', c_i \in J$ 且均为齐次元。由上面的讨论可见每个 b_i, c_i' 的次数都 $< n$。注意若 $n = 1$ 则 $b = 0$, 由归纳法可设所有 $b_i = c_i' = 0$, 从而由上面的讨论得 $b = 0$。

总之 f 是同构。证毕。

在特征非零的情形, 一个 $\mathcal{R}$-模概形不一定形如 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, 例如在 $k = \mathbb{F}_p$ 上, 对于 $\mathcal{R} = \mathrm{Spec}k[x]$ 和 $V = \mathrm{Spec}k[y]$, 由 $\rho^*(y) = x^p \otimes y$ 定义一个作用 $\rho : \mathcal{R} \times_k V \to V$ (即 $\mathcal{R}$ 经过夫罗贝纽斯再左乘作用于 V 上), 易见这给出 V 一个 $\mathcal{R}$-模概形结构, 它不同构于任何 $\mathbb{V}(M)$ 的 $\mathcal{R}$-模概形结构。

引理 2. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{R} = \mathbb{A}_S^1$ (看作环概形), $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 为 S 上的凝聚层。则一个 $\mathcal{R}$-模概形同态 $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F})$ 典范等价于一个 O_S-模层同态 $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$。

证. 记 $m = m_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \times_S \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 为 $\mathcal{R}$ 的乘法, 且对一个 $\mathcal{R}$-模概形 $\mathcal{M}$ 记 $a_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times_S \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 的加法, $\rho = \rho_{\mathcal{M}} : \mathcal{R} \times_S \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 为 $\mathcal{R}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的左乘作用。为简单起见不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, 则 $\mathcal{R} \cong \mathrm{Spec}R[x]$。设 $\mathcal{E} = \tilde{E}$, $\mathcal{F} = \tilde{F}$, 其中 E, F 为有限生成的 R-模。

显然一个 R-模同态 $f : F \to E$ 典范诱导一个 S-概形态射 $\hat{f} : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F})$, 且易见 $\hat{f}$ 是 $\mathcal{R}$-模概形同态。反之, 设 $\phi : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F})$ 为一个 $\mathcal{R}$-模概形同态, 则 ϕ 由 R-代数同态 $\phi^* : \mathrm{Sym}_R(F) \to \mathrm{Sym}_R(E)$ 诱导。只

需证明 ϕ^* 将 $\mathrm{Sym}_R(F)$ 的一次齐次部分 F 映到 $\mathrm{Sym}_R(E)$ 的一次齐次部分 E。由 ϕ 是 $\mathcal{R}$-模概形同态有

$$\rho_{\mathbb{V}(\mathcal{F})} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{R}} \times_S \phi) = \phi \circ \rho_{\mathbb{V}(\mathcal{E})} : \mathcal{R} \times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F}) \tag{14}$$

由 $\mathcal{R}$ 在 $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ 上的左乘作用的定义有

$$F = \{b \in \mathrm{Sym}_R(F) | \rho^*(b) = x \otimes_R b\} \tag{15}$$

由 (14) 和 (15) 可见, 若 $b \in F$ 则

$$\rho^*(\phi^*(b)) = (\mathrm{id}_{R[x]} \otimes_R \phi^*)(\rho^*(b)) = (\mathrm{id}_{R[x]} \otimes_R \phi^*)(x \otimes_R b) = x \otimes_R \phi^*(b) \tag{16}$$

故 $\phi^*(b) \in E$。证毕。

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{R} = \mathbb{A}^1_S$ (看作环概形), $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 为 S 上的局部自由凝聚层。令 $\mathcal{G} = \mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, 则 $\mathbb{V}(\mathcal{G})$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的如下预层:

$$T \mapsto Hom_{\mathcal{R} \times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T, \mathbb{V}(\mathcal{F}) \times_S T)$$

其中 $Hom_{\mathcal{R} \times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T, \mathbb{V}(\mathcal{F}) \times_S T)$ 看作 $\underline{\mathcal{R}}(T)$-模。

证. 对任一态射 $\tau : T \to S$, 由引理 2 可知有典范一一对应

$$Hom_{\mathcal{R} \times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T, \mathbb{V}(\mathcal{F}) \times_S T) \leftrightarrow Hom_{O_T}(\tau^*\mathcal{F}, \tau^*\mathcal{E}) \tag{17}$$

由 $\mathcal{F}$ 为局部自由凝聚层可知

$$\tau^*\mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_{O_T}(\tau^*\mathcal{F}, \tau^*\mathcal{E}) \tag{18}$$

注意 $\mathbb{V}(\mathcal{G}) \times_S T \to T$ 的一个截口 $T \to \mathbb{V}(\mathcal{G}) \times_S T$ 等价于一个 O_T-模同态 $\tau^*\mathcal{G} \to O_T$, 而由 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 局部自由可见

$$\tau^*\mathcal{G} \cong Hom_{O_T}(\tau^*\mathcal{E}, \tau^*\mathcal{F}) \cong \tau^*\mathcal{E}^\vee \otimes_{O_T} \tau^*\mathcal{F} \tag{19}$$

从而有

$$Hom_{O_T}(\tau^*\mathcal{G}, O_T) \cong \tau^*\mathcal{F}^\vee \otimes_{O_T} \tau^*\mathcal{E} \cong Hom_{O_T}(\tau^*\mathcal{F}, \tau^*\mathcal{E}) \tag{20}$$

由此得到 $Hom_{\mathcal{R}\times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E})\times_S T, \mathbb{V}(\mathcal{F})\times_S T)$ 与 $\underline{\mathbb{V}(\mathcal{G})}(T)$ 之间的典范一一对应, 不难验证它是 $\underline{\mathcal{R}}(T)$-模同构。证毕。

设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型分离态射, 则 $\Omega^1_{X/S}$ 为 X 上的凝聚层, 我们定义

$$\mathbb{T}_{X/S} := \mathbb{V}(\Omega^1_{X/S}) \tag{21}$$

称为 X 在 S 上的 (相对) *切丛*, 尽管它未必是向量从 (不难验证这是 I.1.3 中的定义的推广)。

引理 3. 下面是切从的若干基本性质。

i) 切从是典范的, 即任意 S-态射 $f : X \to Y$ 诱导与 f 相容的典范 S-态射 $\mathbb{T}_f : \mathbb{T}_{X/S} \to \mathbb{T}_{Y/S}$, 而典范同态 $f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S}$ 所诱导的典范态射 $\mathbb{T}_{X/S} \to \mathbb{V}(f^*\Omega^1_{Y/S}) \cong \mathbb{T}_{Y/S} \times_Y X$ 是 $\mathbb{A}^1_X$-模概形同态。

ii) 若 S' 为 S-概形而 $X' = X \times_S S'$, 则有 $\mathbb{A}^1_{X'}$-模概形同构 $\mathbb{T}_{X'/S'} \cong \mathbb{T}_{X/S} \times_S S' \cong \mathbb{T}_{X/S} \times_X X'$。

iii) 对任意两个 S-概形 X, Y, 有典范 $\mathbb{A}^1_{X\times_S Y}$-模概形同构 $\mathbb{T}_{X\times_S Y/S} \cong \mathbb{T}_{X/S} \times_S \mathbb{T}_{Y/S}$ (通过对角态射 $\mathbb{A}^1_{X\times_S Y} \to \mathbb{A}^1_X \times_S \mathbb{A}^1_Y$)。

证明很容易, 留作习题 (习题 6)。

还可以定义 X 上的下列典范丛: 对任意 $n \geqslant 0$ 有 X 在 S 上的 (阶不超过 n 的) *微分算子丛* $\mathbb{V}(P^n_{X/S})$, 注意它有左、右两种 $\mathbb{A}^1_X$-模概形结构, $\mathbb{V}(P^0_{X/S}) \cong \mathbb{A}^1_X$, 且有左 $\mathbb{A}^1_X$-模概形同构 $\mathbb{V}(P^1_{X/S}) \cong \mathbb{A}^1_X \oplus \mathbb{T}_{X/S}$。引理 3 可以推广到微分算子丛 (习题 8)。

此外还可以定义 $\mathbb{V}(\mathcal{D}iff^n_S(O_X, O_X))$, 注意其中 $\mathcal{D}iff^n_S(O_X, O_X) \cong \mathcal{H}om_{O_X}(P^n_{X/S}, O_X)$。

设 G 为有限型分离 S-群概形, 记

$$\mathcal{L}ie(G/S) = \mathbb{V}_S(\omega_{G/S}) \tag{22}$$

为 $\mathbb{A}^1_S$-模概形, 并有李代数概形结构 (参看习题 4)。由命题 1.1 有

$$\mathbb{T}_{G/S} \cong \mathcal{L}ie(G/S) \times_S G \tag{23}$$

由定理 1.1 可见 $\mathcal{L}ie(G/S)$ 的局部截口可以理解为 G 的左不变导数 (即李代数层 $Lie(G/S)$ 的局部截口), 故称 $\mathcal{L}ie(G/S)$ 为 G 的*李代数丛*。更一般地, 对任意 $n>0$ 令

$$\mathcal{D}iff^n(G/S)=\mathbb{V}_S(M^n_{G/S}) \tag{24}$$

为 $\mathbb{A}^1_S$-模概形, 由命题 1.2 有

$$\mathbb{V}_G(P^n_{G/S})\cong \mathcal{D}iff^n(G/S)\times_S G \quad (\forall n\geqslant 0) \tag{25}$$

由定理 1.1 可见 $\mathcal{D}iff^n(G/S)$ 的局部截口可以理解为 G 的阶不超过 n 的左不变微分算子 (即 $Diff^n(G/S)$ 的局部截口), 故称 $\mathcal{D}iff^n(G/S)$ 为 G 的次数不超过 n 的*微分算子丛*。

2. 群概形的作用在切丛上的诱导作用

命题 1. 设 $\tau: X\to S$ 为诺特概形的有限型态射, $\pi: G\to S$ 为群概形, ρ 为 G 在 X 上的作用。则 ρ 诱导 G 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的与 ρ 相容的作用。

证. 由引理 II.2.1 我们知道 ρ 等价于一个 $G\times_S X$ 的一个 G-自同构 $\Phi:(g,x)\mapsto(g,gx)$, 满足 $(g,g',gg'x)=(g,g',g(g'x))$。由引理 3 可见 Φ 诱导 $\mathbb{T}_{G\times_S X/G}\cong G\times_S\mathbb{T}_{X/S}$ 的 G-自同构 Ψ, 而两个 $G\times_S G$-自同构

$$\Phi_1=\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_1}\times_G\Phi,\Phi_2=\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2}\times_G\Phi: G\times_S G\times_S X\to G\times_S G\times_S X \tag{1}$$

分别诱导 $\mathbb{T}_{G\times_S G\times_S X/G\times_S G}\cong G\times_S G\times_S\mathbb{T}_{X/S}$ 的 $G\times_S G$-自同构

$$\Psi_1=\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_1}\times_G\Psi,\Psi_2=\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2}\times_G\Psi \tag{2}$$

另一方面, 由引理 3 可见 $\Phi_3=\mathrm{id}_m\times_G\Phi$ 所诱导的 $G\times_S G\times_S\mathbb{T}_{X/S}$ 的 $G\times_S G$-自同构为

$$\Psi_3=\mathrm{id}_m\times_G\Psi \tag{3}$$

由引理 II.2.1 有 $\Phi_1\circ\Phi_2=\Phi_3$, 故由引理 3 有 $\Psi_1\circ\Psi_2=\Psi_3$, 即

$$\mathrm{id}_m\times_G\Psi=(\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_1}\times_G\Psi)\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2}\times_G\Psi): G\times_S G\times_S\mathbb{T}_{X/S}\to G\times_S G\times_S\mathbb{T}_{X/S} \tag{4}$$

再由引理 II.2.1 可知 Ψ 等价于 G 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的一个作用，它显然与 ρ 相容。证毕。

对 (2.1.9) 应用函子 $\mathbb{V}$，我们得到 $\mathbb{A}^1_X$-模概形的正合列

$$\mathcal{L}ie(H/X) \hookrightarrow \mathcal{L}ie(G/S) \times_S X \xrightarrow{\rho_*} \mathbb{T}_{X/S} \tag{5}$$

例 1. 令 ρ 为 $G = GL_{n/\mathbb{Z}}$ 在 $X = \mathbb{A}^n$ (看作 $\mathbb{Z}$ 上的加法群概形) 上的典范作用。令 $V = \mathcal{L}ie(X/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{A}^n$，则 $\mathbb{T}_{X/\mathbb{Z}} \cong V \times X$。取 V 的坐标 $t = (t_1, ..., t_n)$ 和 X 的坐标 $x = (x_1, ..., x_n)$ 合起来作为 $\mathbb{T}_{X/\mathbb{Z}}$ 的坐标。命题 1 所说的 G 在 $\mathbb{T}_{X/\mathbb{Z}}$ 上的诱导作用为

$$(g, (x, v)) \mapsto (gx, gv) \quad (g \in G, x \in X, v \in V) \tag{6}$$

直接计算可见 (5) 中的诱导同态 $\rho_* : \mathcal{L}ie(G/\mathbb{Z}) \times X \to \mathbb{T}_{X/\mathbb{Z}}$ 由

$$((a_{ij}), x) \mapsto ((\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j), x) \tag{7}$$

给出。存在 G 在 $\mathcal{L}ie(G/\mathbb{Z}) \times X$ 上的作用 η:

$$(g, ((a_{ij}), x)) \mapsto (g(a_{ij})g^{-1}, gx) \tag{8}$$

与 ρ 所诱导的 G 在 $\mathbb{T}_{X/\mathbb{Z}}$ 上的作用相容。

警告: η 不是 ρ 诱导的典范作用，因为 $Lie(G/\mathbb{Z})$ 的截口是 ρ-不变的，即 ρ 在 $\mathcal{L}ie(G/\mathbb{Z})$ 上诱导的典范作用是平凡的。

引理 4. 设 $\mathcal{R}$ 为 S 上的分离环概形，则存在 $\mathcal{R} \times_S \mathcal{R}$ 中的一个典范闭子概形 $\mathcal{U}$，代表如下预层:

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{Sch}_S &\to ((\text{groups})) \\ T &\mapsto \{\underline{\mathcal{R}}(T) \text{ 中的单位}\} \end{aligned}$$

证．记 $1_{\mathcal{R}} : S \to \mathcal{R}$ 为单位截口，则由 $\mathcal{R}$ 在 S 上分离可见 $1_{\mathcal{R}}$ 是闭嵌入。令

$$\mathcal{U} = m^{-1}(\text{im}(1_{\mathcal{R}})) \tag{9}$$

易见对任意 $T \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$, $\underline{\mathrm{pr}_1}(T) : \underline{\mathcal{U}}(T) \to \underline{\mathcal{R}}(T)$ 给出 $\underline{\mathcal{U}}(T)$ 与 $\underline{\mathcal{R}}(T)$ 中的单位组成的子集之间的一一对应。这说明 $\mathcal{U}$ 代表 F。证毕。

设 $\mathcal{E}$为诺特概形 S上的局部自由凝聚层,记 $\mathcal{R} = \mathbb{A}^1_S$, $\mathcal{A} = \mathbb{V}(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}))$, 则由推论 1 可见 $\mathcal{A}$ 代表预层

$$T \mapsto End_{\mathcal{R}\times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T)$$

从而具有环概形结构, 且为 $\mathcal{R}$-代数概形。由引理 4 有 $\mathcal{A} \times_S \mathcal{A}$ 中的闭子概形 $\mathcal{U}$ 代表预层

$$T \mapsto Aut_{\mathcal{R}\times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T)$$

局部它是一般线性群概形, 故可记 $\mathcal{U} = GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$。不难验证 $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ 是开嵌入 (习题 7)。

例 1 中的作用 η 可以推广到一般情形。设 G 为有限型分离 S-群概形, $\mathcal{E} = M^n_{G/S}$ 或 $\omega_{G/S}$, 如上一小节那样理解为微分算子丛或李代数丛。我们来证明若 $\mathcal{E}$ 在 S 上是局部自由的, 则 G 在自身上的共轭作用诱导 G 在 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 上的一个"共轭作用" $(g, D) \mapsto g_*D$。

为简单起见采用预层的语言, 并对一个态射 $g : S' \to G$ 给出的平移 T_g 简记 T_{g*} (T^*_g) 为 g_* (g^*)。按预层的语言, 一个微分算子 D 是左不变的当且仅当对任意 g 有 $g_*D = g^{-1*} \circ D \circ g^* = D$。我们需要证明若 D 是左不变的, 则对任意 g, g_*D 也是左不变的。对任意 $h : S' \to G$ 及局部函数 f 有

$$\begin{aligned} g_*D \circ h^*(f) &= g^{-1*} \circ D(f \circ (hg)) \\ &= g^{-1*} \circ D(f \circ g \circ (g^{-1}hg)) \\ &= g^{-1*} \circ (g^{-1}hg)^* \circ D(f \circ g) \\ &= h^* \circ g^{-1*} \circ D(f \circ g) = h^* \circ g_*D(f) \end{aligned} \tag{10}$$

故 $g_*D \circ h^* = h^* \circ g_*D$, 这说明 g_*D 是左不变的。

注意这个诱导的共轭作用是线性的, 由推论 1 和引理 4 可见这个作用等价于一个线性表示 (同态) $\phi : G \to GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$。若 $\mathcal{E} = \omega_{G/S}$, 则 ϕ 又诱导一个李代数同态 $\phi_* : Lie(G/S) \to End_{\mathbb{A}^1_S}(\mathcal{L}ie(G/S))$, 它可以计算如

下。对 $Lie(G/S)$ 的任意截口 D, D' 及 O_G 的任意局部截口 f, 由定义有

$$\begin{aligned}\phi_*(D)(D')(f) &= (D' \otimes \mathrm{id}) \circ ((\iota, \mathrm{id})^* \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes D) \circ m_{123}^*(f) \\ &= (D' \otimes \mathrm{id}) \circ (\iota^* \cdot \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes D) \circ m^*(f) \\ &= ((D' \circ \iota^*) \otimes D)(m^*(f)) + (D \otimes D')(m^*(f)) \\ &= (-D' \circ D + D \circ D')(f)\end{aligned} \tag{11}$$

故 $\phi_*(D)(D') = D \circ D' - D' \circ D = \mathrm{ad}(D)(D')$, 即 $\phi_*(D) = \mathrm{ad}(D)$。此外, 由直接计算不难证明 ϕ_* 给出的 G 在 $\mathcal{L}ie(G/S) \times_S G$ 上的作用

$$(g, (D, h)) \mapsto (g_* D, ghg^{-1}) \tag{12}$$

与命题 1 中的 G 在 $\mathbb{T}_{G/S}$ 上的诱导作用一致。总之有

命题 2. 设 G 为诺特概形 S 上的有限型分离群概形。对任意 $n > 0$, 若 $M_{G/S}^n$ 是 S-局部自由的, 则 G 在自身上的共轭作用诱导 G 在 $\mathcal{D}iff^n(G/S)$ 上的一个 $\mathbb{A}_S^1$-线性作用 $(g, D) \mapsto g_* D$, 它等价于一个 S-群概形同态 $\phi : G \to GL_{\mathcal{D}iff^n(G/S)/S}$。特别地, 若 $\omega_{G/S}$ 是 S-局部自由的, 则 G 在自身上的共轭作用诱导 G 在 $\mathcal{L}ie(G/S)$ 上的一个 $\mathbb{A}_S^1$-线性作用 $(g, D) \mapsto g_* D$, 它等价于一个群概形同态 $\phi : G \to GL_{\mathcal{L}ie(G/S)/S}$, 而 ϕ 诱导的李代数同态 $\phi_* : Lie(G/S) \to End_{\mathbb{A}_S^1}(\mathcal{L}ie(G/S))$ 为

$$\phi_*(D) = \mathrm{ad}(D) \quad (\forall D) \tag{13}$$

且 ϕ 给出的 G 在 $\mathcal{L}ie(G/S) \times_S G$ 上的作用与 G 的共轭作用在 $\mathbb{T}_{G/S}$ 上的诱导作用一致。

习题

1. 设 X 为诺特概形。证明 X 上的一个秩 r 向量丛 V 典范等价于一个秩 r 局部自由凝聚层 $\mathcal{E}$, 二者的关系是 $V = \mathbb{V}(\mathcal{E})$, 而 $\mathcal{E}$ 同构于 $V \to X$ 的局部截口组成的层 (为局部自由层, 见例 I.1.1) 的对偶。

2. 证明 (1.3)。

3. 证明 (1.5)。

4. 设 S 为概形。证明下列断言:

i) 一个 S-环概形等价于一个可代表的反变函子 $\mathfrak{Sch}_S \to$((rings))。

ii) 给定 S-环概形 $\mathcal{R}$, 一个 $\mathcal{R}$-模概形等价于一个可代表的反变函子 $M : \mathfrak{Sch} \to \mathfrak{Ab}$ 连同一个自然变换 $\rho : \underline{\mathcal{R}} \times M \to M$, 使得对任意 $T \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch})$, $\rho(T) : \underline{\mathcal{R}}(T) \times M(T) \to M(T)$ 给出 $M(T)$ 一个 $\underline{\mathcal{R}}(T)$-模结构。

5. 设 $\mathcal{E}$ 为诺特概形 X 上的凝聚层。证明 $\mathbb{A}^1_X$ 具有 X-环概形结构。而 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 具有 $\mathbb{A}^1_X$-模概形结构。

6. 证明引理 3。

7. 设 $\mathcal{E}$为诺特概形 S上的局部自由凝聚层, $\mathrm{pr}_1 : GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S} \to \mathbb{V}(\mathcal{E}nd_{O_S}(\mathcal{E}))$ 为由定义给出的投射。证明 pr_1 是开嵌入。

8. 证明 (阶不超过 n 的) 微分算子丛的下列基本性质。

i) 微分算子丛是典范的, 即任意 S-态射 $f : X \to Y$ 诱导与 f 相容的典范 S-态射 $D^n_f : \mathbb{V}_X(P^n_{X/S}) \to \mathbb{V}_Y(P^n_{Y/S})$, 而典范同态 $f^*P^n_{Y/S} \to P^n_{X/S}$ 所诱导的典范态射 $\mathbb{V}_X(P^n_{X/S}) \to \mathbb{V}(f^*P^n_{Y/S}) \cong \mathbb{V}_Y(P^n_{Y/S}) \times_Y X$ 是 $\mathbb{A}^1_X$-模概形同态。

ii) 若 S'为 S-概形而 $X' = X \times_S S'$, 则有 $\mathbb{A}^1_{X'}$-模概形同构 $\mathbb{V}(P^n_{X'/S'}) \cong \mathbb{V}(P^n_{X/S}) \times_S S' \cong \mathbb{V}(P^n_{X/S}) \times_X X'$。

9. 设 X 为 S-概形而 $\mathcal{E}$ 为 X 上的凝聚层。记 $q : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to X$ 为投射。证明:

i) $\Omega^1_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \cong q^*\mathcal{E}$;

ii) 将典范右正合列 $q^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S} \to \Omega^1_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \to 0$ 用 $o^*_{\mathbb{V}(\mathcal{E})}$ 拉回所得的 O_X-模层右正合列也是左正合的。

第 4 节　α-层与 α-群

1. α-模与 α-层

命题 1. 设 S 为局部诺特概形, $\pi: G \to S$ 为平坦有限交换群概形, 则 G^D 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的下列预层:

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G \times_S T, \mathbb{G}_{m/T})$$

而 $\mathcal{L}ie(G^D/S) = \mathbb{V}(\omega_{G/S})$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的下列预层:

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G \times_S T, \mathbb{G}_{a/T})$$

证. 不难看出我们只需证明对任意 $G \to S$ 存在自然一一对应 $\mathrm{Mor}_S(S, G^D) \to \mathrm{Hom}_S(G, \mathbb{G}_{m/S})$ 及 $\mathrm{Mor}_S(S, \mathcal{L}ie(G^D/S)) \to \mathrm{Hom}_S(G, \mathbb{G}_{a/S})$。不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $G = \mathrm{Spec}A$。

由于 $\mathbb{G}_{m/S} \cong \mathrm{Spec}(R[t, t^{-1}])$ 的群概形结构由 $m^*(t) = t \otimes_R t$, $\iota^*(t) = t^{-1}$, $o^*(t) = 1$ 给出, 一个 S-同态 $G \to \mathbb{G}_{m/S}$ 等价于一个元 $f \in A$ 使得

$$m^*(f) = f \otimes_R f, \quad o^*(f) = 1 \tag{1}$$

这是因为另一个条件 $\iota^*(f) = f^{-1}$ 可由 (1) 推出:

$$f\iota^*(f) = \Delta^* \circ (\mathrm{id}_R \otimes_R \iota^*) \circ m^*(f) = \pi^* \circ o^*(f) = 1 \tag{2}$$

将 f 看作一个 R-模同态 $A^\vee \to R$ (注意 $A^\vee$ 为 A 的对偶 R-双代数), 则 (1) 的两个条件可分别表为 $f(ab) = f(a)f(b)$ 及 $f(1) = 1$, 换言之等价于 f 为 R-代数同态; 而一个 R-代数同态 $A^\vee \to R$ 等价于 $G^D \to S$ 的一个截口。

类似地, 由 $\mathbb{G}_{a/S}$ 的群概形结构可见一个 S-同态 $G \to \mathbb{G}_{a/S}$ 等价于一个元 $t \in A$ 使得

$$m^*(t) = t \otimes_R 1 + 1 \otimes_R t \tag{3}$$

以及

$$o^*(t) = 0, \quad \iota^*(t) = -t \tag{4}$$

但 (4) 可由 (3) 推出: 将 $o^* \otimes_R o^*$ 作用于 (3) 得

$$o^*(t) = (o^* \otimes_R o^*) \circ m^*(t) = o^*(t) + o^*(t) \tag{5}$$

从而有 $o^*(t)=0$; 再将 $\Delta^*\circ(\mathrm{id}_R\otimes_R\iota^*)$ 作用于 (3) 得

$$0=\pi^*\circ o^*(t)=\Delta^*\circ(\mathrm{id}_R\otimes_R\iota^*)\circ m^*(t)=t+\iota^*(t) \tag{6}$$

将 t 看作 $Hom_R(A^\vee,R)$ 的元, 则 (3) 等价于

$$t(ab)=t(a)o^*(b)+t(b)o^*(a)\quad(\forall a,b\in A^\vee) \tag{7}$$

这等价于 $t\in\mathrm{Der}_R(A^\vee,R)$; 而由定理 1.1.ii) 它等价于 $\mathcal{L}ie(G^D/S)\to S$ 的一个截口。证毕。

设 $S=\mathrm{Spec}R$ 为诺特概形, $G=\mathrm{Spec}A$ 为 S 上的有限平坦交换群概形。由命题 1.ii) 可知, 一个 $\mathrm{Lie}(G^D/S)$ 的元等价于一个同态 $G\to\mathbb{G}_{a/S}$, 而这又等价于一个元 $t\in A$ 使得 (3) 成立。一般地, 设 $\pi:G\to S$ 为分离群概形, 则易见 π_*O_G 中满足 (3) 的所有局部截口组成一个 O_S-子模层, 称为 G 的 α-*层* (α-*sheaf*), 记为 $\alpha(G)$。若 $S=\mathrm{Spec}R$ 而 $G=\mathrm{Spec}A$, 则 A 中所有满足 (3) 的元组成一个 R-子模, 称为 G 的 α-模 (α-module), 它等于 $\Gamma(S,\alpha(G))$ (我们有时滥用记号将它也记作 $\alpha(G)$)。

例如对 S 上的任意凝聚层 $\mathcal{E}$, 由定义易见 $\mathcal{E}\subset\alpha(\mathbb{V}(\mathcal{E}))$, 且当 S 为 $\mathbb{Q}$-概形而 $\mathcal{E}$ 局部自由时有 $\mathcal{E}=\alpha(\mathbb{V}(\mathcal{E}))$ (习题 2)。

若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形, 则由定义易见对 $\alpha(G)$ 的任一局部截口 t, t^p 也是 $\alpha(G)$ 的局部截口。

若 G,G' 为 S 上的两个分离群概形, 则一个 S-群概形同态 $f:G\to G'$ 显然诱导一个典范 O_S-模层同态 $f^*:\alpha(G')\to\alpha(G)$。

设 S 为诺特概形, G 为 S 上的有限平坦交换群概形, 则由上所述 $\alpha(G)$ 典范同构于 $Lie(G^D/S)\cong Hom_{O_S}(\omega_{G^D/S},O_S)$, 故为凝聚层。总之有

推论 1. 设 S 为诺特概形。则 $G\mapsto\alpha(G)$ 给出一个从有限平坦交换 S-群概形范畴到 S-凝聚层范畴的反变函子。

对于 $S=\mathrm{Spec}R$ 上的一个有限平坦交换群概形 $G=\mathrm{Spec}A$, 局部对某个 r 有一个 S-群概形同态 $f:G\to\mathbb{G}_{a/S}^r$, 诱导 α-层的满同态 $f^*:\alpha(\mathbb{G}_{a/S}^r)\cong\alpha(\mathbb{G}_{a/S})^{\oplus r}\to\alpha(G)$。

特别地, 若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形, $G \to S$ 具有连通纤维且 $V_{G/S}=0$, 则不难验证 $K=\ker(f)=0$, 从而 f 为闭嵌入 (见命题 II.1.ii))。因若不然, 存在一个点 $s \in S$ 使得 K 在 s 上的纤维 $K_s \neq 0$。记 $i : K \to G$ 为嵌入, 注意 $i_s^* : \alpha(G_s) \to \alpha(K_s)$ 为零同态, 从而由命题 1 可知 $Lie(G_s^D/\kappa(s)) \to Lie(K_s^D/\kappa(s))$ 为零同态; 另一方面, 由 $V_{G/S}=0$ 有 $F_{G_s^D/\kappa(s)}=0$, 由例 1.1 可知 G_s^D 的结构环 B 形如 $\kappa(s)[x_1...,x_n]/(x_1^p,...,x_n^p)$, 而 K_s^D 的结构环 B' 可看作 B 的子环, 且在任意 $D \in Lie(G_s^D/\kappa(s))$ 的作用下为 0, 从而 $B' \cong \kappa(s)$, 即 $K_s^D=0$, 矛盾。注意此时 A 作为 R-代数由 $\alpha(G)$ 生成。总之有

推论 2. 设 $S=\mathrm{Spec}R$ 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, $G=\mathrm{Spec}A$ 为 S 上的有限平坦交换群概形, 具有连通纤维且 $V_{G/S}=0$, 则 G 可以嵌入某个 $\mathbb{G}_{a/S}^r$ 作为闭子群概形, 且 A 作为 R-代数由 $\alpha(G)$ 生成。

对任意特征 $p>0$ 的域 k, 记 $\mathfrak{Ab}_{0k}$ 为 k 上的有限交换群概形范畴, 它有如下四个子范畴: 平展且对偶平展对象的子范畴 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{et}}$, 平展而对偶无穷小对象的子范畴 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}}$, 无穷小而对偶平展对象的子范畴 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}}$, 以及无穷小且对偶无穷小对象的子范畴 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}}$。

对任意 $n>0$ 记 $\alpha_{p^n}=\mathbb{G}_{a/k}[F^n]$。若 $G=\mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{k\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 且 $V_{G/k}=0$, 则由推论 2 可知 G 可以嵌入某个 $\mathbb{G}_{a/k}^r$ 作为闭子群概形, 而由 G 无穷小可见存在 $n>0$ 使得 $G \subset \mathbb{G}_{a/k}^r[F^n] \cong \alpha_{p^n}^r$。注意 $\alpha_{p^n}^r$ 的群概形结构为 $\mathrm{Spec}k[t_1,...,t_r]/(t_1^{p^n},...,t_r^{p^n})$, $m^*(t_i)=t_i \otimes_k 1+1 \otimes_k t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, 易见 $\alpha(\alpha_{p^n}^r)$ 作为 k-线性空间有一组基 $t_i, t_i^p, ..., t_i^{p^{n-1}}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, 而 $\alpha(G)$ 可看作 $\alpha(\alpha_{p^n}^r)$ 的商空间。若 k 是完全域, 则由归纳法可取 $t_1,...,t_r$ 使得 $\ker(\alpha(\alpha_{p^n}^r) \to \alpha(G))$ 由 $t_1^{p^{n_1}}, t_1^{p^{n_1+1}}, ..., t_1^{p^n}, t_2^{p^{n_2}}, ..., t_r^{p^n}$ $(n_1 \geqslant ... \geqslant n_r)$ 生成, 从而

$$G \cong \alpha_{p^{n_1}} \times_k \cdots \times_k \alpha_{p^{n_r}} \tag{8}$$

总之有

推论 3. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, G 为 k 上的有限无穷小交换群概形使得 $V_{G/k}=0$, 则有正整数 $n_1 \geqslant ... \geqslant n_r$ 使得 (8) 成立, 其中 $r=\dim_k \mathrm{Lie}(G/k)$。

2. α-群

设 S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, G 为 S 上的平坦有限交换群概形。若 $F_{G/S}=0$ 且 $V_{G/S}=0$, 则称 G 为 α-群 (α-group)。

对任意 n 简记 α_p^n 为 n 个 ($\mathbb{F}_p$ 上的) α_p 的拷贝的直积 (这里 α_p 看作 $\mathbb{F}_p$-群概形)。

命题 2. 设 S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, G 为 S 上的 α-群, 则 $\omega_{G/S}$ 是局部自由层, $\alpha(G)\to\omega_{G/S}$ 为同构, 且 G 在 S 上局部同构于 $\alpha_p^n\times S$, 其中 n 为 $\omega_{G/S}$ 的局部秩。

证. 只需考虑 $S=\mathrm{Spec}R$, R 为诺特局部环, 而 $G=\mathrm{Spec}A$, A 作为 R-模为自由模的情形即可。令 $P\subset R$ 为极大理想而 $n=\dim_{\kappa(P)}(\omega_{G/S}(S)\otimes_R R/P)$, 则由推论 2 可见有闭嵌入 $G\hookrightarrow\mathbb{G}^n_{a/S}$, 再由 $F_{G/S}=0$ 得闭嵌入 $f:G\hookrightarrow\mathbb{G}^n_{a/S}[F]\cong\alpha_p^n\times S$。由引理 1.1.i) 可见 A 作为 R-模的秩为 p^n, 而 $\alpha_p^n\times S$ 的结构环同构于 $R[x_1,...,x_n]/(x_1^p,...,x_n^p)$, 其秩也是 p^n, 故 $f^*:R[x_1,...,x_n]/(x_1^p,...,x_n^p)\to A$ 为同构。从而 $\alpha(G)\cong\omega_{G/S}$ 且为局部自由层。证毕。

由此可见一个 α-群的群概形结构完全由其 α-层决定。设 G,G' 为 S 上的两个 α-群。则由推论 1 可知一个 S-群概形同态 $f:G\to G'$ 诱导一个 O_S-模层同态 $f^*:\alpha(G')\to\alpha(G)$, 由推论 2 的证明可见它决定 f; 反之, 由定义及推论 2 易见一个 O_S-模层同态 $\phi:\alpha(G')\to\alpha(G)$ 诱导一个 S-群概形同态 $f:G\to G'$ 使得 $f^*=\phi$。故一个 S-群概形同态 $G\to G'$ 等价于一个 O_S-模层同态 $\alpha(G')\to\alpha(G)$。事实上, 对 S 上的任意局部自由凝聚层 $\mathcal{E}$ 可以定义一个 α-群 $G=\mathbb{V}(\mathcal{E})[F]$, 且易见 $\alpha(G)\cong\mathcal{E}$。由此得

推论 4. 设 S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形。则 S 上的 α-群范畴反等价于 S 上的局部自由凝聚层范畴, 具体说一个 α-群 G 对应于局部自由凝聚层 $\alpha(G)$, 而一个局部自由凝聚层 $\mathcal{E}$ 所对应的 α-群为 $\mathbb{V}(\mathcal{E})[F]$。

注 1. 对任意凝聚层 $\mathcal{E}$ 可以定义一个群概形 $\mathbb{V}(\mathcal{E})[F]$, 它在 S 上的纤维都是 α-群。若 $\phi:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$ 为 S 上的局部自由凝聚层的同态, 而 $f:\mathbb{V}(\mathcal{E}_2)[F]\to\mathbb{V}(\mathcal{E}_1)[F]$ 为 ϕ 所诱导的 α-群同态, 令 $\mathcal{E}=\mathrm{coker}(\phi)$, 则有

$\ker(f) \cong \mathbb{V}(\mathcal{E})[F]$ (习题 4)。

设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域而 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{0k})$, 则可以定义 $G^{(p^{-1})}$, 从而可以定义 $V_{G^{(p^{-1})}/k} : G \to G^{(p^{-1})}$。简记 $\ker(V_{G^{(p^{-1})}/k})$ 为 $G[V]$。令 $H = G[F] \cap G[V]$, 则显然 H 是 G 中最大的 α-群。若 $H \cong \alpha_p^r$, 则称 r 为 G 的 a-数 (a-number), 记为 $a(G)$。由命题 2 和推论 4 易见

$$a(G) = \dim_k Hom_k(\alpha_p, G) \tag{1}$$

若 $G' \subset G$ 为闭子群概形, 则显然 $H \cap G'$ 为 G' 中最大的 α-群, 故 $a(G') \leqslant a(G)$。

若 $G = \mathrm{Spec}(R) \neq 0 \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 则存在 $n > 0$ 使得 $F_{G/k}^n = 0$, 故 $G[F] \neq 0$, 同样 $G[V] \neq 0$。注意 $G[F] \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 可见 $H = (G[F])[V] \neq 0$, 而 H 是 G 中最大的 α-群, 故 $a(G) > 0$。另一方面, 若 G 为 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{et}}$, $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}}$ 或 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}}$ 中的对象, 则易见 $a(G) = 0$。

设 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$。若 $a(G) = 1$, 则称 G 为**单生成的** (*simply generated*)。

令 H 为 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{0k})$ 中最大的 α-群。由推论 4 可见一个 α-群的闭子群概形仍为 α-群, 而给出一个 α-子群等价于给出 α-模的一个商模。这样就可以给出 H 的一个同构于 α_p 的闭子群概形 H_1。注意 $G/H_1 \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$(参看命题 VI.1.6), 由归纳法就可以给出 G 的一个过滤, 其每个因子都同构于 α_p。若 $a(G) = a(H) > 1$, 则可取 H 的一个同构于 α_p 的商群概形 H'', 并在上述构造过程中取 H_1 使得它在 H'' 中的象为 0, 故有满同态 $q : H/H_1 \to H''$。令 H' 为 $G' = G/H_1$ 中最大的 α-群, 则由上所述不难将 q 扩张为一个满同态 $H' \to H''$。若 $a(G')$ 仍大于 1, 将 G 换为 G', 并重复上面的构造过程。由归纳法最终将得到 G 的一个商群概形 $\bar{G}$, 其中最大的 α-群同构于 H'', 故 $a(\bar{G}) = 1$。注意 H'' 的任意性, 可见可取有限多个单生成的 $G_i \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ $(1 \leqslant i \leqslant r = a(G))$ 及同态 $f : G \to G_1 \times_k \cdots \times_k G_r$ 使得 f 在 H 上的限制是单同态, 这样 $\ker(f) \cap H = 0$, 从而 $\ker(f) = 0$ (因为 $\ker(f) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 且 $a(\ker(f)) = 0$)。总之有

命题 3. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域而 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 则 G 有一个过滤, 其每个因子都同构于 α_p, 且可取 $r = a(G)$ 个单生成的 $G_i \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 使得有单同态 $G \to G_1 \times_k \cdots \times_k G_r$。

由此立得

推论 5. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, 则 $\mathfrak{Ab}^{\mathrm{inf}}_{\mathrm{inf}}$ 中的单群概形在同构之下只有 α_p。若 $G\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}^{\mathrm{inf}}_{\mathrm{inf}})$ 的长度为 l, 则 G 在 k 上的次数 (即 G 的结构环作为 k-线性空间的维数) 等于 p^l。

习题

1. 设 R 为诺特 $\mathbb{F}_p$-代数, G 为 $S=\mathrm{Spec}R$ 上的 α-群, $M=\alpha(G)$。证明 G 的一个闭子群概形等价于 M 的一个商模。

2. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{E}$ 为 S 上的凝聚层, $G=\mathbb{V}(\mathcal{E})$ (看作加法群概形)。证明在 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$ 中有 $\mathcal{E}\subset\alpha(G)$, 且当 S 为 $\mathbb{Q}$-概形而 $\mathcal{E}$ 局部自由时有 $\mathcal{E}=\alpha(G)$。

3. 设 G,G' 为诺特概形 S 上的两个分离群概形, 证明 $\alpha(G\times_S G')\cong\alpha(G')\oplus\alpha(G)$。

4. 证明注 1 中的断言。

第 Ⅳ 章　模空间理论

第 1 节　分类与模空间

1. 分类学的一些基本概念

在数学的许多学科中分类学处于重要地位。例如在拓扑学中, 紧致曲面的基本不变量是亏格与单/双侧性, 亏格只能取非负整数值, 单/双侧性可分别用 1 和 2 表征, 这样的不变量称为离散不变量; 对任意给定非负整数, 在同胚之下存在唯一亏格为 g 的紧致双侧曲面, 即有 g 个孔的"多孔救生圈" (图 1), 亏格为 g 的紧致单侧曲面在同胚之下也是存在唯一的。

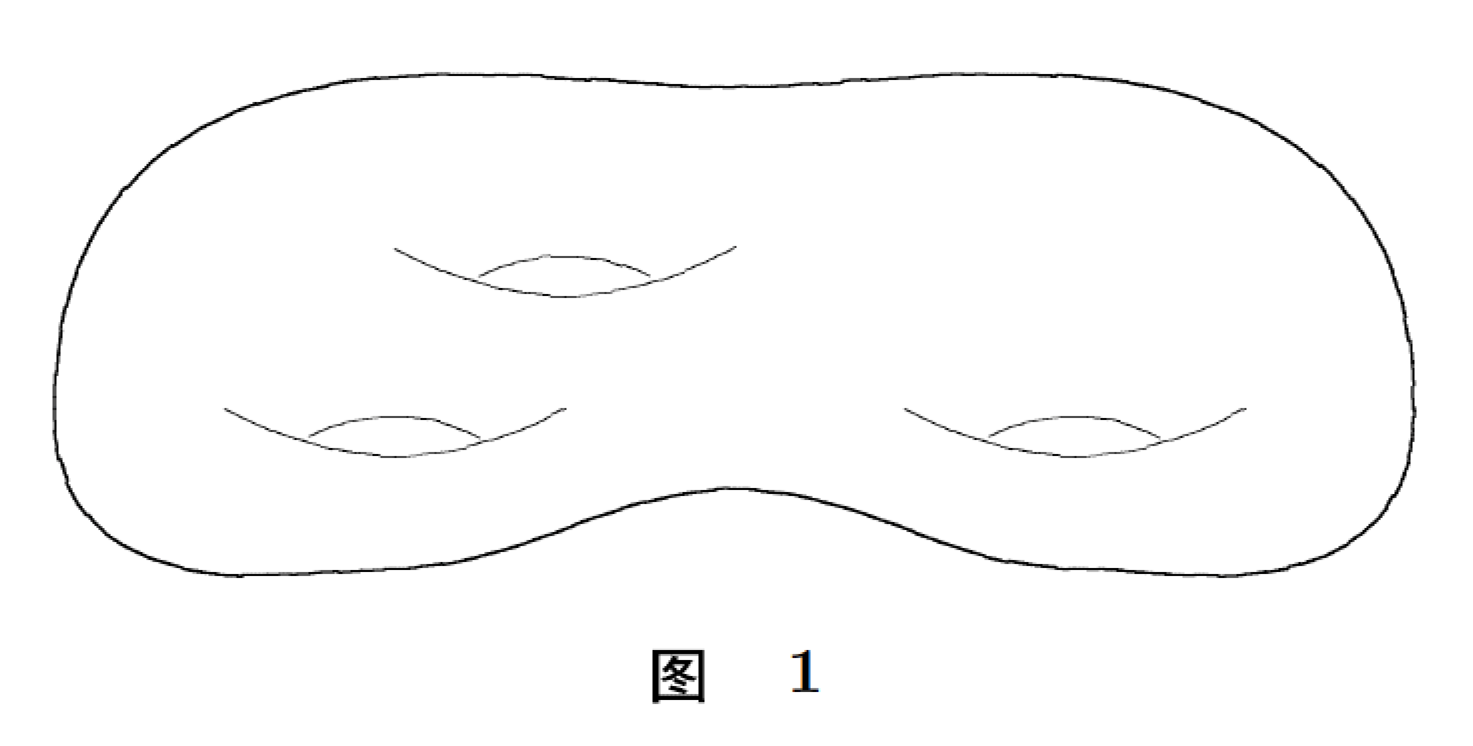


图　1

又例如, 在复半单李代数的分类中, 每个复半单李代数有一个邓肯图, 而每个邓肯图对应于复半单李代数的唯一同构类, 邓肯图也是一种离散不变量。

分类学的基本意义和用途是这样的: 对某一类数学对象的完整分类, 意味着已经找到所有该类对象, 并能给出这类对象的重要特征 (例如某些不变量), 在最好的情形甚至能完全给出该类各对象的结构或构造方法。最低限度, 也可以认为对宇宙中的这类对象已经有了一个完整的"档案", 此后再遇到有关这类对象的问题, 就不必在宇宙中漫无边际地搜寻和检验, 只需对照这个档案来检验即可。例如, 对于大于 3 的任意素数 p, 不存在维数为 p 的复单李代数, 要证明或检验这一事实, 从 p 是大于 3 的素数这个条件出发是很困难的, 但若使用已知的复单李代数的分类, 则是很容易的事。

有些不变量不是离散的, 例如椭圆曲线的 j-不变量 (见 [H, Ⅳ.4]) 就是一个可取任意值 (不必是整数) 的不变量, 这样的不变量可以称作连续不变量, 但下面我们将看到也可以用一个空间 $\mathcal{A}_1$ 的点来代表椭圆曲线的同构类, 而且这是更好的观点。

在代数几何中, 完整的同构分类一般是很困难的, 除去少数情形如曲线、阿贝尔簇等外, 对大多数对象类迄今只做到较为粗糙的分类。(当然, 有些古典的分类问题如一个平面上所有直线的分类是不难的。)

首先是双有理等价分类, 这基本上等于对函数域分类 (当然对曲线的双有理等价分类也就是同构分类), 例如对曲面的双有理分类已基本清楚, 对三维代数簇的分类也有了突破性的进展, 但对更高维的代数簇到目前进展还很少。对向量丛的分类也是一个大课题, 目前仅对一些特殊情形有完整的同构分类 (参看 [V])。

维数、亏格等都是典型的离散不变量, 我们下面还将看到很多其他离散不变量。对于某个对象类的分类, 一般是先找足够的离散不变量, 使得在固定一组离散不变量后, 再用一组连续不变量即可完全确定对象的同构类。例如对给定代数闭域 k 上的 (光滑射影) 曲线, 最重要的离散不变量是亏格 g; 在固定了亏格 g 后, 可以用一个空间 (代数簇) $\mathcal{M}_g$ 中的点来代表曲线的同构类, 详言之有一一对应

$$\{\text{亏格 } g \text{ 的 } k\text{-曲线的同构类}\} \leftrightarrow \{\mathcal{M}_g \text{ 的 } k\text{-点}\}$$

(这种对应的几何意义将在后面解释)。例如 $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{A}^1$, 在上述一一对应下一条 k-椭圆曲线 C 对应的点即为 $j(C) \in k$ (看作 $\mathbb{A}^1$ 的一个 k-点)。用空间的点代表同构类比简单地用一组连续参变量更合理, 因为通常是有多个连续参变量, 而它们之间常满足一些代数关系。像 $\mathcal{M}_g$ 这样的空间称为“模空间”。为了理解 $\mathcal{M}_g$ 的几何结构的意义, 还应特别注意 $\mathcal{M}_g$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的。

我们先来回顾黎曼对椭圆曲线的分类工作。

“椭圆曲线”一词来源于椭圆函数。椭圆函数是由椭圆积分 (在计算椭圆弧长时出现的积分) 产生的, 在历史上, 分析学家们知道椭圆积分是不能用初等函数表示的, 后来从复分析的角度研究, 发现了很多有趣的性质, 特别是“双周期性”。例如令 $\wp$ 为 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}$ (其中 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$) 的反函数, 则 $\wp$ 可以开拓成复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个半纯函数 (称为一个“魏

尔斯特拉斯 $\wp$-函数”), 且显然 $\wp$ 满足常微分方程 $\wp'^2=\wp^3+a\wp+b$。存在 $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{C}$, τ_1/τ_2 为虚数, 使得 $\wp(z+\tau_1)=\wp(z+\tau_2)=\wp(z)$。取 τ_1,τ_2 为 $\wp$ 的一组周期, 即对任意复数 τ, 若 $\wp(z+\tau)=\wp(z)$ 则 τ 为 τ_1 和 τ_2 的整系数线性组合。令 $\Lambda\subset\mathbb{C}$ 为 τ_1,τ_2 的所有整系数线性组合组成的加法子群 (称为一个格), 则显然 $T=\mathbb{C}/\Lambda$ 为 1 维紧致复李群, 其拓扑结构为环面 (参看图 2)。定义映射 $p:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 将 z 映到 $(1:\wp(z):\wp'(z))$ (若 z 为 $\wp$ 的极点则将 z 映到某个无穷远点), 可以证明 p 诱导一个解析映射 $e:T\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 它是解析的闭嵌入, 而 e 的象为三次光滑曲线 $Y^2Z=X^3+aXZ^2+bZ^3$ (参看习题 1 或教科书如 [GH], 注意复射影空间中的光滑曲线为 1 维紧致复流形, 即紧致黎曼面)。

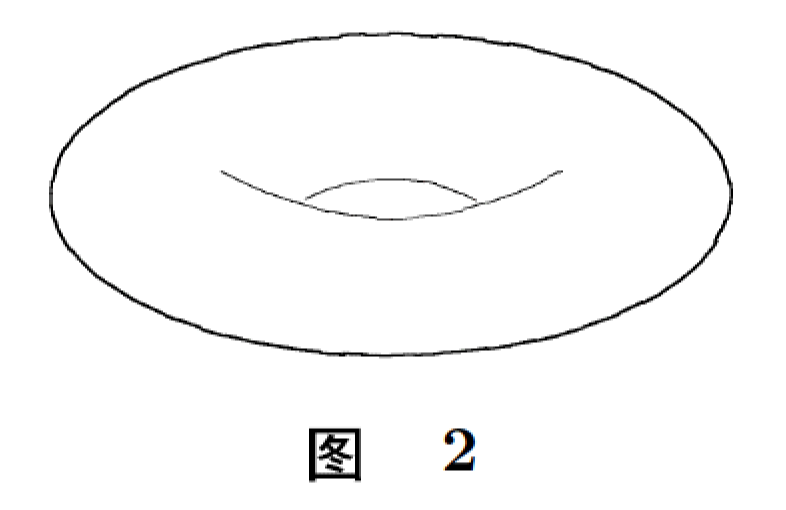


图　2

设 $\Lambda\subset\mathbb{C}$ 为由 $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{C}$ 生成的格, 令 $\Lambda'\subset\mathbb{C}$ 为由 1 和 $\tau=\tau_2/\tau_1$ 生成的格, 则显然有复李群同构 $\mathbb{C}/\Lambda\cong\mathbb{C}/\Lambda'$, 故在研究 $\mathbb{C}/\Lambda$ 时不妨设 $\tau_1=1$。定义魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{1}$$

(这个定义与上面通过积分建立的魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数一致)。显然 $\wp$ 以 Λ 为周期 (即对任意 $\omega\in\Lambda$ 有 $\wp(z+\omega)=\wp(z)$), 因而 $\wp'(z)=\sum\limits_{\omega\in\Lambda}(\frac{-2}{(z-\omega)^3}$ 也以 Λ 为周期, 且不难验证 $\wp$ 和 $\wp'$ 满足方程

$$(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3 \tag{2}$$

其中

$$g_2=60\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^4}\quad,\quad g_3=140\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^6} \tag{3}$$

像上面一样, $z\mapsto(1:\wp(z):\wp'(z))$ 给出闭嵌入 $\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 其象为三次曲线 $Y^2Z=4X^3-g_2XZ^2-g_3Z^3$。这就是说, 对任意格 $\Lambda\subset\mathbb{C}$, 复李

群 $\mathbb{C}/\Lambda$ 解析同构于 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的一条三次光滑曲线。反之，由上所述可见对 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的任意三次光滑曲线 E (其方程总可以通过线性坐标变换化为形如 $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$), 存在一个格 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 使得 E 解析同构于 $\mathbb{C}/\Lambda$。

引理 1. 设格 $\Lambda \subset \mathbb{C}$, 格 $\Lambda' \subset \mathbb{C}$ 分别由 $\{\tau_1, \tau_2\}$ 和 $\{\tau_1', \tau_2'\}$ 生成, $E = \mathbb{C}/\Lambda$, $E' = \mathbb{C}/\Lambda'$。则一个非平凡 (即不是映到一个点的) 解析映射 $f : E \to E'$ 等价于一个非平凡 $\mathbb{C}$-线性映射 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 使得 $\phi(\Lambda) \subset \phi(0) + \Lambda'$。

想象在黎曼的时代人们可能是这样证明的: 注意 $\mathbb{C}$ 可以看作 E 和 E' 的通用覆盖空间, 可见 f 诱导一个解析映射 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 再注意 ϕ 的周期性, 可见存在正实数 M 使得 $|\phi(z)| \leqslant M|z|$, 故 $\frac{\phi(z)-\phi(0)}{z}$ 为有界全纯函数, 从而是常数。从李群的角度也可以这样证明: 注意 E, E' 为紧致复李群, 由刚性引理 (见下文) 可知 $f(z) = f(0) + g(z)$, 其中 g 为李群的同态, 它诱导李代数同态 $Lie(E) \to Lie(E')$, 再注意投射 $\mathbb{C} \to E$ 可以看作指数映射 $\exp : Lie(E) \to E$, 由交换图

$$\begin{array}{ccc} Lie(E) & \xrightarrow{g_*} & Lie(E') \\ \Big\downarrow{\exp} & & \Big\downarrow{\exp} \\ E & \xrightarrow{g} & E' \end{array} \tag{4}$$

即可见 g 由线性映射 g_* 诱导。由此还可见两条椭圆曲线作为复流形同构当且仅当它们作为复李群是同构的。

由引理 1 可知, 椭圆曲线的同构分类等价于格的线性等价分类。

由于 $\tau_2 \cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是解析同构, 我们有 $E \cong \Lambda/\{\tau, 1\}$, 其中 $\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ 为虚数, 而且不妨设 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ (否则可用 $-\tau$ 代替 τ), 故在同构分类的研究中不妨设 $\Lambda = \{\tau, 1\}$ (其中 $\tau \in \mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$, 即 "上半复平面"), 并记 $E = E_\tau$。同样可将 Λ' 换为由 τ' 和 1 生成的格, 其中 $\tau' \in \mathfrak{H}$。由引理 1 可见, 一个 (李群的) 非平凡同态 $f : E \to E'$ 由一个整数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 给出 (其中 $ad - bc > 0$, 见习题 2), 使得 $\phi(\tau_1) = a\tau_1' + b\tau_2'$, $\phi(\tau_2) = c\tau_1' + d\tau_2'$, 但由 ϕ 的线性可见 $\phi(\tau_1) = \tau\phi(\tau_2)$, 故

$$\tau = \frac{a\tau_1' + b\tau_2'}{c\tau_1' + d\tau_2'} = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d} \tag{5}$$

其中 $\tau' = \frac{\tau_1'}{\tau_2'}$。由此可见, 若存在非平凡同态 $E_\tau \to E_{\tau'}$, 则存在整数 a, b, c, d $(ad - bc > 0)$ 使得 (5) 成立, 此时我们说 E_τ 和 $E_{\tau'}$ 是同源的

(isogenous), 而称非平凡同态 $E_\tau \to E_{\tau'}$ 为同源 (isogeny)。注意由 (5) 可以得到整数 a', b', c', d' $(a'd' - b'c' > 0)$ 使得 $\tau' = \frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}$, 由此易见同源是一个等价条件。

特别地, f 为同构当且仅当 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 此时由 (5) 可见 $ad - bc = 1$ (见习题 2), 故 $E_\tau \cong E_{\tau'}$ 当且仅当存在

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \tag{6}$$

使得 $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \tau'$。这样我们得到 $SL_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathfrak{H}$ 上的一个作用 $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, 而 Λ 的等价类和 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的轨迹, 即 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ 的点一一对应。这样 $\mathcal{A}_1 = \mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ 就和椭圆曲线的解析同构类一一对应。我们称 $\mathcal{A}_1$ 为 (复) 椭圆曲线的模空间 (moduli of elliptic curves), 这一术语的来历是这样的: 设 f 为 $\mathfrak{H}$ 上的一个半纯函数, 若对任意形如 (6) 的 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ 都有 $f(\gamma(z)) = (cz+d)^{2w} f(z)$, 则称 f 为一个权为 w 的模形式 (modular form)。两个权为 w 的模形式的商在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的作用下不变, 故可以看作 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z}) = \mathcal{A}_1$ 上的半纯函数 (称为模函数) (modular function)。用多个权为 w 的模形式可以给出 $\mathcal{A}_1$ 到复射影空间的映射, 对足够大的 w 可使这样一个映射为嵌入。因此模形式可以看作 $\mathcal{A}_1$ 作为拟射影簇的齐次坐标。

由 (5) 还可见 E_τ 与 $E_{\tau'}$ 同源当且仅当存在 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q})$ 使得 $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \tau'$, 所以 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Q})$ 与椭圆曲线的同源等价类一一对应。但由于 $SL_2(\mathbb{Q})$ 不是离散群, 我们不能得到 $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Q})$ 的一个自然的解析空间结构。不过在下面我们将看到, 如果考虑"有复乘"的椭圆曲线, 还是可以得到同源等价类的有解析结构的模空间的。

在黎曼时代, $\mathcal{A}_1$ 的几何结构的意义还是不清楚的: 作为一个集合, $\mathcal{A}_1$ 的元与椭圆曲线的解析同构类一一对应, 但 $\mathcal{A}_1$ 也与 $\mathbb{R}$ 一一对应, 所以单从集合论的角度看, 这里得到的信息很少。要理解 $\mathcal{A}_1$ 的几何结构需要有纤维从的概念, 而这已是 20 世纪的事了。

从纤维从的角度我们要考虑椭圆曲线**族**, 即解析映射 $\pi: E \to S$, 其纤维 $E_s = \pi^{-1}(s)$ $(s \in S)$ 都是椭圆曲线。由于 $\mathcal{A}_1$ 可看作椭圆曲线的同构类的一个指标集, 对这样一个族有一个"诱导"映射 $\phi: S \to \mathcal{A}_1$, 将 $s \in S$ 映到 $\mathcal{A}_1$ 中代表 E_s 的同构类的点。一个基本事实是对任意椭圆曲

线族, ϕ 都是**解析映射**, 这就给出 $\mathcal{A}_1$ 的几何结构的一个基本意义 (随意给出的几何结构显然不能保证 ϕ 都是解析映射)。后面我们将看到如何唯一确定 $\mathcal{A}_1$ 的几何结构。

上面的讨论都可以推广到高维的情形, 即阿贝尔簇。但维数 $g > 1$ 的情形与 1 维的情形有一个很大的不同之处, 就是**没有** g 维阿贝尔簇同构类的模空间, 详言之, 令 A_g 为所有 g 维阿贝尔簇的同构类组成的集合, 如果希望建立 A_g 的一个几何结构, 使得对任意一族 g 维阿贝尔簇 $\pi : X \to S$, 诱导映射 $\phi : S \to A_g$ 是几何的, 则我们会发现 A_g 具有很坏的拓扑结构, 当然更不可能希望有好的复几何结构。这一问题在 20世纪 50 年代就已经发现了。这个课题我们后面再详细讨论。

我们当然可以而且需要研究更一般的几何对象的分类, 例如代数曲面或向量从的分类。在一般情形, 经常会遇到模空间是否存在的问题。尽管做了很多努力, 迄今为止我们所知道的模空间存在的情形仍不很多。不过模空间的概念已远远超出阿贝尔簇分类的范围, 与其名称 moduli 的含义 (模形式) 多半已无直接关系。而且, 更一般的分类问题不仅仅是关于复代数簇, 而是关于一般域上的代数簇; 为了数论的需要, 上面的基 S 须换为一般的概形, 特别是 $\mathbb{Z}$-概形。这样模空间就是现代代数几何的深刻课题了。

因此, 对于模空间, 我们一方面应该很好地理解和掌握阿贝尔簇的模空间理论的概念、方法和结果, 因为其中的原始思想是非常深刻的, 且影响着整个分类学和模空间理论的发展; 另一方面则不应局限于复阿贝尔簇的模空间的方法和结果, 因为更一般的模空间理论中有很多其他概念、方法和结果是非常重要和强有力的, 而且可以走得更深更远。简言之, 既要避免肤浅, 又要避免偏狭。

模空间的应用非常广泛, 在很多场合, 如果考虑到使用模空间, 都可能产生出奇制胜的效果。所以, 仅仅知道模空间, 和主动想到应用模空间, 是大不相同的。

2. 精细模空间与粗糙模空间

我们先通过拓扑直线从这个例子来直观地理解分类和模空间。

例 1. 在拓扑学中，拓扑空间的一个连续映射 $f: L \to T$ 称作 T 上的一个秩为 n 的**向量丛**，如果对任一点 $t \in T$ 给定了一个同胚 $q_t: f^{-1}(t) \to \mathbb{R}^n$，且存在 t 的开邻域 $U \subset T$ 及 U-同构 $q: L \times_T U = f^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^n \times U$ 使得 $q|_{f^{-1}(u)} = q_u : f^{-1}(u) \to \mathbb{R}^n$ 对任意 $u \in U$ 成立。显然 $\mathbb{R}^n \times T$ 可以看作 T 上的一个向量丛，称为**平凡的**向量丛。秩为 1 的向量丛称为**直线丛**，而秩为 2 的向量丛称为**平面丛**（参看例 I.1.1）。

设 $V = \mathbb{R}^{\oplus 2}$，其坐标为 x, y，而 $T_0 = P^1_{\mathbb{R}}$，其齐次坐标为 X, Y。令

$$L_0 = \{(x, y, X : Y) \in V \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} | xY = yX\} \tag{1}$$

易见 $L_0 \to T_0$ 是直线丛（注意对 T_0 的开子集 $U_0 = \{(1 : Y) | Y \in \mathbb{R}\}$ 和 $U_1 = \{(X : 1) | X \in \mathbb{R}\}$ 有 $L_0 \times_{T_0} U_0 \cong \mathbb{R} \times U_0$, $L_0 \times_{T_0} U_1 \cong \mathbb{R} \times U_1$），它是平凡平面丛 $V \times T_0$ 的子丛。我们来说明，这个直线丛是“universal”（译为“通用”、“普遍”或“泛”等），就是说，任何拓扑空间上的平凡平面丛的任何直线子丛都可以由 (T_0, L_0)（按唯一的途径）构造出来。详言之，对任一拓扑空间 T 及任一直线子丛 $L \subset V \times T$，存在唯一连续映射 $f: T \to T_0$ 使得

$$L = L_0 \times_{T_0} T \subset V \times T \tag{2}$$

（这里等号的意义是作为 $V \times T$ 的子集相等）。

将 $V \times T$ 中的点标为 (x, y, t)，其中 $(x, y) \in V$ 而 $t \in T$。易见有连续映射

$$\begin{aligned} g: L - 0 \times T &\to T_0 \\ (x, y, t) &\mapsto (x : y) \end{aligned}$$

由定义可见对任意 $t \in T$ 存在开邻域 $U \subset T$ 使得投射

$$L - 0 \times T \cong (\mathbb{R} - \{0\}) \times U \to U \tag{3}$$

有连续的截口 $\zeta: U \to (\mathbb{R} - \{0\}) \times U$，且易见 $g \circ \zeta$ 与 ζ 的选择无关。因此 g 诱导一个连续映射 $f: T \to T_0$，由所有 $g \circ \zeta$ 粘合而得。不难逐点验证 (2) 成立，而 f 的唯一性是显然的。注意 T_0 中的一个点 $(X : Y)$ 代表 V 中的一条直线 $xY - yX = 0$。

我们说 T_0（或 (T_0, L_0)）**代表** V 中的直线子丛，亦可称 T_0 为 V 中直线的**精细模空间**。

为了在一般情形准确而精炼地给出模空间的概念，我们采用范畴论的语言。

定义 1. 设 $\mathfrak{C}$ 是某一类几何对象组成的范畴 (例如拓扑空间的范畴、微分流形的范畴、复解析空间的范畴、概形的范畴、某个基 S 上的概形的范畴等)，而 F 为 $\mathfrak{C}$ 上的预层 (即一个反变函子 $\mathfrak{C} \to ((\text{sets}))$)。若 F 由一个对象 $T \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ 代表 (即 $F \simeq \underline{T}$)，则称 T 为 F 的**精细模空间** (*fine moduli space*)；此时若 $\mathfrak{C}$ 是概形的范畴或某个基 S 上的概形的范畴，则也称 T 为 F 的**精细模概形** (*fine moduli scheme*)。

例如，例 1 说明若 $\mathfrak{C}$ 为拓扑空间的范畴而 F 为预层

$$T \mapsto \{\mathbb{R}^2 \times T \text{ 的所有 } T\text{-直线子丛}\}$$

则 F 有精细模空间 $P^1_{\mathbb{R}}$。

注 1. 对于精细模空间的概念，有下面几点值得注意。

i) 若 T 为 F 的精细模空间，则在 $F(T)$ 中有一个"泛元素" ξ，使得对任意 $X \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$，任一元 $x \in F(X)$ 在自然等价 $F \simeq \underline{T}$ 下所对应的元 $\phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, T)$ 满足 $F(\phi)(\xi) = x$。

ii) 由抽象废话，任一对象 $T \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ 都是 $\underline{T}$ 的精细模空间。

iii) 由米田引理，若 T 和 T' 都是 F 的精细模空间，则有唯一同构 $\phi : T \to T'$ 使得 $\underline{T'} = \underline{\phi}(\underline{T})$，故若 F 有精细模空间，则任两个精细模空间是同构的。此外，若两个预层 F, F' 分别有精细模空间 T, T'，则一个自然变换 $F \to F'$ 等价于一个态射 $T \to T'$。

iv) 预层 F 可能改为 $\mathfrak{C}$ 到其他范畴的反变函子，例如当 $\mathfrak{C}$ 有终止对象和直积，F 为从 $\mathfrak{C}$ 到 $((\text{groups}))$ 的反变函子时，F 的一个精细模空间 T 为 $\mathfrak{C}$ 中的群对象 (习题 1)。

v) 如同例 1 那样，经常遇到的情形是 F 为纤维丛函子，即将任一对象 X 映到 X 上的某些纤维丛组成的集合。而在代数几何中，我们经常用平坦态射代替纤维丛 (参看 I.2 节)。

vi) 在代数几何中，对精细模概形的理解有时稍有变化，例如将 $\mathfrak{C}$ 换为仿射概形的范畴 (参看引理 I.1.7)，此时 T 为 F 的精细模概形的意义

是有自然等价 $F(X) \cong \mathrm{Mor}(X,T)$, 但已不能说 F 由 T 代表, 因为 T 一般不是仿射的。

例 2. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何连通约化纤维。设 $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 满足

(∗) $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}$ 是 S 上的局部自由层, 且对任一点 $s \in S$, $\mathcal{E} \otimes \kappa(s) \to \Gamma(X_s, \mathcal{L}_s)$ 为同构。

令 $T = \mathbb{P}_S(\mathcal{E}^\vee)$, 则由 (I.4.1.14) 有 $X \otimes_S T$ 上的一个可逆层同态

$$\phi : O_{X\otimes_S T} \to \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_T} O_T(1) \tag{4}$$

存在一个最大开子概形 $U \subset T$ 使得对任意 $t \in U$, 纤维 $\phi_t : O_{X_t} \to \mathcal{L}_t$ 为单射。定理 I.4.1 可表达为: 定义预层 $F : \mathfrak{Sch}_S \to ((\mathrm{sets}))$ 为 $F(T') = |\mathcal{L}/T'|$ $(\forall T' \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S))$, 则 U 是 F 的精细模概形。这里泛除子 $D \subset X \times_S U$ 由 (4) 定义。

也可以简略地说, U 是 $\mathcal{L}$ 所给出的线性系的精细模概形。

例 3. 将例 2 应用于 $S = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, $X = \mathbb{P}^n$, $\mathcal{L} = O_X(1)$ 的情形, 有 $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L} \cong O_S^{\oplus(n+1)}$, 且易见 $U = T \cong \mathbb{P}^n$。注意 $|\mathcal{L}/T'|$ 的一个元为 T' 上的平凡射影空间从 $X \times T'$ 的一个超平面子丛, 故 T 可以称为 n 维射影空间中的超平面的精细模空间。这一事实可以看作古典的射影空间对偶原理的更精确描述。

注意 $X \times T'$ 的一个超平面子丛等价于 $n+1$ 维平凡向量丛 $\mathbb{A}^{n+1} \times T'$ 中的一个 n 维向量子丛, 故 T 也是 $(n+1)$ 维线性空间的 n 维线性子空间的精细模空间, 这可以看作例 1 的推广。取 $\mathbb{A}^{n+1}$ 的坐标为 $x_0, \ldots, x_n$, T 的相应的齐次坐标为 $(Y_0 : \cdots : Y_n)$, 则 $\mathbb{A}^{n+1} \times T$ 中的 n 维泛向量子丛由方程

$$x_0Y_0 + \cdots + x_nY_n = 0 \tag{5}$$

定义。

注意 $n+1$ 维线性空间的 n 维线性子空间由一个 (非零) 线性齐次方程给出, 这个方程除了可以乘以一个可逆因子外是唯一的, 所以等价于一个 1 维线性子空间 (这一点也可以从对偶性来理解)。因此 T 也是 $n+1$

维线性空间的 1 维线性子空间的精细模空间，这也可以看作例 1 的推广。这与对射影空间的一种经典理解 (将 n 维射影空间看作 $n+1$ 维线性空间中过原点的直线组成的空间) 是一致的。不难看到 (习题 2) 泛直线从 $L \subset \mathbb{A}^{n+1} \times T$ 的方程为

$$x_i Y_j = x_j Y_i \quad (\forall 0 \leqslant i, j \leqslant n) \tag{6}$$

它可以简单地记为

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = (Y_0 : Y_1 : \cdots : Y_n) \tag{7}$$

例 4. 将例 2 应用于 $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $X = \mathbb{P}^n$, $\mathcal{L} = O_X(d)$ 的情形，由例 I.4.4 可见 $T \cong \mathbb{P}^{r-1}$，其中 $r = \binom{n+d}{d}$。可称 T 为 n 维射影空间中的 d 次超曲面的精细模空间。取 T 的齐次坐标为 $Y_{i_0 \ldots i_n}$ $(\forall i_0, ..., i_n \geqslant 0,\ i_0 + \cdots + i_n = d)$，其中每个 $Y_{i_0 \ldots i_n}$ 对应于单项式 $X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$，则 $X \times T$ 中的 d 次泛超曲面子从由方程

$$\sum_{\substack{i_0, \ldots, i_n \geqslant 0 \\ i_0 + \cdots + i_n = d}} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} Y_{i_0 \ldots i_n} = 0 \tag{8}$$

给出。

注 2. 设 $T \to S$ 为概形的态射，F 为 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层，记 F_T 为 F 在 $\mathfrak{Sch}_T$ 上的限制。若 F 有精细模概形 X，则由定义可见 $X \times_S T$ 为 F_T 的精细模概形 (习题 3)。例如，设 k 为代数闭域，定义 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 F: $T \mapsto \{\mathbb{A}_k^2 \times_k T$ 中的直线子从$\}$，则由例 3 可知 F 由 $\mathbb{P}_k^1$ 代表，换言之 $\mathbb{P}_k^1$ 是 $\mathbb{A}_k^2$ 中直线的精细模空间。

例 5. 设 S 为诺特概形，$\mathcal{R} = \mathbb{A}_S^1$ (看作环概形)，$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 为 S 上的局部自由凝聚层，则由推论 Ⅲ.3.1 可知预层 $T \mapsto Hom_{\mathcal{R} \times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T, \mathbb{V}(\mathcal{F}) \times_S T)$ 有精细模概形 $\mathbb{V}(\mathcal{G})$，其中 $\mathcal{G} = \mathcal{H}om_{O_S}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (简言之 $\mathbb{V}(\mathcal{G})$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 到 $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ 的 $\mathcal{R}$-模概形同态的模空间)。

例 6. 设 $\mathcal{R}$ 为 S 上的分离环概形，则由引理 Ⅲ.3.4 可知预层 $T \mapsto \{\underline{\mathcal{R}}(T)$ 中的单位$\}$ 有精细模空间，为 $\mathcal{R} \times_S \mathcal{R}$ 中的一个闭子概形。特别地，若 $\mathcal{E}$ 为诺特概形 S 上的局部自由凝聚层而 $\mathcal{R} = \mathbb{A}_S^1$，则由习题 Ⅲ.3.7 可知

预层 $T \mapsto Aut_{\mathcal{R}\times_S T}(\mathbb{V}(\mathcal{E})\times_S T)$ 有精细模空间，为 $\mathbb{V}(\mathcal{E}nd_{O_S}(\mathcal{E}))$ 的开子概形。

例 7. 设 S 为局部诺特概形，$\pi: G \to S$ 为平坦有限交换群概形，则由命题 Ⅲ.4.1 可知预层 $T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G\times_S T, \mathbb{G}_{m/T})$ 有精细模空间 G^D (简言之 G^D 是 G 到 $\mathbb{G}_m$ 的同态的模空间)；而预层 $T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G\times_S T, \mathbb{G}_{a/T})$ 有精细模空间 $\mathcal{L}ie(G^D/S)$ (简言之 $\mathcal{L}ie(G^D/S)$ 是 G 到 $\mathbb{G}_a$ 的同态的模空间)。

如果一个预层没有精细模空间，我们可以退而求其次，探讨是否存在"粗糙模空间"。

定义 2. 设 $\mathfrak{C}$ 为概形范畴 $\mathfrak{Sch}$ 或其子范畴 (如一个基 S 上的分离概形范畴 $\mathfrak{Sch}_S$，或所有仿射概形组成的子范畴)。设 F 是 $\mathfrak{C}$ 上的预层。若存在概形 X 使得存在自然变换 $\Phi: F \to \underline{X}$，满足条件

i) 对任意代数闭域 k 使得 $\mathrm{Spec}k \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$，$\Phi(\mathrm{Spec}k): F(\mathrm{Spec}k) \to \underline{X}(\mathrm{Spec}k)$ 是一一对应；

ii) 对任意概形 X' 及任意自然变换 $\Phi': F \to \underline{X'}$，存在唯一态射 $f: X \to X'$ 使得 $\Phi' = \Phi_f \circ \Phi$，其中 $\Phi_f: \underline{X} \to \underline{X'}$ 是 f 所对应的自然变换 (见米田引理)，

则称 X 为 F 的粗糙模空间 (*coarse moduli space*) 或粗糙模概形 (*coarse moduli scheme*)。

显然任何精细模空间都是粗糙模空间。我们注意，条件 ii) 说明了粗糙模空间的几何结构的意义，特别地若 F 有两个粗糙模空间 X_1 和 X_2，则 $X_1 \cong X_2$ (抽象废话)，简言之预层 F 唯一决定其模空间的几何结构。

前面所说的亏格为 g 的曲线的模空间 $\mathcal{M}_g$ (特别地椭圆曲线的模空间) 都是粗糙模空间。后面还将看到其他一些粗糙模空间如皮卡概形和极化阿贝尔簇的模空间。

在代数几何的分类学中，经常要考虑某一 (连续) 类对象的模空间是否存在，如果不存在，我们仍要探索是否可以对该类对象加上一些影响尽可能小的附加结构，使得模空间存在。即使这样的模空间存在也会是很

有用的。此外，如果仅有粗糙模空间而没有精细模空间，仍可能在加上一些附加结构后就有精细模空间了。

3. 一些应用的例子

我们举几个例子来说明如何使用模空间。这些例子在代数几何教科书中大都可见到。

例 8 (Bertini 定理). 设 $X \subset Y = \mathbb{P}_k^n$ 为无限域 k 上的光滑射影概形，则存在 Y 的超平面 H 不包含 X 的任一不可约分支且使得 $H \cap X$ 为光滑的 (实际上几乎所有超平面都可取为 H)。

我们知道 Y 的所有超平面的精细模空间 $Z \cong \mathbb{P}_k^n$ (例 3)，故 Y 中的一个超平面 H 可以看作 Z 的一个点。而 $H \cap X$ 在一点 $x \in H \cap X$ 的切空间为 $T_{H,x} \cap T_{X,x}$。故只需找一个超平面 H 不包含 X 的任一不可约分支且不包含 X 在任一点 $x \in H \cap X$ 的切空间即可。设 X' 为 X 的一个不可约分支 (即连通分支，因为 X 光滑)，$d = \dim(X')$，任取非空开子集 $U \subset X'$ 使得 Y 的切丛在 U 上由 X 的切丛和 $n-d$ 个截口 $s_1, ..., .s_{n-d}$ 生成。定义代数映射 $\phi : W = U \times_k \mathbb{P}_k^{n-d-1} \to Z$，将 $(x, (a_1, ..., a_{n-d})) \in W$ 映到 (过 x 的) 由 $T_{X,x}$ 与 $\{b_1(s_1)_x + ... + b_{n-d}(s_{n-d})_x | a_1 b_1 + ... + a_{n-d} b_{n-d} = 0\}$ 张成的超平面，则易见对任意 $x \in U$，任一过 x 且包含 $T_{X,x}$ 的超平面均在 $\mathrm{im}(\phi)$ 中。注意 $\dim(W) = n-1$，可见存在真闭子集 $V_1 \subset Z$ 使得包含任一 $T_{X',x}$ 的超平面均在 V_1 中。另一方面，易见存在真闭子集 $V_2 \subset Z$ 使得任意包含 X' 的超平面都在 V_2 中。对 X 的所有不可约分支取这样的 V_1 和 V_2 并令 V 为它们的并，则 V 是 Z 的真闭子集，而任意 $H \in Z - V$ 不包含 X 的任一不可约分支且使得 $H \cap X$ 为光滑的，再由 k 是无限域可知存在 $H \in Z - V$。

例 9. 设 k 为代数闭域，$C \subset X = \mathbb{P}_k^2$ 为由齐次多项式 F 定义的 $d > 1$ 次光滑曲线，$x = (a_0, a_1, a_2) \in X - C$。所谓“计数几何” (enumerative geometry) 中的一个问题是：在“一般情形” C 有多少条过 x 的切线。

不难算出过一点 $y = (b_0, b_1, b_2) \in C$ 的切线 $T_{C,y}$ 由方程

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(b_0, b_1, b_2) X_0 + \frac{\partial F}{\partial X_1}(b_0, b_1, b_2) X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}(b_0, b_1, b_2) X_2 = 0 \qquad (1)$$

给出。令 $\phi: X \to Y \cong \mathbb{P}^2_K$ 为有理映射 $(X_0, X_1, X_2) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_0})$, ϕ 可以看作 $d-1$ 重嵌入与一个投影的合成, 它在一个包含 C 的开集 $U \subset X$ 上有定义, 故一条直线 $L \subset Y$ 与 $C' = \phi(C)$ 交于 $d(d-1)$ 点, 换言之 C' 为 $d(d-1)$ 次曲线。若将 Y 看作 X 中所有直线的模空间, 则 C' 可以看作 C 的所有切线组成的代数子集, 注意它是 1 维的。同理可知 C' 的切线组成 Y 中直线的模空间中的 1 维代数子集。设 $x = (a_0, a_1, a_2) \in X - C$ 使得 $a_0Y_0 + a_1Y_1 + a_2Y_2 = 0$ 不是 C' 的切线 (这就是"一般情形"), 注意 C 的过 x 的切线集为 C' 与直线 $a_0Y_0 + a_1Y_1 + a_2Y_2 = 0$ 的交, 可见 C 的过 x 的切线有 $d(d-1)$ 条。

例 10 (古典的"九点定理"). 设 k 为无限域, $P_1, ..., P_8 \in X = \mathbb{P}^2_k$ 为 k-点, 其中没有 4 点共线, 没有 7 点共二次曲线, 则存在唯一的闭点 $P_9 \in X$ (也是 k-点), 使得 X 中过 $P_1, ..., P_8$ 的任意三次曲线 (包括退化的) 都过 P_9 (注: P_9 可能等于 $P_1, .., P_8$ 之一, 例如 $P_9 = P_1$, 此时任两条过 $P_1, ..., P_8$ 的三次曲线在 P_1 点相切且除 $P_1, ..., P_8$ 外无公共点)。

不难约化到 k 是代数闭域的情形。由例 4 可知对任意 $d > 0$ 存在 X 中的 d 次曲线的精细模空间 Y_d。为方便起见我们记 $|Y_d|$ 为 Y_d 中的 k-点组成的射影空间, 看作 X 中的 d 次曲线的集合。

先考虑二次曲线。由例 4 可知 $Y_2 \cong \mathbb{P}^5_k$。若二次曲线 $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ 过 P_1 点而 P_1 点的坐标为 $(a_0 : a_1 : a_2)$, 则 $F(a_0, a_1, a_2) = 0$ 给出 F 的系数满足的一个非平凡线性齐次方程, 故 $|Y_2|$ 中过 P_1 的二次曲线组成一个超平面 H_4。类似地过 P_1, P_2 的二次曲线组成一个 3 维平面 $H_3 \subset H_4$。过 P_1, P_2, P_3 的二次曲线组成 H_3 中的一个余维数不大于 1 的平面 $H_2 \subset H_3$, 欲验证 $\dim(H_2) = 2$ 只需验证 $H_2 \neq H_3$, 即存在一条过 P_1, P_2 的二次曲线不过 P_3, 这很容易, 只需过 P_1, P_2 各取一条不过 P_3 的直线, 将其并看作一条二次曲线即可。过 P_1, P_2, P_3, P_4 的二次曲线组成 H_2 中的一个余维数不大于 1 的射影子空间 $H_1 \subset H_2$, 欲验证 $\dim(H_1) = 1$, 即 $H_1 \neq H_2$, 注意由所设直线 P_1P_2, P_1P_3 和 P_2P_3 不能都过 P_4, 不妨设 P_1P_2 不过 P_4, 任取一条过 P_3 不过 P_4 的直线与 P_1P_2 即组成 H_2 中的一条不过 P_4 的二次曲线。最后, 过 $P_1, ..., P_5$ 的二次曲线组成射影子空间 $H_0 \subset H_1$, 若 $P_1, ..., P_5$ 中没有三点共线, 则 $P_1P_2 \cup P_3P_4$ 在 H_1 中但不在 H_0 中, 故 $\dim(H_0) = 0$; 否则任取过其中三点的一条直线 l, 由所设另两点不

在 l 上, 任取过其中一点而不过另一点的直线与 l 组成二次曲线, 仍得 $\dim(H_0)=0$, 总之恰存在一条过 $P_1,...,P_5$ 的二次曲线。

现在考虑三次曲线, 由例 4 可知 $Y_3\cong\mathbb{P}_k^9$, 和上面类似地可以证明 X 中过 $P_1,...,P_7$ 的三次曲线组成一个 2 维平面 $H_2\subset|Y_3|$。令 $H_1\subset H_2$ 为过这 8 点的三次曲线组成的射影子空间。若 $P_1,...,P_8$ 中有三点共线, 不妨设 P_1,P_2,P_3 共直线 l, 由上所述可取二次曲线 C_0 过 P_4,P_5,P_6,P_7 但不过 P_8, 这样 $l\cup C_0\in H_2-H_1$, 从而 $\dim(H_1)=1$。若 $P_1,...,P_8$ 中无三点共线, 令 C 为过 $P_1,...,P_5$ 的 (唯一)二次曲线, 则由所设 P_6,P_7,P_8 不能都在 C 上, 不妨设 $P_8\notin C$, 于是 $C\cup P_6P_7\in H_2-H_1$, 仍给出 $\dim(H_1)=1$。

注意 H_1 中的退化三次曲线只能是由一条二次曲线和一条直线组成, 由所设可知或者二次曲线过 $P_1,...,P_8$ 中的 6 个点而直线过其余 2 个点, 或者二次曲线过 $P_1,...,P_8$ 中的 5 个点而直线过其余 3 个点, 由上面关于二次曲线的讨论可见这样的退化三次曲线只有有限多条。任取两条非退化三次曲线 $C_1,C_2\in H_1$, 则 $C_1\cap C_2$ 是有限集。取三次齐次多项式 $F_1,F_2\in k[X_0,X_1,X_2]$ 分别定义 C_1,C_2, 则由 $\dim(H_1)=1$ 可见 H_1 中的任意曲线由形如 aF_1+bF_2 (a,b 不全为 0) 的多项式定义。另一方面, 由 Bézout 定理 (命题 I.4.5) 可知 C_1 与 C_2 的交点个数 (连重数) 为 $3\cdot3=9$, 即它们除 $P_1,...,P_8$ 外还有一个公共点 P_9 (若 $P_9=P_1$ 则 C_1 与 C_2 在 P_1 的相交重数为 2, 此时 C_1 和 C_2 在 P_1 点相切), 显然所有 H_1 中的曲线都过 P_9。这就证明了九点定理。

注意上述证明完全是组合性的。

利用九点定理很容易证明一些重要的古典射影构形定理。一是帕普斯定理 (图 2(a)): 若 A,B,C 三点在一条直线上, A',B',C' 三点在一条直线上, AB' 与 $A'B$ 交于 P, BC' 与 $B'C$ 交于 Q, CA' 与 $C'A$ 交于 R, 则 P,Q,R 三点在一条直线上。这个定理有特别重要的意义: 对任意一个体 K 上的平面射影几何, 帕普斯定理成立当且仅当 K 是域 (参看 [L2, 命题 B.1.1])。另一个是帕斯卡定理: 在任一条平面二次曲线上任取 6 个点 A,B,C,D,E,F, AB 与 DE 交于 P, BC 与 EF 交于 Q, CD 与 FA 交于 R, 则 P,Q,R 三点在一条直线上 (图 2(b))。这个定理也有特殊的重要性, 它是二次曲线的基本性质 (判据)。如果允许退化二次曲线, 帕普斯定理可以看作帕斯卡定理的特殊情形。对帕斯卡定理可如下证明: 令 C_1 为

二次曲线与 PQ 组成的三次曲线, C_2 为 AB, CD, EF 三条直线组成的三次曲线, C_3 为 BC, DE, FA 三条直线组成的三次曲线, 则 C_1, C_2, C_3 都过 8 个点 A, B, C, D, E, F, P, Q, 故由九点定理, 它们有另一公共点 R。

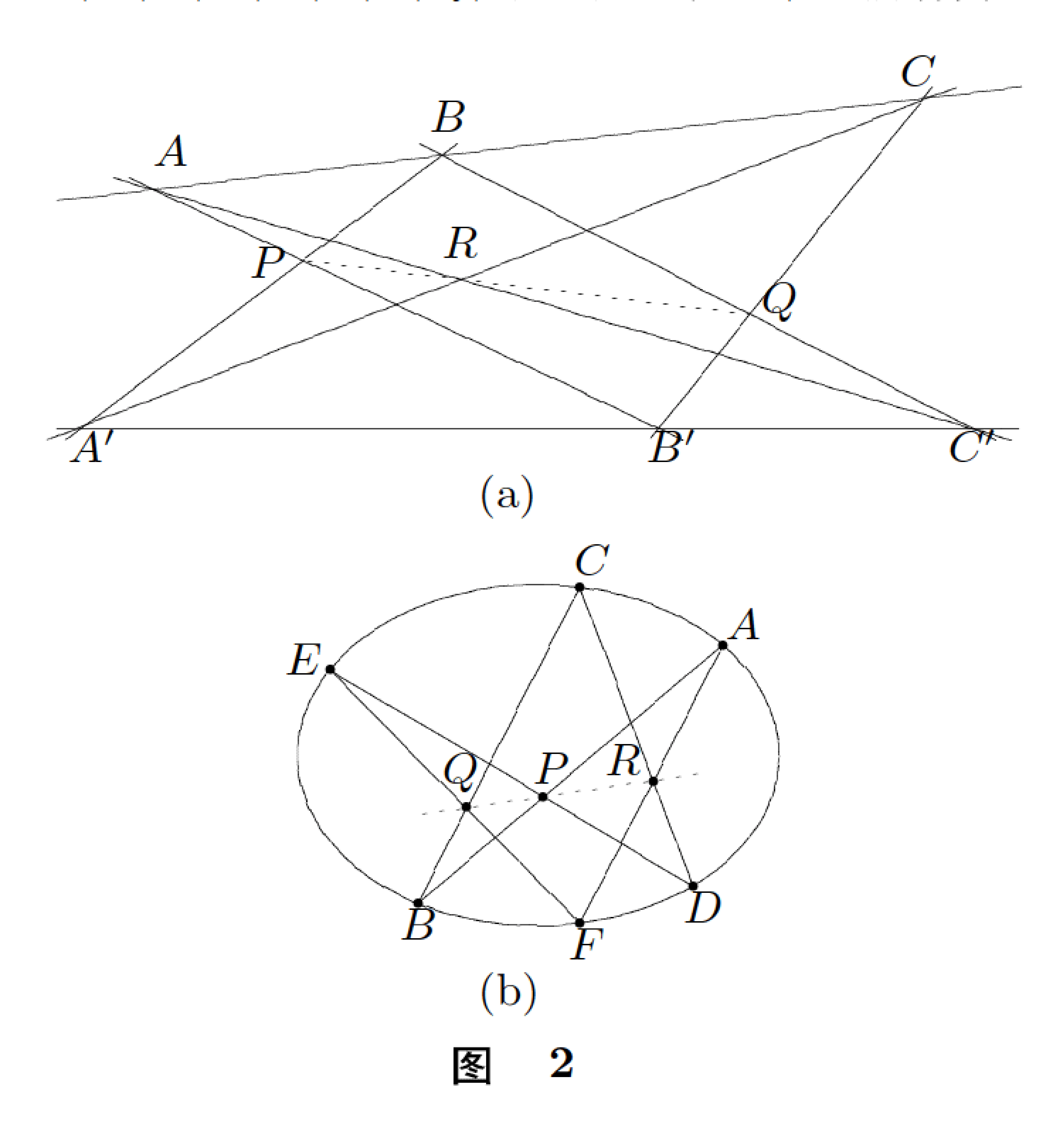


图　2

对平面三次曲线也有构形定理, 如: 设 $\mathcal{E}$ 为代数闭域 k 上的光滑三次曲线, 任取 4 个闭点 $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, 直线 BC 与 $\mathcal{E}$ 有第三个交点 E, BD 与 $\mathcal{E}$ 有第三个交点 F, AD 与 $\mathcal{E}$ 有第三个交点 G, CG 与 $\mathcal{E}$ 有第三个交点 H, AE 与 $\mathcal{E}$ 有第三个交点 I, 则 F, H, I 三点在一条直线上 (图 3)。利用九点定理可以这样证明: 令 $C_1 = \mathcal{E}$, C_2 为 AD, BC, HI 三条直线组成的三次曲线, C_3 为 BD, CH, AI 三条直线组成的三次曲线, 则 C_1, C_2, C_3 都过 8 个点 A, B, C, D, E, G, H, I, 故它们有另一公共点 F。

这个定理的意义可以理解为“加法结合律”: 注意由 Bézout 定理可见一条直线与 $\mathcal{E}$ 有三个交点。我们可以在三次曲线 $\mathcal{E}$ 上定义一个“加法” (图 4): 先任取一点 $O \in \mathcal{E}$ 称为“0”; 对任意两点 $A, B \in \mathcal{E}$, 令 C 为直线 AB 与 $\mathcal{E}$ 的另一个交点, D 为直线 OC 与 $\mathcal{E}$ 的另一个交点, 定义 $D = A + B$ (注意由这个定义有 $C = -D$, 故 $A + B + C = 0$)。由模空间的性质不难看出这个加法可以看作一个 k-态射 $\mathcal{E} \times_k \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (习题 5)。

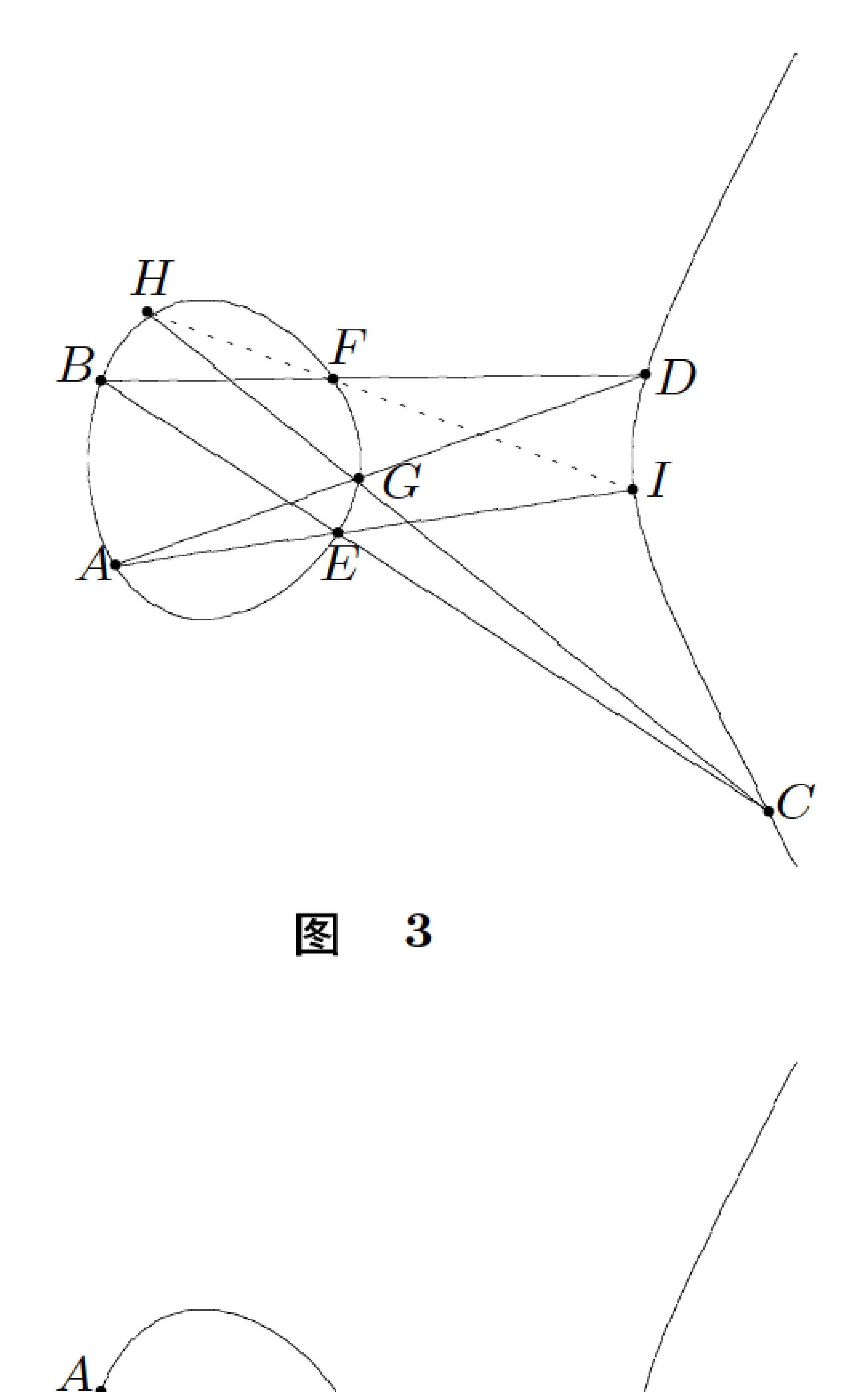


图 3

图 4

现在来看三次曲线的投影构形图 (图 5, 我们将图 3 中各点标记的字母更换了)。由定义有 $P = A + B$, $Q = B + C$, 故由上所述有 $R = -(A + (B + C))$; 另一方面, 由定理可知直线 PC 与 $\mathcal{E}$ 的交点也是 R, 故由上所述有 $R = -((A+B)+C)$。这说明 $-(A+(B+C)) = -((A+B)+C)$, 即 $A+(B+C) = (A+B)+C$, 这正是加法结合律。故上述三次曲线的构形定理说明射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ 中含 k-点的三次光滑曲面具有代数群结构, 即为阿贝尔簇。

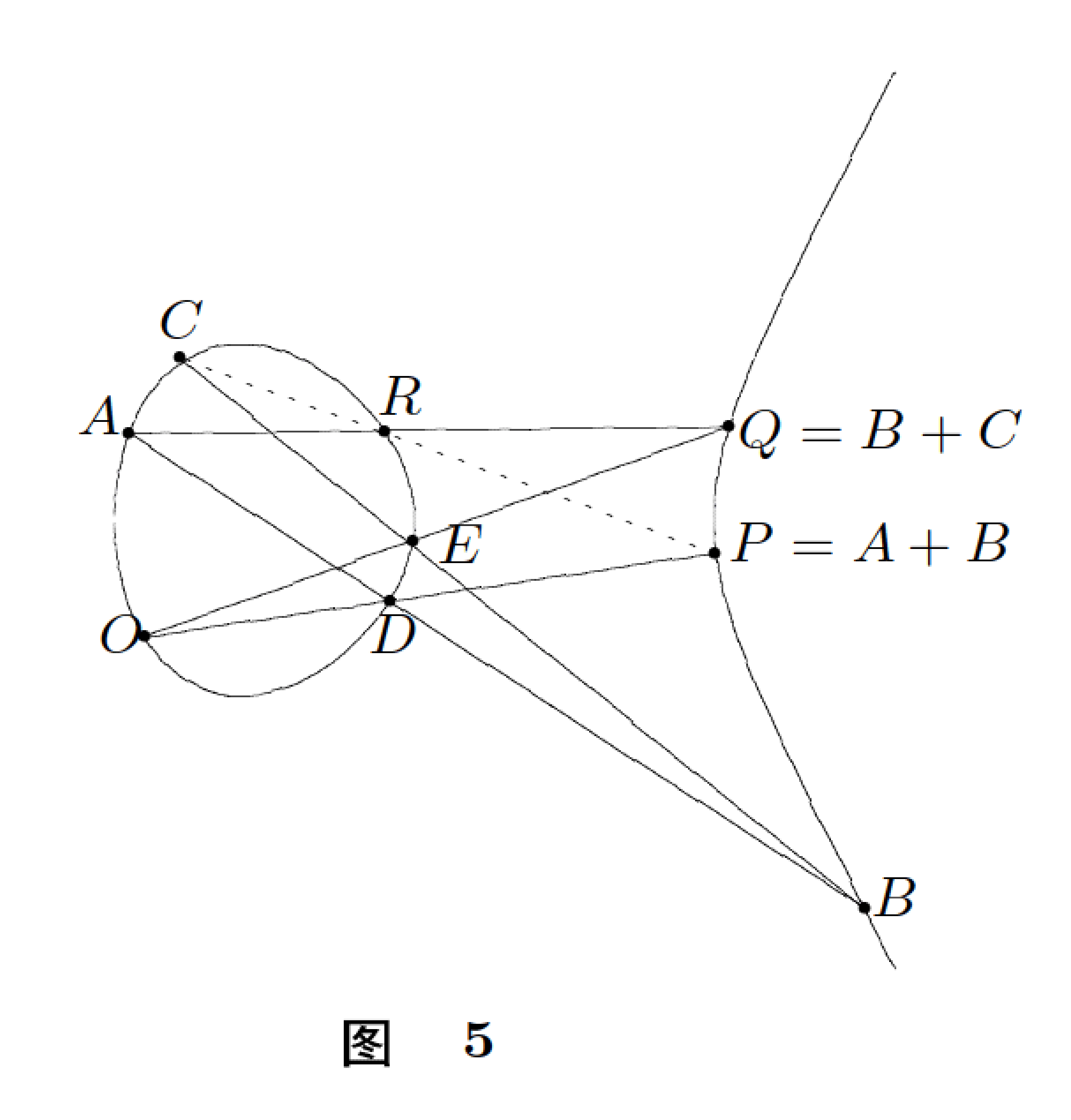


图　5

习题

1. 设范畴 $\mathfrak{C}$ 有终止对象 S 和直积。一个 $\mathfrak{C}$ 中的群对象是指一个对象 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 连同三个态射 $m: G \times G \to G$, $\iota: G \to G$ 和 $o: S \to G$, 满足

i) $m \circ (\mathrm{id}_G \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id}_G) : G \times G \times G \to G$ (“乘法结合律”);

ii) $m \circ (o \times \mathrm{id}_G) = m \circ (\mathrm{id}_G \times o) = \mathrm{id}_G : G \cong S \times G \to G$;

iii) $m \circ (\iota \times \mathrm{id}_G) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{id}_G \times \iota) \circ \Delta = o \circ \pi : G \to G$,其中 $\Delta : G \to G \times G$ 为对角态射, $\pi : G \to S$ 为从 G 到 S 的唯一态射。

设 F 为从 $\mathfrak{C}$ 到 ((groups)) 的反变函子。证明若 F 有一个精细模空间 T, 则 T 为 $\mathfrak{C}$ 中的群对象。

2. 将例 3 中的各断言的证明补充完整。

3. 设 $\mathfrak{C}$ 为有直积的范畴, $S \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, 记 $\mathfrak{C}_S$ 为所有对 (X, τ) $(X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $\tau \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, S))$ 组成的范畴, 其中一个态射 $(X, \tau) \to (X', \tau')$ 是指一个 $\mathfrak{C}$ 中的态射 $f : X \to X'$ 使得 $\tau' \circ f = \tau$。则 $\mathfrak{C}$ 上的一个预层 F 诱导 $\mathfrak{C}_S$ 上的一个预层 F_S。证明若 F 有精细模空间 T, 则 $(T \times S, \mathrm{pr}_2)$ 为 F_S 的精细模空间。

4. 设 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 为一个格, $T = \mathbb{C}/\Lambda$, $\wp(z)$ 为 (1.1) 中的魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数。定义映射 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 将 z 映到 $(1 : \wp(z) : \wp'(z))$ (若 z 为 $\wp$ 的极点则将 z 映到某个无穷远点)。证明 p 诱导一个解析映射 $e : T \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, 它是解析的闭嵌入, 而 e 的象为三次光滑曲线 $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$。

5. 证明例 10 中所定义的三次曲线 $\mathcal{E}$ 的加法可以看作一个 k-态射 $a : \mathcal{E} \times_k \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, 使得对任意闭点 $A, B \in \mathcal{E}$ 有 $A + B = a(A, B)$。

6. 设 $C \subset X = \mathbb{P}^2_S$ 为 S 上的三次光滑曲线族, 具体说 C 为 X 中的 S-有效除子, $C \to S$ 有一个截口 $o : S \to C$, 且存在 S 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $O_X(C) \cong O_X(3) \otimes_{O_X} \tau^*\mathcal{L}$ ($\tau : X \to S$ 为投射)。证明 C 有阿贝尔概形结构使得 o 为零截口。(提示: 用例 10 中的方法定义 C 的加法, 利用曲线的黎曼-罗赫定理与I.3节中的半连续性理论证明加法结合律。)

第 2 节　希尔伯特概形

1. 格拉斯曼空间

我们在例 1.3 中看到, 一个 4 维线性空间 W 中的 1 维和 3 维线性子空间都有精细模空间, 且都同构于 $\mathbb{P}^3$, 此外 $\mathbb{P}^3$ 还是 3 维射影空间中的平面的精细模空间。若考虑 W 中的 2 维线性子空间是否有模空间, 问题就要复杂些, 因为一个 2 维线性子空间 $V \subset W$ 由两个向量 $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 生成, 而 (a, b) 是有很多种选择的。不过若令 $a_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$, 则 6 个 a_{ij} 的比由 V 唯一决定。但这些 a_{ij} 并非相互独立的, 它们满足关系式

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0 \tag{1}$$

这 6 个 a_{ij} 称为 V 的普吕克坐标 (*Plücker coordinates*)。注意至少有一个 $a_{ij} \neq 0$, 例如 $a_{12} \neq 0$, 则可以选择生成元 a, b 使得 $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$, 这样 a, b 也就唯一确定了, 而且可由诸 a_{ij} 给出 (如 $a_3 = -a_{23}$)。由此可见 V 由 6 个 a_{ij} 的比唯一决定。反之, 若给定一组满足 (1) 的不全为 0 的 a_{ij}, 则由上述过程可以确定一个 2 维线性子空间 V, 其普吕克

坐标为 $\{a_{ij}\}$。由此可见 4 维线性空间中的 2 维线性子空间与 $\mathbb{P}^5$ (其齐次坐标为 $X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$) 中的 2 次超曲面

$$\mathbb{G}_{3,2} : X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0 \tag{2}$$

中的点一一对应。(2) 实际上定义了一个 $\mathbb{Z}$-概形。若用例 1.3 的讨论法，即得 $\mathbb{G}_{3,2}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的如下预层

$$T \mapsto \{\mathbb{A}^4_T \text{ 中的秩 } 2\ T\text{-子向量丛}\}$$

推而广之，对任意正整数 $n \geqslant m$，令 $N = \binom{n+1}{m}$，$Y = \mathbb{P}^{N-1}_{\mathbb{Z}}$，其齐次坐标为 $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ $(0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n)$，且对 $1, 2, \ldots, m$ 的任意置换 σ 令 $X_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(m)}} = (-1)^\sigma X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ (其中 $(-1)^\sigma$ 当 σ 为奇置换时为 -1，当 σ 为偶置换时为 1，当有两个脚标相同时为 0)。定义 Y 中的闭子概形

$$\mathbb{G}_{n,m} : \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k X_{i_1 \ldots i_{m-1} j_k} X_{j_1 \ldots j_{k-1} j_{k+1} \ldots j_{m+1}} = 0 \quad (\forall i_1, \ldots, i_{m-1}, j_1, \ldots, j_{m+1}) \tag{3}$$

称为格拉斯曼空间 (*Grassmannian*)，而称齐次坐标 $X_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ 为普吕克坐标。

命题 1. 概形 $\mathbb{G}_{n,m}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的如下预层

$$T \mapsto \{\mathbb{A}^{n+1}_T \text{ 中的秩 } m\ T\text{-子向量丛}\}$$

换言之，$\mathbb{G}_{n,m}$ 是 $n+1$ 维线性空间中的 m 维线性子空间的精细模空间。若取 $\mathbb{A}^{n+1}$ 的坐标变元为 $x_0, \ldots, x_n$，则 $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{G}_{n,m}$ 中的秩 m 泛子向量丛由方程组

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k x_k X_{i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{m+1}} = 0 \quad (\forall 0 \leqslant i_1 < \ldots < i_{m+1} \leqslant n) \tag{4}$$

给出。此外，$\mathbb{G}_{n,m}$ 有一个由 N 个 $\mathbb{A}^{m(n+1-m)}$ 组成的开覆盖，特别地它在 $\mathbb{Z}$ 上光滑。

证. 由 Ⅲ.3 节可知 $\mathbb{A}^{n+1}_T \cong \mathbb{V}_T(\mathcal{O}_T^{\oplus n+1})$，而 $\mathbb{A}^{n+1}_T$ 中的一个秩 m 子向量丛等价于 $\mathcal{O}_T^{\oplus n+1}$ 的一个秩 m 局部自由商层 $\mathcal{E}$ (对应的子向量丛为 $\mathbb{V}_T(\mathcal{E})$)。记 $q : \mathcal{O}_T^{\oplus n+1} \to \mathcal{E}$ 为投射，则有 $\mathcal{O}_T$-模层的满同态

$$\wedge^m_{\mathcal{O}_T} q : \wedge^m_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^{\oplus n+1}) \cong \mathcal{O}_T^{\oplus N} \to \wedge^m_{\mathcal{O}_T} \mathcal{E} \tag{5}$$

由于 $\wedge^m_{\mathcal{O}_T}\mathcal{E}$ 为秩 1 局部自由层, (5) 给出一个态射 $\phi: T \to \mathbb{P}^{N-1}_{\mathbb{Z}} = Y$。

我们来说明 ϕ 经过 $\mathbb{G}_{n,m}$。由注 1.1.vi) 不妨设 $T = \mathrm{Spec}R$, $\mathcal{E} = \tilde{E}$, 其中 E 是有限生成的自由 R-模, 而 $\mathbb{V}_T(\mathcal{E}) \to T$ 的一个截口可以理解为 $E^\vee$ 的一个元。取定 $R^{\oplus n+1}$ 的一组自由生成元 $v_0, ..., v_n$, 若 $w_i = a_{i0}v_0 + \cdots + a_{in}v_n$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为 $E^\vee$ 的一组自由生成元, 令

$$c_{i_1\ldots i_m} = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \quad (\forall 0 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_m \leqslant n) \tag{6}$$

则 ϕ 由 $\phi^*(X_{i_1\ldots i_m}) = c_{i_1\ldots i_m}$ $(\forall 0 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_m \leqslant n)$ 给出。若 $b_0v_0 + \cdots + b_nv_n \in E^\vee$, 令 A 为在 (a_{ij}) 下面加上一行 $(b_0, ..., b_n)$ 所得的矩阵, 则 A 的所有 $m+1$ 阶子行列式等于 0, 故有

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k b_k c_{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_{m+1}} = 0 \quad (\forall 0 \leqslant i_1 < ... < i_{m+1} \leqslant n) \tag{7}$$

对任意 $0 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_{m-1} \leqslant n$, 记 $b_{i_1\ldots i_{m-1},j}$ 为 (a_{ij}) 中第 $i_1, i_2, ..., i_{m-1}$ 列划去第 j 行所得的行列式, 则易见有

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^j b_{i_1\ldots i_{m-1},j} w_j = \sum_{i=0}^{n} c_{i_1\ldots i_{m-1}i} v_i \in E^\vee \tag{8}$$

令 B 为在 (a_{ij}) 下面加上一行 $(c_{i_1\ldots i_{m-1}0}, ..., c_{i_1\ldots i_{m-1}n})$ 所得的矩阵, 则由 (8) 及 (7) 有

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k c_{i_1\ldots i_{m-1}j_k} c_{j_1\ldots j_{k-1}j_{k+1}\ldots j_{m+1}} = 0 \quad (\forall i_1, ..., i_{m-1}, j_1, ..., j_{m+1}) \tag{9}$$

这说明 ϕ 经过 $\mathbb{G}_{n,m}$。

注意 Y 有一个仿射开覆盖

$$\{U_{i_1i_2\ldots i_m} = U(X_{i_1i_2\ldots i_m}) | 0 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_m \leqslant n\} \tag{10}$$

其中每个 $U_{i_1i_2\ldots i_m} \cong \mathbb{A}^{N-1}$, 在其上可取仿射坐标 $X_{j_1j_2\ldots j_m}/X_{i_1i_2\ldots i_m}$ $(0 \leqslant j_1 < i_2 < ... < j_m \leqslant n, (j_1, ..., j_m) \neq (i_1, ..., i_m))$。在 $\mathbb{G}_{n,m} \cap$

$U_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 上, 由 (3) 可见若 $\{j_1, \dots, j_m\} \cap \{i_1, \dots, i_m\}$ 的元素个数 $< m-1$, 则 $X_{j_1 j_2 \dots j_m}/X_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 可表为其他仿射坐标的次数 $\leqslant 2$ 的多项式, 故在 $\mathbb{G}_{n,m} \cap U_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 上只需要仿射坐标

$$x_{rj} = X_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_m j}/X_{i_1 i_2 \dots i_m} \quad (1 \leqslant r \leqslant m,\ j \notin \{i_1, \dots, i_m\}) \tag{11}$$

共 $m(n+1-m)$ 个坐标元。我们来说明这些坐标是独立的。由对称性不妨设 $(i_1, \dots, i_m) = (0, 1, \dots, m-1)$。对任意给定的 $a_{rj} \in R$ $(1 \leqslant r \leqslant m$, $j \geqslant m)$, 令

$$w_i = v_{i-1} + \sum_{j=m}^{n} a_{ij} v_j \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{12}$$

则显然 $w_1, \dots, w_m$ 生成 $R^{\oplus n+1}$ 的一个秩 m 自由子模, 它所对应的态射 $\phi: T \to \mathbb{G}_{n,m}$ 经过 $\mathbb{G}_{n,m} \cap U_{01 \dots (m-1)}$, 且 $\phi^*(x_{rj}) = a_{rj}$ $(1 \leqslant r \leqslant m$, $j \geqslant m)$。若取 a_{rj} 为独立变元而 $R = \mathbb{Z}[a_{rj} | 1 \leqslant r \leqslant m, m \leqslant j \leqslant n]$, 则可见所有 x_{rj} 为独立变元, 且在 $\mathbb{G}_{n,m} \cap U_{01 \dots (m-1)}$ 上给出一个秩 $n+1$ 平凡向量从的秩 m 子从。

总之 $\mathbb{A}_T^{n+1}$ 中的一个秩 m T-子向量从等价于一个态射 $T \to \mathbb{G}_{n,m}$。而由 (7) 可见 $\mathbb{G}_{n,m}$ 上的秩 m 泛子向量从由 (4) 给出。证毕。

注意 $\mathbb{A}_T^{n+1}$ 中的秩 m T-子向量从相当于 $\mathbb{P}_T^n$ 中的 $m-1$ 维 T-射影子空间从, 故 $\mathbb{G}_{n,m}$ 也代表预层

$$T \mapsto \{\mathbb{P}_T^n \text{ 中的 } m-1 \text{ 维 } T\text{-射影子空间从}\}$$

换言之, $\mathbb{G}_{n,m}$ 是 n 维射影空间中 $m-1$ 维射影子空间的精细模空间。不难看出 $\mathbb{G}_{n,m}$ 也是 $n+1$ 维线性空间中 $n-m+1$ 维线性子空间的精细模空间, 以及 n 维射影空间中 $n-m$ 维射影子空间的精细模空间 (习题 1)。

2. 基本定理

例 1.4 所给出的除子的精细模空间, 粗糙地看是 n 维射影空间中余维数 1 的闭子概形的模空间; 而格拉斯曼空间 $\mathbb{G}_{n,m}$ 则可看作 n 维射影空间中 $m-1$ 维射影子空间的精细模空间。为了对代数子簇和子概形进

一步深入了解，应该考虑所有子簇或闭子概形所组成的空间的几何结构，这就需要将上述结果推进到各维闭子概形的模空间理论。

首先我们考虑 $\mathbb{P}^n$ 的所有“代数子空间”，即由齐次坐标的齐次多项式方程组定义的闭子概形。

设 k 为代数闭域，$Y \subset \mathbb{P}^n_k = X$ 为闭子概形，则可取充分大的 r 使得 Y 由一组 r 次齐次多项式 $f_1, ..., f_m \in [X_0, ..., X_n]$ 定义 (其中 $X_0, ..., X_n$ 为 X 的齐次坐标)。令 $M_r = \Gamma(X, O_X(r)) \cong k^{\oplus l_r}$，其中 $l_r = \binom{n+r+1}{r}$，且令 $M' = kf_1 + \cdots + kf_m \subset M_r$。不妨设 $f_1, ..., f_m$ 在 k 上线性无关，则 $\dim_k(M_r/M') = l_r - m$，故 Y 对应于 k^{l_r} 的一个 $l_r - m$ 维线性子空间，从而对应于 $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中的一个 k-点。反之，$\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中的任一 k-点给出一个 m 维线性子空间 $M' \subset M_r$，从而给出一个闭子概形 $Y \subset X$。但是，$\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 中不同的点所对应的闭子概形一般不是都具有相同的离散不变量 (如维数)，所以我们得不到 $\mathbb{G}_{l_r-1,m} \otimes k$ 上的一个纤维丛，故由此还不能得到模空间。

为了固定离散不变量，我们还需要对 Y 作些限制。对此有两种基本的方法，一是周炜良的固定 Y 的维数和次数的方法，另一是固定 Y 的希尔伯特多项式的方法。我们下面采用后一方法，它的优点是适用于任意闭子概形 (而前一方法主要适用于代数子簇)。

引理 1. 设 S 为诺特概形，$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 S 上凝聚层的同态，其中 $\mathcal{G}$ 在 S 上平坦，则存在闭子概形 $\mathcal{N}il(f) \subset S$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$\mathfrak{Nil}_f \colon T \mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T, S) | \phi^* f = 0 : \phi^* \mathcal{F} \to \phi^* \mathcal{G}\}$$

证. 由抽象废话不妨设 S 是仿射的。设 $S = \mathrm{Spec} R$，取 R-模 M, N 使得 $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G} = \tilde{N}$，其中 N 是平坦的，则 f 由一个 R-模同态 $f_S : M \to N$ 给出。令 $M' = f_S(M)$。令 I 为所有满足 $M' \subset JN$ 的理想 $J \subset R$ 的交，则因 N 是局部自由 R-模，易见 $M' \subset IN$。我们来验证 $\mathrm{Spec}(R/I)$ 代表 $\mathfrak{Nil}_f$。对任意 $T = \mathrm{Spec} A$ 及任意 $\phi : T \to S$，令 $J' = \ker(\phi^* : R \to A)$，且

令 $f': M \to N/J'N$ 为 f 诱导的同态, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N/J'N \\ \downarrow \phi_M^* & & \downarrow \phi_{N/J'N}^* \\ M \otimes_R A & \xrightarrow{f_A} & N \otimes_R A \end{array} \tag{1}$$

其中 $\phi_{N/J'N}^*$ 是单射, 因为 N 平坦。若 $f_A = 0$, 则有 $f' = 0$, 故 $J' \supset I$, 换言之 ϕ 经过 $\mathrm{Spec}(R/I)$。证毕。

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{F}$ 为 S 上凝聚层, $n = \max_{s\in S}(\dim_{\kappa(s)} \mathcal{F}_s)$。则存在 S 的闭子概形 $S_{\mathcal{F},n}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$F\colon T \mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T, S) | \phi^*\mathcal{F} \text{ 为秩 } n \text{ 局部自由的}\}$$

证. 由抽象废话问题是局部的, 不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$, 其中 M 由 n 个元生成。任取满同态 $f: R^{\oplus n} \to M$, 令 $M' = \ker(f)$。注意对任一 R-代数 A, $A \otimes_R M$ 是秩 n 局部自由的当且仅当 $\mathrm{id}_A \otimes_R f : A^{\oplus n} \to A \otimes_R M$ 是同构, 而这当且仅当 $f \otimes_R \mathrm{id}_A : M' \otimes_R A \to R^{\oplus n} \otimes_R A$ 是零映射。故由引理 1, F 由 S 的一个闭子概形代表。证毕。

推论 2. 设 S 为诺特概形, $\pi: X \to S$ 为相对射影态射。设 $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为 X 上的凝聚层同态, 其中 $\mathcal{G}$ 在 S 上平坦。则存在闭子概形 $\mathcal{N}il(f/S) \subset S$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$\mathfrak{Nil}_{f/S}\colon T \mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T, S) | (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^* f = 0 : (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F} \to (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}\}$$

证. 对任意整数 n, 记 $\mathcal{F}_n = \pi_*\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{G}_n = \pi_*\mathcal{G}(n)$, 而令 $f_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{G}_n$ 为 f 诱导的同态。取 n 使得 $H^1(X_s, G_s(n)) = 0$ $(\forall s \in S)$, 则由半连续性理论 (见命题 I.3.1 或 [H, Ⅲ.5 & 12]) 可知 $\mathcal{G}_n$ 在 S 上局部自由。由引理 1 有闭子概形 $\mathcal{N}il(f_n) \subset S$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T, S) | \phi^* f_n = 0 : \phi^*\mathcal{F}_n \to \phi^*\mathcal{G}_n\}$$

我们还可取 n 使得 $\pi^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}(n)$ 和 $\pi^*\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}(n)$ 为满射。对任一态射 $\phi: T \to S$, 注意 $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n) \cong \phi^*\mathcal{G}_n$, 且有诱导同态 $\phi^*\mathcal{F}_n \to$

$\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n)$。若 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^* f = 0$, 则 $\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n) \to \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n)$ 为零同态, 从而 $f_n = 0 : \phi^*\mathcal{F}_n \to \phi^*\mathcal{G}_n$; 反之, 若 $f_n = 0$, 则 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n) \to (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{G}(n)$ 为零同态 (因为 $\mathrm{pr}_2^*\phi^*\mathcal{F}_n \to (\mathrm{id}_X \times_S \phi)^*\mathcal{F}(n)$ 是满射), 故 $(\mathrm{id}_X \times_S \phi)^* f = 0$。这说明 $\mathcal{N}il(f_n)$ 代表 $\mathfrak{Nil}_{f/S}$。证毕。

由此立得

推论 3. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对射影态射, $Y, Y' \subset X$ 为闭子概型, 其中 Y 在 S 上平坦。则存在 S 的闭子概形代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{j \in \mathrm{Mor}(T, S) | Y \times_S T \subset Y' \times_S T\}$$

(注意 $Y' \times_S T$ 和 $Y \times_S T$ 都是 $X \times_S T$ 的闭子概形)。特别地, 若 Y' 也在 S 上平坦, 则有闭子概形 $S' \subset S$ 代表预层

$$T \mapsto \{j \in \mathrm{Mor}(T, S) | Y \times_S T = Y' \times_S T\}$$

我们称 S' 为 Y 和 Y' 在 S 中的*等化子* (*equalizer*)。

我们下面将多次用到“平坦分层”的方法。设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型态射, $\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层, 则存在 S_{red} 的稠密开子概形 U_1 使得 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_1}$ 在 U_1 上平坦 (参看 [Ma, (22.A)] 或 [L1, 习题 XVI.9]); 令 $S_1 = S - U_1$, 带有约化的诱导概形结构, 若 $S_1 \neq \emptyset$, 则存在稠密开子概形 $U_2 \subset S_1$ 使得 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_2}$ 在 U_2 上平坦; 再令 $S_2 = S_1 - U_2$ (带有约化的诱导概形结构), 重复上面的过程, 等等。由诺特归纳法, 经过有限多步以后我们就将 S 分解为有限多个局部闭子集 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (带有约化的诱导概形结构) 的无交并, 使得每个 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_{U_i}$ 在 U_i 上平坦, 且每个 U_{i+1} 含于 U_i 的闭包中 $(1 \leqslant i < n)$。这种分解称为 $\mathcal{F}$ 的*平坦分层* (*flattening stratification*)。

引理 2. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为射影态射, $\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层, 则存在正整数 N 使得对任意 $m > N$ 有

$$(\pi_*\mathcal{F}(m))_s \xrightarrow{\simeq} H^0(X_s, \mathcal{F}_s(m)) \tag{2}$$

$(\forall s \in S)$。若 $s, s' \in S$, s' 是 s 的一般化 (即 s 含于 $\{s'\}$ 的闭包中), 则对 $m > N$ 有

$$\chi_{\mathcal{F}_s}(m) \geqslant \chi_{\mathcal{F}_{s'}}(m) \tag{3}$$

此外，集合 $\{\chi_{\mathcal{F}_s} | s \in S\} \subset \mathbb{Q}[x]$ 是有限集。

证．为简便起见不妨设 $S = \mathrm{Spec}R$。设 $I \subset R$ 为理想。由正合列 $0 \to I\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/I\mathcal{F} \to 0$，可见当 $m \gg 0$ 时有正合列

$$0 \to H^0(I\mathcal{F}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m)) \to H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m)) \to 0 \tag{4}$$

(参看 [H, Theorem Ⅲ.5.2])。由于 R 是诺特环，可取正整数 r 使得有 R-模满同态 $R^{\oplus r} \to I$，从而有凝聚层满同态 $\mathcal{F}^{\oplus r} \to I\mathcal{F}$。对 $m \gg 0$，$H^0(\mathcal{F}^{\oplus r}(m)) \to H^0(I\mathcal{F}(m))$ 为满射，而 $H^0(\mathcal{F}^{\oplus r}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m))$ 的象显然在 $IH^0(\mathcal{F}(m))$ 中，故由 (4) 得

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes_R (R/I) \cong H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m)) \tag{5}$$

若 I 为素理想，存在 $V(I) = \mathrm{Spec}(R/I) \subset S$ 的非空开子概形 U 使得 $\mathcal{F} \otimes_{O_S} O_U$ 在 U 上平坦，故对 $m \gg 0$ 有

$$H^0((\mathcal{F}/I\mathcal{F})(m))_s \cong H^0(X_s, \mathcal{F}_s(m)) \ (\forall s \in U) \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 即得 (2) 对 $s \in U$ 成立。由 I 的任意性，用平坦分层的方法可将 S 分解成有限多个连通局部闭子概形 U_i (带有约化的诱导概形结构) 的无交并，使得对每个 i 存在 N_i，当 $m > N_i$ 时 (2) 对任意 $s \in U_i$ 成立。取 $N = \max\limits_i(N_i)$ 即可使 (2) 当 $m > N$ 时对任意 $s \in S$ 成立。

若 s' 是 s 的一般化，由 (2) 和引理 I.3.1 立得

$$\dim_{\kappa(s)} H^0(\mathcal{F}_s(m)) \geqslant \dim_{\kappa(s')} H^0(\mathcal{F}_{s'}(m))$$

这就是 (3)。

最后，注意在每个 U_i 上 $\mathcal{F}$ 只有一个希尔伯特多项式 (即存在 $\chi_i \in \mathbb{Q}[x]$ 使得对任意 $s \in U_i$ 都有 $\chi_{\mathcal{F}_s} = \chi_i$)，故 $\{\chi_{\mathcal{F}_s} | s \in S\}$ 是有限集。证毕。

定理 1. 对任一整值多项式 χ，存在 $\mathbb{Z}$-射影概形 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$ 代表如下预层

$$\mathfrak{Hilb}^{\chi}_{\mathbb{P}^n}: ((\text{局部诺特概形}))\to((\text{集合}))$$
$$T\mapsto\{\mathbb{P}^n_T\text{ 中的具有希尔伯特多项式 }\chi\text{ 的 }T\text{-平坦闭子概形}\}$$

我们称 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$ 为一个**希尔伯特概形** (*Hilbert scheme*)。

证. 记 $X=\mathbb{P}^n$, $\chi'=\chi_X-\chi$。由引理 I.3.5, 存在只与 χ' 有关的正整数 N, 使得对任意概形 T 及任意 T-平坦闭子概形 $Z\subset X\times T$, 若 $\chi_Z=\chi$ 则 Z 的理想层在 T 上的纤维都是 N-正则的。令 $m=\binom{N+n}{n}-1\ (=\chi_X(N)-1)$, $r=\chi(N)$, $S=\mathbb{G}_{m,r}$, 由命题 1 可知 S 代表 Spec$\mathbb{Z}$ 上的秩 $m+1$ 平凡向量丛的秩 r 向量子丛, 故有 $\mathcal{F}=H^0(O_X(N))\otimes O_S\cong O_S^{\oplus m+1}$ 的凝聚子层 $\mathcal{F}'$ 使得 $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 为局部自由秩 r 的泛层。令 $\pi:X\times S\to S$ 为投射, 则有诱导同态 $\phi:\pi^*\mathcal{F}'\to\pi^*\mathcal{F}\to O_{X\times S}(N)$, 于是 $\mathcal{I}=\mathrm{im}(\phi)(-N)$ 就是 $O_{X\times S}$ 中的理想层。记 $Y\subset X\times S$ 为 $\mathcal{I}$ 定义的闭子概形。

设 $\xi\in S$ 为一般点, 则由平坦分层, 存在 ξ 的开邻域 $U\subset S$ 使得 $Y\times_S U$ 在 U 上平坦, 从而对任意 $s\in U$ 有 $\chi_{Y_s}=\chi_{Y_\xi}$。若 $\chi_{Y_\xi}\neq\chi$, 令 $S_1=S-U$ (带有约化诱导概形结构)。若有 S_1 的一般点 ξ' 使得 $\chi_{Y_{\xi'}}\neq\chi$, 取 ξ' 在 S_1 中的开邻域 U_1 使得 $Y\times_S U_1$ 在 U_1 上平坦, 再令 $S_2=S_1-U_1$, 等等, 如此继续下去, 由诺特归纳法, 经过有限步后我们得到一个闭子概形 $S'\subset S$, 使得对任意 $s\in S$, 若 $\chi_{Y_s}=\chi$ 则 $s\in S'$, 且有稠密开子集 $U'\subset S'$ 使得 $Y\times_S U'$ 在 U' 上平坦。

我们来说明对每个点 $s\in S'$ 都有 $\chi_{Y_s}=\chi$。由引理 2 只需考虑 s 为闭点的情形。取一个整的 1 维闭子概形 $C\subset S'$ 使得 $s\in C$ 且 $C\cap U'\neq\emptyset$ (习题 4), 则 C 的正规化 $\tilde{C}$ 是正则的 (引理 I.4.2)。令 $Y'=Y\times_S\tilde{C}$, $\mathcal{T}\subset O_{Y'}$ 为 $O_{Y'}$ 中的 $O_{\tilde{C}}$-零因子组成的子层, 则 $O_{Y'}/\mathcal{T}$ 定义一个闭子概形 $Y_0\subset Y'$, 在 $\tilde{C}$ 上平坦, 故由 $C\cap U'\neq\emptyset$ 有 $\chi_{Y_0}=\chi$。令 $\mathcal{J}\subset O_{X\times\tilde{C}}$ 为 Y_0 的理想层, $s'\in\tilde{C}$ 为 s 的一个原象, 则由引理 2 有 $\dim_{\kappa(s')}H^0(O_{(Y_0)_{s'}}(N))=r$, $\dim_{\kappa(s')}H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))=m-r$。另一方面, 由 Y 的定义有 $H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))\supset H^0(\mathcal{I}_{s'}(N))\supset\mathcal{F}'_{s'}$, 而 $\dim_{\kappa(s')}\mathcal{F}'_{s'}=m-r$, 故 $H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))=\mathcal{F}'_{s'}\subset\mathcal{F}_{s'}$。而由引理 I.3.5 可知 $H^0(\mathcal{J}_{s'}(N))$ 生成 $\mathcal{J}_{s'}(N)$, 从而 $(Y_0)_{s'}=Y'_{s'}$, $\chi_{Y_s}=\chi_{Y'_{s'}}=\chi$。

由引理 2 可知, 对 $s\in S$, 若 $\{s\}$ 的闭包与 S' 相交, 则对 $t\gg0$ 有 $\chi_{Y_s}(t)\leqslant\chi(t)$, 故若 $\chi\neq\chi_{Y_s}$ 则 $\chi-\chi_{Y_s}$ 的首项系数大于 0, 此时我们简

记 $\chi_{Y_s} < \chi$。由平坦分层可见 $V = \{s \in S|\chi_{Y_s} > \chi\}$ 为 S 的闭子集; 而由上所述 $V \cap S' = \emptyset$, 从而 $S' \subset S - V$。由推论 I.3.4, 存在整数 N_0 使得对任意 $t > N_0$, $\pi_*(O_{X\times S}(t)) \to \pi_*(O_Y(t))$ 是满射, 且对任意 $s \in S - V$ 有 $\pi_*(O_Y(t))_s \cong H^0(Y_s, O_{Y_s}(t))$ 及 $\chi_{Y_s}(t) \leqslant \chi(t)$, 故由推论 1 有闭子概形 $S_t \subset S - V$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$F\colon T \mapsto \{\phi \in \mathrm{Mor}(T, S-V)|\phi^*\pi_*(O_Y(t)) \text{ 为秩 } \chi(t) \text{ 局部自由的}\}$$

由诺特归纳法存在交概形 $S_\chi = \bigcap_{t>N_0} S_t$。显然作为集合 $S_\chi = S'$, 故 S_χ 在 $\mathbb{Z}$ 上为射影的。令 $Y_\chi = Y \times_S S_\chi$, 则由引理 2 和命题 I.3.1 可取 N_0 使得对 $t > N_0$, $\pi_*(O_Y(t))$ 在 S_χ 上的拉回同构于 $\pi_*(O_{Y_\chi}(t))$, 故 $\pi_*(O_{Y_\chi}(t))$ 是秩 $\chi(t)$ 局部自由的。

令 $\mathcal{E} = \bigoplus_{t>N_0} \pi_*(O_{Y_\chi}(t))$, 视为一个 $O_{S_\chi}[X_0, ..., X_n]$-模, 它显然在 S_χ 上平坦。记 $U_i = \{X_i \neq 0\} \subset Y_\chi$, 则 $\pi_* O_{U_i}$ 同构于 $\mathcal{E}$ 用 $1/X_i$ 局部化后的 0 次直加项 (参看 [H, Ⅲ.5.2]), 故也在 S_χ 上平坦, 换言之 U_i 在 S_χ 上平坦。因此 Y_χ 在 S_χ 上平坦。

我们来验证 (S_χ, Y_χ) 代表 $\mathfrak{Hilb}^\chi_{\mathbb{P}^n}$。设 T 为局部诺特概形, $Y_T \subset X \times T$ 为具有希尔伯特多项式 χ 的 T-平坦闭子概形, $\mathcal{I}_{Y_T}$ 为其定义理想层, $\pi_T : X \times T \to T$ 为投射。由引理 I.3.5, $\pi_{T*}(O_{Y_T}(N))$ 为局部自由秩 $\chi(N)$ 的, $\pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N))$ 为局部自由秩 $\chi'(N)$ 的, 且 $\pi_{T*}(O_{X\times T}(N)) \cong O_T^{\oplus m} \to \pi_{T*}(O_{Y_T}(N))$ 为满射。由 S 的泛性, 存在唯一态射 $\phi : T \to S$ 使得 $\phi^*\mathcal{F}' = \pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N))$ (作为 $\phi^*\mathcal{F} \cong \pi_{T*}(O_{X\times T}(N))$ 的子层)。故有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_T^*\phi^*\mathcal{F}' & \longrightarrow & O_{X\times T}(N) & \longrightarrow & (\mathrm{id}_X \times \phi)^* O_Y(N) & \to 0 \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\ \pi_T^*\pi_{T*}(\mathcal{I}_{Y_T}(N)) & \longrightarrow & O_{X\times T}(N) & \longrightarrow & O_{Y_T}(N) & \to 0 \end{array} \tag{7}$$

其中的行都是正合的。由此得

$$Y_T = Y \times_{X\times S} (X \times T) = Y \times_S T \subset X \times T \tag{8}$$

由于 $\chi_{Y_T} = \chi$, 作为集合映射 ϕ 将 T 映入 S_χ, 故 ϕ 经过 $S - V$。对任意 $t > N_0$, $\psi_t : \phi^*\pi_*(O_Y(t)) \to \pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是满射 (因为 $\pi_{T*}(O_{X\times T}(t)) \to \pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是满射), 且由上所述可见 ψ_t 在 T 上的纤维都是同构。由于

$\pi_{T*}(O_{Y_T}(t))$ 是局部自由的，可见 ψ_t 是同构，故 $\phi^*\pi_*(O_Y(t))$ 是局部自由秩 $\chi(t)$ 的，因此 ϕ 经过 S_t。由 t 的任意性，ϕ 经过 S_χ。$T \to S_\chi$ 的唯一性是显然的，因为 $\phi: T \to S_\chi \to S$ 是唯一的。证毕。

注 1. 直接计算表明，$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{G}_{m+1,r}$ 的定义理想层是一些 Fitting 理想层之和。

3. 一些基本推论

下面的一些推广也都称为希尔伯特概形。

定理 2. 设 S 为局部诺特概形而 $X \to S$ 为相对射影概形 (固定了 $O_X(1)$)，χ 为整值多项式。下面涉及的预层若不特别说明，都是从局部诺特 S-概形的范畴到集合范畴的反变函子。

i) 若 X 是 $\mathbb{P}^n_S$ 的闭子概形 ($O_X(1)$ 由 $O_{\mathbb{P}^n}(1)$ 给出)，则存在闭子概形 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S} \subset \mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n} \times S$ 代表如下预层

$$T \mapsto \{X \times_S T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

ii) 存在 S 上的局部射影概形 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$，代表预层

$$T \mapsto \{X \times_S T \text{ 中的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

iii) 设 $W \subset X \times_S \mathcal{H}ilb_{X/S}$ 是 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 上的泛子概形，则对任意正整数 n，n 个 W 的拷贝在 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 上的纤维积 $W \times_{\mathcal{H}ilb_{X/S}} \overset{n}{\cdots} \times_{\mathcal{H}ilb_{X/S}} W$ 代表预层

$$T \mapsto \{X \times_S T \text{ 中的 } T\text{-平坦闭子概形，带有 } n \text{ 个截口}\}$$

iv) 设 X 在 S 上平坦而 $Y \to S$ 为相对射影概形，则存在 $\mathcal{H}ilb_{X \times_S Y/S}$ 的局部闭子概形 $\mathcal{M}or_S(X,Y)$，代表预层

$$\mathfrak{Mor}_{X,Y/S}: \ T \mapsto \mathrm{Mor}_T(X \times_S T, Y \times_S T)$$

若 Y 也在 S 上平坦，则存在 $\mathcal{M}or_S(X,Y)$ 的局部闭子概形 $\mathcal{I}so_S(X,Y)$，代表预层

$$\mathfrak{Iso}_{X,Y/S}: \ T \mapsto \{T\text{-同构 } X \times_S T \xrightarrow{\simeq} Y \times_S T\}$$

特别地，存在 $\mathcal{H}ilb_{X \times_S X/S}$ 的局部闭子概形 $\mathcal{E}nd(X/S)$，代表预层

$$((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{半群}))$$
$$T\mapsto \mathrm{Mor}_T(X\times_S T, X\times_S T)$$

而且存在 $\mathcal{E}nd(X/S)$ 的局部闭子概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$, 代表预层

$$((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{群}))$$
$$\mathfrak{Aut}_{X/S}:\ T\mapsto \mathrm{Aut}(X\times_S T/T)$$

且 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 带有自然的群概形结构, 称作 X 在 S 上的**自同构群概形** (automorphism scheme)。

证. i) 由抽象废话 (参看注 1.1), $H=\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}\times S$ 代表预层

$$((\text{局部诺特 } S\text{-概形}))\to((\text{集合}))$$
$$T\mapsto\{\mathbb{P}^n_T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

令 $W\subset\mathbb{P}^n_H$ 为 H 上的泛子概形。由推论 3, 存在 H 的闭子概形 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 代表预层

$$T\mapsto\{j\in\mathrm{Mor}(T,H)|W\times_H T\subset X\times_S T\}$$

这等价于预层

$$T\mapsto\{X\times_S T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

ii) 先考虑 S 为仿射的情形, 任取一个闭嵌入 $X\to\mathbb{P}^n_S$ (对某个 n), 则显然 $\mathcal{H}ilb_{X/S}=\coprod\limits_{\chi}\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 代表预层

$$T\mapsto\{X\times_S T \text{ 中的 } T\text{-平坦闭子概形}\}$$

由抽象废话, $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 在 S-同构之下与嵌入 $X\to\mathbb{P}^n_S$ 无关。故由抽象废话, $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 对一般的 S 也存在。

iii) 是抽象废话。

iv) 令 $H=\mathcal{H}ilb_{X\times_S Y/S}$ 而 $W\subset X\times_S Y\times_S H$ 为 H 上的泛子概形。令 $W_1=\mathrm{im}(W\to X\times_S H)$, 则因 $X\to S$ 平坦, 由推论 3 存在 H 的最大闭子概形 V 使得 $X\times_S V\subset W_1$。令 $W_2=W\times_H V$, $W_3\subset W_2$ 为最大开子概形使得 $\Omega^1_{W_3/X\times_S V}=0$, $U=X\times_S V-\mathrm{im}((W_2-W_3)\to X\times_S V)$, 则投射 $p:W_4=W_2\times_{X\times_S V}U\to U$ 为相对射影无分歧的, 因而是有限的。令 $U_1\subset U$ 为最大开子概形使得 $p^*:O_{U_1}\to p_*O_{W_4}|_{U_1}$ 为满射,

$V' = V - \mathrm{im}((X \times_S V - U_1) \to V)$, 则不难验证 $V' \subset H$ 是最大的子概形使得 $W \times_H V' \to X \times_S V'$ 为同构。我们来验证 V' 代表 $\mathfrak{Mor}_{X,Y/S}$。注意对任意 S-概形 T, 给出一个 $j \in \mathrm{Mor}_T(X \times_S T, Y \times_S T)$ 等价于给出一个 T-平坦闭子概形 $W' \subset X \times_S Y \times_S T$ 使得 $W' \to X \times_S T$ 为同构 ($W' = \mathrm{im}((\mathrm{id}_{X \times_S T}, j) : X \times_S T \to X \times_S Y \times_S T)$, 即 j 的图)。这样一个 W' 诱导一个典范态射 $\phi : T \to H$ 使得 $W \times_H T = W' \subset X \times_S Y \times_S T$。由 $\mathrm{im}(W' \to X \times_S T) \subset W_1 \times_H T$, 有 $W_1 \times_H T = X \times_S T$, 故由推论 3 可见 ϕ 经过 V。再由 $W \times_H T \cong X \times_S T$ 可见 $X \times_S T = U_1 \times_V T$, 从而 $T \to V$ 经过 V', 而 $T \to V'$ 的唯一性是显然的。

若 $Y \to S$ 平坦, 交换 X 和 Y 的地位再如上讨论, 即可得到 $\mathfrak{Iso}_{X,Y/S}$ 由 V' 的一个局部闭子概形代表。令 $Y = X$, 再注意 $\mathrm{Mor}_T(X \times_S T, X \times_S T)$ 具有半群结构 (乘法为合成) 而 $\mathrm{Aut}_T(X \times_S T)$ 具有群结构, 即得 $\mathcal{E}nd(X/S)$ 和 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的存在性。而 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的群概形结构是抽象废话 (见习题 1.1)。证毕。

注 2. 由抽象废话, 定理 2 中的各模概形都与基变换交换, 即对任意局部诺特 S-概形 T 有 $\mathcal{H}ilb_{X \times_S T/T} \cong \mathcal{H}ilb_{X/S} \times_S T$, $\mathcal{A}ut(X \times_S T/T) \cong \mathcal{A}ut(X/S) \times_S T$, 等等 (参看注 1.1)。

例 1. 我们来看一个简单的情形, 这有助于理解希尔伯特概形的结构。

设 $S = \mathrm{Spec}R$ 为连通诺特概形, M 为有限生成的 R-模。令 $A = R \oplus M$, 并对任意 $(a, x), (b, y) \in A$ 令 $(a, x) \cdot (b, y) = (ab, ay + bx)$, 这样给出 A 的一个 R-代数结构。令 $X = \mathrm{Spec}A$, 易见 X 的一个 S-平坦闭子概形等价于 M 的一个 R-平坦商模。

对任意正整数 d, 由定理 2.i) 可知存在 X 的 S-平坦 $d+1$ 次闭子概形的模空间 $H = \mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$, 其中 $\chi = d + 1$ (零次)。任取一个 R-模满同态 $\phi : R^{\oplus m} \to M$ 并令 $K = \ker(\phi)$。由上所述可见对任意 S-概形 T, 一个 T-平坦 $d+1$ 次闭子概形 $Y \subset X \times_S T$ 等价于 $\mathrm{pr}_1^* \tilde{M}$ 的一个秩 d 局部自由商模层。若 $T = \mathrm{Spec}B$ 而 B 是局部环, 则 Y 等价于一个满同态 $\psi : B^{\oplus m} \to B^{\oplus d}$ 使得 $K \otimes_R B \to B^{\oplus m}$ 经过 $\ker(\psi)$。注意 ψ 等价于一个 S-态射 $T \to \mathbb{G}_{m-1,d} \times S$。设 ψ 由 $d \times m$ 矩阵 (a_{ij}) 给出, 则上述条件等

价于

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_j \otimes_R 1) = 0 \quad (\forall (b_1, \ldots, b_m) \in K,\ 1 \leqslant i \leqslant d) \tag{1}$$

定义 $c_{i_1 \ldots i_d}$ 如 (2.1.6), 则如同 (2.1.8) 的推导可得

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i_1 \ldots i_{d-1} i}(b_i \otimes_R 1) = 0 \quad (\forall (b_1, \ldots, b_m) \in K,\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_{d-1} \leqslant m) \tag{2}$$

故 $H \subset \mathbb{G}_{m-1,d} \times S$ 由

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i_1 \ldots i_{d-1} i} \otimes b_i = 0 \quad (\forall (b_1, \ldots, b_m) \in K,\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_{d-1} \leqslant m) \tag{3}$$

定义。记 $v_i = \phi(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 则 H 上的泛子概形 $W \subset X \times_S H \subset X \times \mathbb{G}_{m-1,d}$ 由 $A \otimes_R O_H(1)$ 中的截口

$$\sum_{k=1}^{d+1} (-1)^k v_k \otimes X_{i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{d+1}} \quad (\forall 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{d+1} \leqslant m) \tag{4}$$

所生成的子层定义。

例 2. 设 C 为域 k 上的亏格 g 光滑完备曲线, 则 C 上的任意 $d \geqslant 2g+1$ 次可逆层 $\mathcal{L}$ 是极丰富的 (参看 [H, Corollary Ⅳ.3.2]), 从而给出闭嵌入 $i : C \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{d-g}$ (因为 $h^0(\mathcal{L}) = d+1-g$)。由黎曼-罗赫定理有 $\chi_{\mathcal{L}} = dx+1-g$, 故 i 给出 $\mathcal{H}ilb_{\mathbb{P}_k^{g+1}}^{dx+1-g}$ 的一个 k-点。由此可见任意代数闭域 k 上的亏格 g 光滑完备曲线都有 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{H}ilb_{\mathbb{P}^{g+1}}^{dx+1-g}$ 的 k-点代表, 但这样的 k-点远不止一个。令 $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}_{\mathcal{T}_0}^{g+1}$ 为 $\mathcal{T}_0$ 上的泛子概形, 则 $\mathcal{C}'$ 中所有在 $\mathcal{T}_0$ 上光滑的点组成一个开子概形 U (参看 [L1, 命题 XVI.3.1])。令 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 - \mathrm{pr}_2(\mathcal{C}' - U)$ (为 $\mathcal{T}$ 的开子概形), 则 $\mathcal{T}_1$ 中所有在 $\mathcal{C}'$ 中的原像几何连通的点组成一个开子概形 $\mathcal{T}$ (参看命题 I.3.1 和推论 I.3.1)。令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \times_{\mathcal{T}_0} \mathcal{T}$, 则 $\mathcal{C} \to \mathcal{T}$ 的纤维都是亏格 g 光滑完备曲线, 且它的所有几何纤维给出各代数闭域上的所有亏格 g 光滑完备曲线的同构类。我们称 $\mathcal{T}$ 为亏格 g 光滑完备曲线的一个**目录空间** (*catalogue space*)。

为方便起见我们采用如下术语: 一个概形 S 上的**曲线**是指一个光滑相对射影满态射 $\pi : \mathcal{C} \to S$, 其纤维均为 1 维几何整的; 且当 π 的纤维都

具有亏格 g 时称 $\mathcal{C}$ (或 π) 具有亏格 g。一个 S-态射 $f: X \to Y$ 称为**一般光滑的**, 如果存在开子概形 $U \subset X$, 在 S 上忠实平坦, 使得 $f|_U : U \to Y$ 是光滑的。

推论 4. 设 S 为诺特概形而 X, Y 为相对射影 S-概形, 其中 X 在 S 上平坦。则存在局部拟射影 S-概形 $\mathcal{M}or_S^{\mathrm{gs}}(X,Y)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Mor}^{\mathrm{gs}}_{X,Y/S}\colon T \mapsto \{\text{一般光滑 } T\text{-态射 } T \times_S X \to T \times_S Y\}$$

证. 令 $\mathcal{T}' = \mathcal{M}or_S(X,Y)$ (见定理 2.iv)), 并令 $f : X \times_S \mathcal{T}' \to Y \times_S \mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{T}'$ 上的泛态射。则 f 的所有光滑点组成 $X \times_S \mathcal{T}'$ 的一个开子概形 U (参看 [L1, 命题 XVI.3.1])。令 $\mathcal{T} = \mathrm{pr}_2(U)$ (为 $\mathcal{T}'$ 的开子概形), 则不难验证 $\mathcal{T}$ 代表 $\mathfrak{Mor}^{\mathrm{gs}}_{X,Y/S}$。证毕。

例 3. 设 C, C' 为域 k 上的光滑完备曲线, 亏格分别为 $g \geqslant 2$, g'。对任意可分态射 $f : C' \to C$, 由赫尔维茨定理 (见 (I.1.5.4) 或 [H, Corollary IV.2.4]) 可知 $\deg(f)(2g-2) \leqslant 2g'-2$, 故 $d = \deg(f) \leqslant g'-1$。设 $p' \in C'$, $p \in C$ 为 k-点, 令 $D = p' \times_k C + C' \times_k p \subset X = C' \times_k C$, Γ_f 为 f 的图。则 $\mathcal{L} = O_X(D)$ 为 X 上的丰富层。易见 $\Gamma_f \cap D$ 的次数等于 $d+1$, 故 $\Gamma_f \subset X$ 对于 $\mathcal{L}$ 作为 $O_X(1)$ 的希尔伯特多项式为 $\chi_{\Gamma_f}(x) = (d+1)x + 1 - g'$ (习题 5)。由定理 2 和推论 4 可见

$$\mathcal{M}or_k^{\mathrm{gs}}(C', C) \subset \coprod_{d=1}^{g'-1} \mathcal{H}ilb^{(d+1)x+1-g'}_{C' \times_S Y/S} \tag{5}$$

为拟射影 k-概形。

更一般地, 若 S 为诺特概形而 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 为 S 上的亏格分别为 $g \geqslant 2$, g' 的曲线, 带有 S-截口 $S \to \mathcal{C}$ 和 $S \to \mathcal{C}'$, 则同理可得 $\mathcal{M}or_S^{\mathrm{gs}}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ 为 S 上的相对拟射影概形。

设 S 为局部诺特概形而 $X \to S$ 为相对射影概形 (固定了 $O_X(1)$), χ 为整值多项式, W 为 $H = \mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 上的泛子概形。由引理 I.4.3 可知有一个极大开子概形 $U \subset H$, 使得 $W \times_H U$ 为 U-有效除子, 且对任意 $t \in H$, $W_t \subset X \times_S \{t\}$ 为有效除子当且仅当 $t \in U$。因此 U 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Div}^{\chi}_{X/S}: T \mapsto \{X \times_S T \text{ 中的具有希尔伯特多项式 } \chi \text{ 的 } T\text{-有效除子}\}$$

由命题 I.4.4 还可见, 若 $X \to S$ 是光滑的, 则 U 是 H 的闭子概形, 从而为 H 的一些连通分支的并。总之有

推论 5. 设 S 为局部诺特概形而 $X \to S$ 为相对射影概形 (固定了 $O_X(1)$), χ 为整值多项式。下面涉及的预层若不特别说明, 都是从局部诺特 S-概形的范畴到集合范畴的反变函子。

i) 存在 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$ 中的一个开子概形 $\mathcal{D}iv^{\chi}_{X/S}$ 代表预层 $\mathfrak{Div}^{\chi}_{X/S}$。

ii) 若 $X \to S$ 是光滑的, 则 $\mathcal{D}iv^{\chi}_{X/S}$ 是 $\mathcal{D}iv^{\chi}_{X/S}$ 的一些连通分支的并, 从而在 S 上是相对射影的。

iii) 存在 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 中的一个开子概形 $\mathcal{D}iv_{X/S}$ 代表预层

$$\mathfrak{Div}_{X/S}: T \mapsto \{X \times_S T \text{ 中的 } T\text{-有效除子}\}$$

且若 $X \to S$ 是光滑的, 则 $\mathcal{D}iv_{X/S}$ 是 $\mathcal{H}ilb_{X/S}$ 的一些连通分支的并, 从而在 S 上是局部射影的。

此外, 由定理 I.4.1 可知若 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 满足条件:

(*) $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}$ 是 S 上的局部自由层, 且对任一点 $s \in S$, $\mathcal{E} \otimes \kappa(s) \to \Gamma(X_s, \mathcal{L}_s)$ 为同构

则预层 $|\mathcal{L}/S|$ 由 $\mathbb{P}_S(\mathcal{E}^\vee)$ 的一个开子概形 U 代表, 故有典范 S-态射 $U \to \mathcal{D}iv_{X/S}$, 易见它将 U 嵌入 $\mathcal{D}iv_{X/S}$ 作为局部闭子概形 (习题 7)。

习题

1. 证明 $\mathbb{G}_{n,m}$ 是 n 维射影空间中 $m-1$ 维射影子空间的精细模空间, 也是 $n+1$ 维线性空间中 $n-m+1$ 维线性子空间的精细模空间, 以及 n 维射影空间中 $n-m$ 维射影子空间的精细模空间。事实上 $\mathbb{G}_{n,m} \cong \mathbb{G}_{n,n-m+1}$。

2. 设 G 为诺特概形 S 上的有限群概形。证明存在 S 上的相对射影概形代表预层

((局部诺特 S-概形))$\to$((集合))

$$T \mapsto \{G \times_S T \text{ 的 } T\text{-平坦闭子群概形}\}$$

3. 设 $\mathcal{F}$ 为诺特整概形 S 上的凝聚层, 且在 S 的一个非空开子概形上是局部自由秩 n 的。证明存在相对射影双有理态射 $f : T \to S$ 使得 $f^*\mathcal{F}/(f^*\mathcal{F})_{\mathrm{tor}}$ 是 T 上的秩 n 局部自由层, 其中 $(f^*\mathcal{F})_{\mathrm{tor}}$ 是 $f^*\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{O}_T$-零因子组成的子层。

4. 设 S 为诺特整概形, $U \subset S$ 为稠密开子集, $s \in S$ 为闭点。证明存在整的包含 s 的 1 维闭子概形 $V \subset S$ 使得 $V \cap U \neq \emptyset$。

5. 证明例 3 中关于 χ_{Γ_f} 的断言。

6. 设 G 为诺特概形 S 上的相对射影平坦群概形。证明存在 S 上的局部拟射影概形代表预层

$$((\text{局部诺特 } S\text{-概形})) \to ((\text{群}))$$
$$T \mapsto \{G \times_S T \text{ 的 } T\text{-群概形自同构}\}$$

7. 设 S 为局部诺特概形, $X \to S$ 为相对射影概形, $\mathcal{L}$ 为 X 上的满足 $(*)$ 的可逆层, $U \subset \mathbb{P}_S(\mathcal{E}^\vee)$ 代表预层 $|\mathcal{L}/S|$。证明典范态射 $U \to \mathcal{H}ilb_{X/S}$ 是局部闭嵌入。

第 3 节　变形

1. 变形的基本概念

设 X 是域 k 上的一个代数簇, 一个 X 的*变形* (deformation) 是指一个有限型平坦态射 $\tau : \mathfrak{X} \to S$ 以及一个闭嵌入 $s : \operatorname{Spec} k \to S$, 使得 τ 和 s 的拉回同构于 X。直观地可以理解为“将 X 扩展成一族代数簇”。若 S 为 k-概形而 $\mathfrak{X} \cong X \times_k S$, 则称 $\mathfrak{X}$ 是 X 的平凡变形 (可以理解为“没有变形”)。

更一般地, 可将 X 换为代数几何中的其他对象, 如态射、交换图、群概形的作用等, 相应地将 τ 换为 S-态射、S 上的交换图、S-群概形的作用, 这样就可以谈态射的变形、交换图的变形、群概形作用的变形,

等等。

注 1. 对于变形的概念, 有下面几点值得注意:

i) 在定义中本不需要假设 τ 平坦, 但离开这个假设一般得不到有价值的结果; 另一方面, 更高的要求 (如光滑性) 一般并不需要, 所以平坦性是常见的基本假设。

ii) 像上面那样一般的 $\tau : \mathfrak{X} \to S$ 的纤维的变化没有什么限制, 这样的变形往往不能给出什么有价值的结果, 为此经常要对 τ 加一些限制, 例如当 X 为射影曲线时, 常要求 τ 为平坦相对射影 (相对维数为 1) 且具有几何整纤维; 当 X 为阿贝尔簇时, 常要求 τ 为阿贝尔概形, 等等。

iii) 一般可设 S 为连通的, 因为 s 只与 S 的一个连通分支有关, 其他连通分支对于变形没有意义。常考虑 $S = \mathrm{Spec}R$ 且 $\ker(s^* : R \to k)$ 为有限长的幂零理想的情形, 这样的变形称为*无穷小变形* (*infinitesimal deformation*)。

iv) 上面的对象都是在一个域 k 上的, 不难将此推广到一个一般的基概形 S_0 上, 即若 S_0 是 S 的闭子概形, 可以定义 S_0 上的代数几何对象在 S 上的变形, 而当 S 是 S_0 的无穷小扩张时称这个变形为无穷小变形。例如设 $\pi_0 : X_0 \to S_0$ 为有限型平坦态射, 则 π_0 在 S 上的一个变形是指一个有限型平坦态射 $\pi : X \to S$ 使得有 S_0-同构 $X \times_S S_0 \cong X_0$。

变形的概念在其他几何中也可以建立, 但只有代数几何中建立了无穷小变形理论。我们将看到无穷小变形是一个强大的工具。下面的引理是经常用到的 (参看 [H, Ex. Ⅲ.9.8])。

引理 1. 设 S 为诺特概形, $f : Y \to X$ 为有限型 S-概形的分离态射, $T = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t]/(t^2)$, $\tilde{Y} = Y \times T$, $i : Y \to \tilde{Y}$ 为嵌入。则 f 到 $\tilde{Y}$ 的一个变形 (即一个 S-态射 $\tilde{f} : \tilde{Y} \to X$ 使得 $\tilde{f} \circ i = f$) 典范等价于 f 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的一个提升; 在此等价之下 f 的平凡变形 $\mathrm{pr}_1 \circ (f \times \mathrm{id}_T)$ 对应于 f 与零截口 $X \to \mathbb{T}_{X/S}$ 的合成。特别地, 若 $s \in S$, $x \in X_s$, $k = \kappa(x)$, $T_0 = \mathrm{Spec}k[t]/(t^2)$ (看作 $\kappa(s)$-概形), 则 x 到 T_0 的一个变形等价于 $T_{X_s/\kappa(s),x}$ 的一个 k-点 (即 X_s 在 x 点处的一个定义在 k 上的切向量), 且在此等价之下 f 的平凡变形对应于零切向量。

证. 不难约化为 X 是仿射概形的情形, 故不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$, $X=\mathrm{Spec}A$。令 $B=\Gamma(Y,O_Y)$, 则 f 等价于一个 R-代数同态 $\phi=f^*:A\to B$ (参看 [H, Ex. Ⅱ.2.4])。记 $q:\tilde{Y}\to Y$ 为 $\mathbb{Z}$-代数同态 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[t]/(t^2)$ 诱导的态射。注意 $B'=B[t]/(t^2)\cong\Gamma(\tilde{Y},O_{\tilde{Y}})$, 可见一个 f 的变形 $\tilde{f}:\tilde{Y}\to X$ 等价于一个 R-代数同态 $\phi':A\to B'$ 使得 $i^*\circ\phi'=\phi$。记 $\phi_0=q^*\circ\phi:A\to B'$, 则 ϕ' 等价于一个 R-导数 $\phi'-\phi_0\in Der_R(A,tB)\cong Hom_A(\Omega^1_{A/R},B)$。由对称代数的泛性可见一个 A-模同态 $\Omega^1_{A/R}\to B$ 等价于一个 A-代数同态 $\mathrm{Sym}_A(\Omega^1_{A/R})\to B$, 而这又等价于一个 X-态射 $Y\to\mathbb{V}_X(\Omega^1_{A/R})=\mathbb{T}_{X/S}$, 即 f 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的一个提升。注意 ϕ_0 给出 f 的平凡变形, 而它对应的导数为 0。

特别地, 取 $Y=\{x\}$ 并将 x 看作一个态射 $\mathrm{Spec}k\to X$, 则可见 x 到 T 的一个变形 $\tau:T\to X$ 等价于 x 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的一个提升 $\zeta:\mathrm{Spec}k\to\mathbb{T}_{X/S}$, 而由 T 是 $\kappa(s)$-概形可见 τ 经过 X_s, 故 ζ 经过 $T_{X_s/\kappa(s),x}$。证毕。

变形的概念可以扩展到一般的预层上: 设 F 为 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层, 对于 $\mathfrak{Sch}_S$ 中的一个闭嵌入 $i:T_0\to T$ 及任意 $\xi\in F(T)$, 称 ξ 为 $\xi_0=F(i)(\xi)\in F(T_0)$ 对于 F 在 T 上的一个*变形*; 且当 i 为无穷小扩张时称之为*无穷小变形*。

如果对 $\mathfrak{Sch}_S$ 中的任意局部概形的无穷小扩张 $i:T_0\to T$, $F(i):F(T)\to F(T_0)$ 都是满射 (或单射、一一映射), 则称预层 F 是*光滑的* (或*无分歧的、平展的*)。

2. 变形与模空间

设 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层 F 具有精细模空间 X, 即有自然等价 $\Phi:F\to\underline{X}$。对任意 S-概形 T, 一个元 $\xi\in F(T)$ 等价于一个 S-态射 $\phi_\chi=\Phi(T)(\xi):T\to X$。设 $i:T_0\to T$ 为 S-概形的闭嵌入, 则任意 $\xi_0\in F(T_0)$ 在 T 上的一个变形等价于 $\phi_{\chi_0}:T_0\to X$ 在 T 上的一个扩张。这样由 X 就可以研究 ξ_0 的所有变形, 特别是无穷小变形。由定义立得

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层 F 具有精细模空间 X。则 F 是光滑的 (或无分歧的、平展的) 当且仅当 $X\to S$ 是光滑的 (或无分歧

的、平展的)。

而由引理 1 立得

推论 2. 设 S 为诺特概形, $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层 F 具有精细模空间 X, T 为有限型 S-概形而 $\tilde{T}=T\times_{\mathbb{Z}}\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t]/(t^2)$, $\xi\in F(T)$。则 ξ 在 $\tilde{T}$ 上的一个变形等价于 $\phi_X:T\to X$ 在 $\mathbb{T}_{X/S}$ 上的一个提升; 在此等价之下 ξ 的平凡变形 $F(q)(\xi)$ (其中 $q=\mathrm{pr}_1:\tilde{T}\to T$) 对应于 ϕ_X 与零截口 $X\to\mathbb{T}_{X/S}$ 的合成。

特别地, 若 $S=\mathrm{Spec}k$ (k 为域) 而 $T=\mathrm{Spec}k$, 则 ξ 在 $\tilde{T}$ 上的一个变形等价于 $T_{X/k,x}$ 中的一个 k-点 (即 X 在 x 点处的一个定义在 k 上的切向量), 且在此等价之下 ξ 的平凡变形对应于零切向量。

设 $S=\mathrm{Spec}k$ (k 为域), $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 F 具有精细模空间 X, 且 X 为局部有限型 k-概形。设 $\xi\in F(k)$ 对应于 (k-点) $x\in X$, 则对任一有限秩局部 (阿廷) k-代数 R 及满同态 $R\to k$, ξ 到 $\mathrm{Spec}R$ 上的一个变形等价于一个 k-态射 $\phi:\mathrm{Spec}R\to X$ 使得 $\mathrm{im}(\phi)=\{x\}$。令 $\mathcal{I}\subset O_X$ 为 x 的理想层, 则 ϕ 经过某个 $\mathcal{I}^n$ 定义的闭子概形。令 $\hat{X}$ 为 X 在点 x 处的形式完备化, 则 ϕ 经过 $\hat{X}$, 由此可见 $\hat{X}$ 给出所有上述无穷小变形的完整分类, 我们可以将 $\hat{X}$ 理解为"ξ 的无穷小变形的模空间"。

即使 F 没有精细模空间, 仍可能存在 ξ 的无穷小变形的模空间, 即 k 上的一个形式概形 $\hat{X}$ 使得对任意有秩局部 k-代数 R 及满同态 $R\to k$, ξ 到 $\mathrm{Spec}R$ 上的一个变形等价于一个 k-态射 $\mathrm{Spec}R\to\hat{X}$。对无穷小变形的分类已有很多深入的研究工作。

例 1. 设 C,C' 为域 k 上的光滑完备曲线, 亏格分别为 g,g', 若 $g\geqslant 2$ 则至多只有有限多个有限 k-态射 $C'\to C$, 这是函数域上的 Mordell 猜想的一种表述。

这一猜想是 Y. Manin, H. Grauert 和 P. Samuel 于 1964-66 年证明的 (参看 [G] 和 [Sam]), 主要部分是证明从 C' 到 C 的可分 k-态射的集合 $\mathrm{Mor}_k^{\mathrm{sep}}(C',C)$ 是有限集。我们下面来证明更强的断言: 存在只与 $g\geqslant 2$ 和 g' 有关的整数 $M(g,g')$, 使得对任意域 k 上亏格分别为 g,g' 的任意光

滑完备曲线 C, C' 均有

$$\#(\mathrm{Mor}_k^{\mathrm{sep}}(C', C)) \leqslant M(g, g') \tag{1}$$

(其中 $\mathrm{Mor}_k^{\mathrm{sep}}(C', C)$ 为从 C' 到 C 的可分 k-态射的集合)。

由定理 2.2.iii) 和例 2.2 可见存在亏格 $g\ (g')$ 的曲线的目录空间 $S\ (S')$, 其上的泛曲线 $\mathcal{C}\ (\mathcal{C}')$ 有一个截口 $S \to \mathcal{C}\ (S \to \mathcal{C}')$。令 $\tilde{S} = S \times S'$, 则 $\tilde{S}$ 上有曲线 $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times S'$ 和 $\tilde{\mathcal{C}}' = \mathcal{C}' \times S$。由例 2.3 可知从 $\tilde{\mathcal{C}}'$ 到 $\tilde{\mathcal{C}}$ 的一般光滑态射的模空间 $\mathcal{T} = \mathcal{M}or_{\tilde{S}}^{\mathrm{gs}}(\tilde{\mathcal{C}}', \tilde{\mathcal{C}})$ 为 $\tilde{S}$ 上的拟射影概形。我们来证明投射 $q : \mathcal{T} \to \tilde{S}$ 是无分歧的, 即 $\Omega^1_{\mathcal{T}/\tilde{S}} = 0$。注意对任意代数闭域 k 上的点 $s : \mathrm{Spec}k \to \tilde{S}$ 有 $\mathcal{T}_s \cong \mathcal{M}or_k^{\mathrm{gs}}(\tilde{\mathcal{C}}'_s, \tilde{\mathcal{C}}_s)$, 而 $\Omega^1_{\mathcal{T}/\tilde{S}} \otimes_{O_S} \kappa(s) \cong \Omega^1_{\mathcal{T}_s/k}$, 故只需证明对任意代数闭域 k 上的任意亏格分别为 g, g' 的光滑完备曲线 C, C', 概形 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{M}or_k^{\mathrm{gs}}(C', C)$ 在 k 上是无分歧的。

令 $T = \mathrm{Spec}k[x]/(x^2)$, $o : \mathrm{Spec}k \to T$ 为嵌入。设 k-点 $t : \mathrm{Spec}k \to \mathcal{T}_0$ 所对应的 k-态射为 $f : C' \to C$, 则由引理 1 可知一个 $T_{\mathcal{T}_0,t}$ 的元等价于 f 在 T 上的一个变形 $f' : C' \times_k T \to C \times_k T$, 而 f' 对应于 $T_{\mathcal{T}_0,t}$ 的零向量当且仅当 f' 为 f 的平凡变形。记

$$\alpha = (\mathrm{pr}_1 \circ f', f \circ \mathrm{pr}_1) : C' \times_k T \to C \times_k C \tag{2}$$

则有交换图

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{C'} \times_k o} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ C' \times_k T & \xrightarrow{\alpha} & C \times_k C \end{array} \tag{3}$$

令 $\mathcal{I}$ 为 Δ 的理想层, 注意 $\mathrm{id}_{C'} \times_k o$ 的理想层为 $xO_{C' \times_k T}$, 可见 α 诱导同态 $\alpha^*\mathcal{I} \to xO_{C' \times_k T}$, 再用 $(\mathrm{id}_{C'} \times_k o)^*$ 作用得同态

$$\alpha^* : f^*\Omega^1_{C/k} \to O_{C'} \tag{4}$$

我们用反证法来证明 $\alpha^* = 0$。注意 C' 是整的而 $f^*\Omega^1_{C/k}$ 是秩 1 局部自由的, 可见若 $\alpha^* \neq 0$ 则它是单射, 从而

$$H^0(C', f^*\Omega^1_{C/k}) \to H^0(C', O_{C'}) \cong k \tag{5}$$

是单射。另一方面有单射

$$H^0(C,\Omega^1_{C/k}) \hookrightarrow H^0(C,f_*f^*\Omega^1_{C/k}) \cong H^0(C',f^*\Omega^1_{C/k}) \tag{6}$$

从而 $\dim_k(C,H^0(\Omega^1_{C/k})) \leqslant 1$, 但由所设有 $\dim_k(C,H^0(\Omega^1_{C/k})) = g \geqslant 2$, 矛盾。由此得到 α 经过 Δ, 即 f' 为 f 的平凡变形, 从而对应于 $T_{\mathcal{T}_0,t}$ 的零向量。由 t 和 f' 的任意性有 $T_{\mathcal{T}_0,t}=0$ $(\forall t\in \mathcal{T}_0(k))$, 即 $\mathcal{T}_0$ 在 k 上是无分歧的。

由 q 无分歧可见它的纤维维数处处为 0, 再由 q 拟射影可见它拟有限的。由平坦分层 (见 2.2) 可见 q 的纤维次数只有有限多种可能。令 $M(g,g')$ 为 q 的最大纤维次数, 则由 S, S' 分别是亏格 g, g' 的曲线的目录空间可见, (1) 对任意域 k 上亏格分别为 g,g' 的任意光滑完备曲线 C,C' 均成立。

习题

1. 设 X 为域 k 上的代数簇, 定义 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 F 为 $T\mapsto \mathrm{Mor}_k(T,X)$。令 $T=\mathrm{Spec}k[t]/(t^2)$。证明对任意 k-点 $x\in X$ (看作 $F(\mathrm{Spec}k)$ 的一个元), 一个 x 对 F 在 T 上的变形等价于 $T_{X,x}$ 的一个 k-向量。

2. 设 S 为诺特概形, $f:Y\to X$ 为有限型 S-概形的 S-态射, $\tilde{Y}=Y\times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t]/(t^2)$。令 M 为 f 到 $\tilde{Y}$ 上的所有变形的集合。

i) 令 $R=\Gamma(X,O_X)$。验证 $\mathrm{Mor}_X(Y,\mathbb{T}_{X/S})$ 有一个典范的 R-模结构。(提示: R 典范同构于 $\mathrm{Mor}_X(X,\mathbb{A}^1_X)$ 的环结构。)

ii) 由引理 1 有典范一一映射 $M\to \mathrm{Mor}_X(Y,\mathbb{T}_{X/S})$, 给出 M 的相应的 R-模结构。

3. 设 S 为诺特概形, $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}'_1,\ldots,\mathcal{C}'_n$ 为 S 上的曲线, 使得 $\mathcal{C}_i$ 在 S 上的纤维都有亏格 $g_i\geqslant 2$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 且 $\mathcal{C}'_j$ 在 S 上的纤维都有亏格 g'_j $(1\leqslant j\leqslant n)$。令 $X=\mathcal{C}_1\times_S\cdots\times_S\mathcal{C}_m$, $Y=\mathcal{C}'_1\times_S\cdots\times_S\mathcal{C}'_n$。证明下列断言 (记号如例 1)。

i) 存在拟有限无分歧 S-概形 $\mathcal{T}$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T\mapsto\{\text{一般光滑 } T\text{-态射 } f:T\times_S Y\to T\times_S X\}$$

ii) 若 $S=\mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 则任意一般光滑 k-态射 $f:Y\to X$ 可以分解为曲线态射的积, 详言之存在单射 $\lambda:\{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,n\}$ 及 m 个有限可分 k-态射 $f_i:\mathcal{C}'_{\lambda(i)}\to\mathcal{C}_i$ 使得 $f(x_1,...,x_n)=(f_1(x_{\lambda(1)}),...,f_m(x_{\lambda(m)}))$。

iii) 令 I 为从 $\{1,2,...,m\}$ 到 $\{1,2,...,n\}$ 的所有单射组成的集合。若 $S=\mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 则

$$\#\{\text{一般光滑 } k\text{-态射 } Y\to X\}\leqslant\sum_{\lambda\in I}\prod_{i=1}^{m}M(g_i,g'_{\lambda(i)})$$

iv) 设 $S=\mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 令 $K=k(Y)$ (Y 的函数域), 则

$$\#\{X\text{ 在 } k \text{ 上的光滑 } K\text{-点}\}\leqslant\sum_{\lambda\in I}\prod_{i=1}^{m}M(g_i,g'_{\lambda(i)})$$

第 V 章 商与推出

第 1 节 商与推出的基本概念

1. 范畴商与范畴推出

在各种几何中都需要用到商空间，因此商空间的存在性和构造方法是重要的基本问题，也是一个困难的障碍 (因为经常不存在)。推出是比商更广泛的一个概念，也有很重要的作用。

设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴，$f: X \to T$ 和 $g: Y \to T$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的两个态射。若存在 $\mathfrak{C}$ 的对象 Z 及态射 $p: Z \to X$, $q: Z \to Y$ 满足

a) 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array} \tag{1}$$

b) 若有另一个对象 Z' 及态射 $p': Z' \to X$, $q': Z' \to Y$ 使得 $f \circ p' = g \circ q'$，则存在唯一态射 $\phi: Z' \to Z$ 使得 $p' = p \circ \phi$ and $q' = q \circ \phi$,

则称 Z (或 (1)，或 (Z, p, q)) 为 f 和 g 在 $\mathfrak{C}$ 中的一个 (范畴) **拉回** (*pull-back*) 或**纤维积** (*fibred product*)，记为 $X \times_T Y$ (更准确的记号是 $X\, {}_f\!\times_g Y$)，且记 $\mathrm{pr}_1 = p$, $\mathrm{pr}_2 = q$，分别称为第一和第二投射。

用预层的语言可以这样理解 (参看 I.2.4)：定义预层 $F: \mathfrak{C} \to ((\mathrm{sets}))$ 为将任一 $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 映到所有下面这样的交换图的集合：

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{p'} & X \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

若 F 由 Z (或 (1)，或 (Z, p, q)) 代表，则称 Z 为 f 和 g 的拉回，故由抽象废话可知拉回若存在则在唯一同构下唯一。条件 a) 和 b) 可以理解为一个自然等价

$$\underline{Z} \cong \underline{X}\, {}_f\!\times_g \underline{Y} \tag{2}$$

即一个态射 $Z' \to Z$ 等价于两个态射 $p' : Z' \to X$, $q' : Z' \to Y$ 使得 $f \circ p' = g \circ q'$。故我们可以将纤维积的定义重述为:

$$\underline{X \times_T Y} = \underline{X_f \times_g Y} \cong \underline{X}_{\underline{f}} \times_{\underline{g}} \underline{Y} = \underline{X} \times_{\underline{T}} \underline{Y} \tag{3}$$

在许多文献中还经常使用这样的记号: 设 $x \in \mathrm{Mor}(S, X)$ 和 $y \in \mathrm{Mor}(S, Y)$ 满足 $f \circ x = g \circ y$, 则记 $(x, y) \in \mathrm{Mor}(S, X \times_T Y)$ 为对应于 $(x, y) \in \mathrm{Mor}(S, X) \times \mathrm{Mor}(S, T)$ 的态射; 对任意态射 $\phi : X \to X'$ 及 $x \in \mathrm{Mor}(S, X)$, 记 $\phi(x) = \phi \circ x$。

事实上, 在各种几何 (拓扑学、微分几何、复几何、代数几何、算术几何等) 中纤维积总是存在的, 相应的范畴称为有纤维积的范畴。

若范畴 $\mathfrak{C}$ 有积 (或有纤维积), 则对任意对象 X (态射 $X \to S$) 可定义 “对角态射” $\Delta : X \to X \times X$ ($X \to X \times_S X$)。若范畴 $\mathfrak{C}$ 有积和纤维积, 对任意两个态射 $p, q : X \to S$, 令 Z 为 $(p, q) : X \to S \times S$ 和 $\Delta : S \to S \times S$ 的拉回, 则投射 $i : Z \to X$ 满足 $p \circ i = q \circ i$; 且任一态射 $i' : Z' \to X$ 若满足 $p \circ i' = q \circ i'$, 则有唯一态射 $\phi : Z' \to Z$ 使得 $i' = i \circ \phi$。我们称 Z (或 (Z, i)) 为 p 和 q 的余等化子。

推出是拉回的对偶概念。

定义 1. 设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴, $p : Z \to X$ 和 $q : Z \to Y$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的两个态射。若存在 $\mathfrak{C}$ 的对象 T 及态射 $f : X \to T$, $g : Y \to T$ 满足

a) 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array} \tag{4}$$

b) 若有另一个对象 T' 及态射 $f' : X \to T'$, $g' : Y \to T'$ 使得

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow{g'} & T' \end{array} \tag{5}$$

交换, 则存在唯一态射 $\psi : T \to T'$ 使得 $f' = \psi \circ f$, $g' = \psi \circ g$,

则称 T (或 (4), 或 (T,f,g)) 为 p 和 q 在 $\mathfrak{C}$ 中的一个 (范畴) **推出** (*push-out*)。

若 $\mathfrak{C}$ 为有纤维积的范畴, 一个推出 (4) 称作**几何的** (*geometric*), 如果诱导态射 $Z \to X \times_T Y$ 是满射; 称作**泛的** (*universal*), 如果对任意态射 $T' \to T$, 下图也是推出

$$\begin{array}{ccc} Z \times_T T' & \xrightarrow{p \times_T \mathrm{id}_{T'}} & X \times_T T' \\ {\scriptstyle q \times_T \mathrm{id}_{T'}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ Y \times_T T' & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & T' \end{array} \tag{6}$$

对 $\mathfrak{C}$ 中的推出当然可以理解为 $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ 中的拉回, 故推出若存在则在唯一同构下唯一。但是, 在各种几何中推出一般都不是总存在的, 而且即使存在也可能与所选择的范畴有关 (见下面的例子)。

例 1. 设 $\mathfrak{C}$ 为集合范畴, 我们来说明推出总是存在的。

设 $p : Z \to X$ 和 $q : Z \to Y$ 为集合的映射。令 $W = X \coprod Y$, 并记 $p' : Z \to W$ 和 $q' : Z \to W$ 分别为 p 和 q 诱导的映射。在 W 中定义一个关系 $\sim$ 如下: 对任意 $w, w' \in W$, $w \sim w'$ 当且仅当存在有限多个元 $z_1, ..., z_n \in Z$, 使得 $p'(z_1) = w$ 或 $q'(z_1) = w$, $p'(z_n) = w'$ 或 $q'(z_n) = w'$, 且对任意 $i < n$ 有 $p'(z_i) = p'(z_{i+1})$ 或 $q'(z_i) = q'(z_{i+1})$。不难验证 $\sim$ 是一个等价关系。令 $T = W/\sim$, 则易见 T 是 p 和 q 的一个推出。

易见有下列事实 (习题 1)。

引理 1. 设 (4) 为范畴 $\mathfrak{C}$ 中的推出。

i) 若 $\psi : Z' \to Z$ 为满态射, 则

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{p \circ \psi} & X \\ {\scriptstyle q \circ \psi} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array} \tag{7}$$

也是推出。

ii) 若 f 和 g 在 $\mathfrak{C}$ 中有拉回 (即纤维积 $X\times_T Y$), 则下图

$$\begin{array}{ccc} X\times_T Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array} \tag{8}$$

也是推出 (故为几何推出)。

引理 2. 设 $\mathfrak{C}$ 是有积和纤维积的范畴, (4) 为范畴 $\mathfrak{C}$ 中的推出, 同时又是拉回, 即 $Z\xrightarrow{\simeq}X\times_T Y$, 则

$$Z\times_X Z\times_Y Z=Z\times_Y Z\times_X Z\hookrightarrow X\times X\times Y\times Y \tag{9}$$

其中 $Z\times_X Z\times_Y Z\to X\times X\times Y\times Y$ 由 $((x,y),(x,y'),(x',y'))\mapsto(x,x',y,y')$ 给出, 而 $Z\times_Y Z\times_X Z\to X\times X\times Y\times Y$ 由 $((x,y),(x',y),(x',y'))\mapsto(x,x',y,y')$ 给出 ($Z\times_X Z\times_Y Z$ 和 $Z\times_Y Z\times_X Z$ 均可看作 $X\times X\times Y\times Y$ 的子对象, 而 (9) 中的等号是指作为子对象相等)。

这是因为 $Z\times_X Z\times_Y Z$ 和 $Z\times_Y Z\times_X Z$ 在 $X\times X\times Y\times Y$ 中都等于 $X\times_T X\times_T Y\times_T Y$。用预层的语言可将 (9) 表述为: 对任意对象 U 及任意 $x,x'\in\underline{X}(U)$ 和 $y,y'\in\underline{Y}(U)$, 若 $(x,y),(x,y'),(x',y')\in\underline{Z}(U)$, 则 $(x',y)\in\underline{Z}(U)$。

在一般情形, (9) 是几何推出存在的基本条件, 我们将看到在很多情形它几乎也是充分条件。

定义 2. 设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴, $f,g:Z\to X$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的两个态射。若存在 $\mathfrak{C}$ 的对象 T 及态射 $q:X\to T$ 满足

a) $q\circ f=q\circ g$;

b) 若有另一个对象 T' 及态射 $q':X\to T'$ 使得 $q'\circ f=q'\circ g$, 则存在唯一态射 $\psi:T\to T'$ 使得 $q'=\psi\circ q$,

则称 T (或 (T,q)) 为 f 和 g 在 $\mathfrak{C}$ 中的一个*等化子* (equalizer)。若 $\mathfrak{C}$ 为有纤维积的范畴, 上面的等化子 T 称作*几何的* (geometric), 如果诱导态射 $Z\to X\times_T X$ 是满射; 称作*泛的* (universal), 如果对任意态射 $T'\to T$, $f\times_T\mathrm{id}_{T'}$ 和 $g\times_T\mathrm{id}_{T'}:Z\times_T T'\to X\times_T T'$ 有等化子 T'。

由抽象废话可见等化子若存在则在唯一同构下唯一。在各种几何中等化子一般也都不是总存在的。

定义 3. 设范畴 $\mathfrak{C}$ 有积和纤维积, $X \to S$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的态射。一个 X 在 S 上的等价关系 (*equivalence relation*) 是指一个单射 $\epsilon : W \hookrightarrow X \times_S X$, 满足条件

i) ("自反性") 对角态射 $\Delta : X \to X \times_S X$ 经过 W;

ii) ("对称性") 令态射 $\iota : X \times_S X \to X \times_S X$ 为 $(x, y) \mapsto (y, x)$, 则 $\iota \circ \epsilon : W \to X \times_S X$ 经过 ϵ;

iii) ("传递性") 令 W_{ij} $(i, j = 1$ 或 $2)$ 为 $\mathrm{pr}_i : W \to X$ 与 $\mathrm{pr}_j : W \to X$ 的拉回, 则诱导的 $W_{22} \to X \times_S X \times_S X$ 为单射, 且经过 W_{12}。

此时如果 $\mathrm{pr}_1 \circ \epsilon$ 和 $\mathrm{pr}_2 \circ \epsilon : W \to X$ 在 S 上有一个等化子 $p : X \to Y$, 则称 Y (或 p) 为 W 的范畴商 (*categorical quotient*), 记为 $Y = X/W$。此外若这个等化子是几何的 (或泛的), 则称 Y (或 p) 为 W 的几何商 (或泛商)。

注 1. 对于等价关系和商的概念有下面几点值得注意:

i) 定义 3 中的条件 ii) 说明有态射 $\mu : W \to W$ 使得 $\iota \circ \epsilon = \epsilon \circ \mu$, 从而有 $\epsilon = \iota \circ \epsilon \circ \mu = \epsilon \circ \mu^2$; 由 ϵ 为单射有 $\mu^2 = \mathrm{id}_W$, 从而 μ 为自同构。由此及条件 iii) 可见诱导的 $W_{12} \to X \times_S X \times_S X$ 为单射且经过 W_{22}, 从而 $W_{22} \to W_{12}$ 为 $X \times_S X \times_S X$ 上的同构。不难看出 W_{11} 和 W_{21} 也都在 $X \times_S X \times_S X$ 上和 W_{22} 同构。

经常遇到的情形是 ϵ 为闭嵌入, 此时 $W_{22} \to X \times_S X \times_S X$ 为闭嵌入。

ii) 若 W 有等化子 $p : X \to Y$, 则 Y 是 $\mathrm{pr}_1 \circ \epsilon$ 和 $\mathrm{pr}_2 \circ \epsilon$ 的推出, 这是因为若 $p', q' : X \to Y'$ 满足 $p' \circ \mathrm{pr}_1 \circ \epsilon = q' \circ \mathrm{pr}_2 \circ \epsilon$, 则由条件 i) 可得 $p' = q'$; 反之, 若 $\mathrm{pr}_1 \circ \epsilon$ 和 $\mathrm{pr}_2 \circ \epsilon$ 有推出, 则由条件 i) 可见推出是等化子。因此在定义 3 中"等化子"可以改为"推出"。

iii) 如同推出和等化子, 在各种几何中一个等价关系未必有商, 而且即使有商也可能与所取的范畴有关。

注 2. 定义 3 中的“等价关系”可以推广为“群胚”（参看 [S3.I, p.255]），基本上是去掉 ϵ 为单射的条件。群胚的“商”仍可定义为推出，从而仍为推出的特殊情形。为简单起见我们下面只采用等价关系而不采用一般的群胚。

例 2. 设 X 为 1 维复射影空间，看作复流形 $\mathbb{C}$ 的紧致化。则易见 $W = (\mathbb{C}\times\mathbb{C})\cup\Delta(X)\subset X\times X$ 定义一个等价关系，其中所有非无穷远点相互等价，而无穷远点仅与自己等价。易见在集合范畴中有商 $S = X/W = \{a,b\}$，其中 a 为所有非无穷远点的等价类，b 为无穷远点的等价类。在拓扑空间范畴中也有商空间 $S = X/W$，这里 S 的拓扑由 3 个开集 $\emptyset$, S 和 $\{a\}$ 组成（b 在 $\{a\}$ 的闭包中），这个拓扑连 T_0 公理都不满足。由此可见在微分几何、复几何与代数几何中都不存在几何商 X/W。

在微分几何与复几何中，一种构造商空间的方法是将商空间局部转化为子空间。由下面的例子可以看到这种方法的原理。

例 3. 设 G 为（实或复）李群，$H\subset G$ 为李子群，则左陪集的集合 G/H 具有唯一解析流形结构使得投射 $G\to G/H$ 为态射。若 H 为正规李子群，则 G/H 具有李群结构且投射 $G\to G/H$ 为同态。

我们来证明这个事实。记 $m: G\times G\to G$ 为 G 的乘法态射，$\iota: G\to G$ 为态射 $g\mapsto g^{-1}$，$T_g: G\to G$ 为 $g\in G$ 给出的左平移。设 $n=\dim G$, $r=\dim H$。任取包含 e 的 $n-r$ 维解析子流形 $M\subset G$ 使得 $T_{M,e}+T_{H,e}=T_{G,e}$。由微分学，适当选取 M 及 e 在 H 中的开邻域 V 可使 m 在 $M\times V$ 上的限制给出 $M\times V$ 与 G 的一个开子流形的同构。取 e 在 $m(M\times V)$ 中的开邻域 U 使得 $U\cap H\subset V$，再取 e 的开邻域 $M'\subset M$ 使得 $m(M'\times M')\subset U$ 且 $\iota(M')=M'$，则投射 $p: G\to G/H$ 在 M' 上的限制是单射，这是因为对任意 $x,y\in M'$，若 $y\in xH$，则 $h=x^{-1}y\in U\cap H\subset V$，由 $m|_{M\times V}$ 是单射及 $y=xh$ 即得 $x=y$。记 $W=m(M'\times V)$。对任意 $g\in G$，由于 T_g 是同构且诱导 G/H 到自身的一一映射，可见 p 在 gM' 上的限制是单射。

定义 G/H 的拓扑为 p 的商拓扑，即一个子集 $T\subset G/H$ 为开集当且仅当 $p^{-1}(T)$ 为开集。易见 $p(M')$ 为开集，因为显然 $p^{-1}(p(M'))=\bigcup\limits_{h\in H} Wh$,

而每个 Wh 是 G 的开子集。故对任意 $g \in G$, $p(gM')$ 为开集, 而所有 $p(gM')$ 组成 G/H 的一个开覆盖。由此不难验证 G/H 按这个拓扑为满足第二可数性公理的豪斯道夫空间。对任意 $g \in G$, 一一映射 $gM' \to p(gM')$ 给出 $p(gM')$ 一个解析流形结构, 而对任意 $g, g' \in G$, $p(gM')$ 和 $p(g'M')$ 的解析流形结构在 $p(gM') \cap p(g'M')$ 上是一致的, 因为它们都与 $p^{-1}(p(gM')) \cap p^{-1}(p(g'M')) \subset G$ 的流形结构相容。因此, 所有 $p(gM')$ 的诱导解析流形结构合起来就给出 G/H 一个解析流形结构。注意 p 在 $M' \times V$ 上的限制等于 $\mathrm{pr}_1 : M' \times V \to M'$ 和 $M' \to p(M')$ 的合成, 故为解析映射, 由此及 m 的解析性即得 p 在每个 $p^{-1}(p(gM'))$ 上的限制为解析映射, 从而为解析映射。注意若要使 p 为解析映射, 则 G/H 的解析结构只能如上定义, 因为易见 p 必为光滑的, 从而 $M' \to p(M')$ 必为解析同构。这就说明了 G/H 的解析结构的唯一性。

若 H 是 G 的正规李子群, 则 $G' = G/H$ 具诱导的有群结构, 我们需要验证其群运算 ($m_{G'}$ 和 $\iota_{G'}$) 都是解析映射。令 $\alpha : G \times G \to G \times G$ 为映射 $(g_1, g_2) \mapsto (g_1 g_2^{-1}, g_2)$, 易见 α 是 $G \times G$ 作为解析流形的自同构。类似地定义 $\alpha' : G' \times G' \to G' \times G'$, 它是一一映射。我们有 (集合论的) 交换图

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\alpha} & G \times G \\ \downarrow{\scriptstyle p\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p\times p} \\ G' \times G' & \xrightarrow{\alpha'} & G' \times G' \end{array} \tag{10}$$

由此可见 α' 是同胚。令 $O_{G' \times G'}$ 为 $G' \times G'$ 的解析函数层, 则 $\alpha'^* O_{G' \times G'}$ 给出 $G' \times G'$ 的另一个解析流形结构。注意作为集合 $G' \times G'$ 可以看作 $(G \times G)/(H \times H)$, 而由 (10) 可见 $p \times p$ 给出态射 $(G \times G, O_{G \times G}) \to (G' \times G', \alpha'^* O_{G' \times G'})$, 故由 $(G \times G)/(H \times H)$ 的解析流形结构的唯一性有 $\alpha'^* O_{G' \times G'} = O_{G' \times G'}$, 即 α' 是解析同构。由此立得 G' 的群运算都是解析映射。

这种方法在代数几何中也有应用, 但可以应用的情形不多。

2. 概形范畴中的商与推出

我们下面考虑 $\mathfrak{C} = \mathfrak{Sch}$ 或其子范畴的情形。

对于一个一般的预层 F 的模空间的构造，一个基本方法是：先构造 F 的一个目录空间 S，如果两个点 $s,s'\in S$ 所对应的 F 的截口等价，我们记 $s\sim s'$，直观上这样就建立了 S 上的一个等价关系 $\sim$ (当然需要几何化)，如果商 $S/\sim$ 存在，则可以希望它就是 F 的粗糙模空间。

为方便起见我们使用下列 (非标准) 术语。一个态射 $f:X\to Y$ 称为*强满射*，如果 f 是集合论意义下的满射且 $f^{\#}:O_Y\to f_*O_X$ 为单射。例如忠实平坦态射都是强满射。易见强满射是范畴意义下的满射 (但反之不然)。一般说来一个态射 $f:X\to Y$ 作为集合映射的像不一定具有子概形结构，但 $f^{\#}$ 的核是 O_Y 的理想层，它定义的闭子概形 $V\subset Y$ 称为 f 的*像闭包* (作为拓扑空间它是 $f(X)\subset Y$ 的闭包)，记为 $\overline{\mathrm{im}(f)}$。若 f 是紧的，易见 $X\to\overline{\mathrm{im}(f)}$ 是强满射，故可称 $\overline{\mathrm{im}(f)}$ 为 f 的*像*，并记为 $\mathrm{im}(f)$。此外，若 f 是诺特概形的有限型平坦态射，则 $U=f(X)\subset Y$ 是开集，且 $f^{\#}$ 在 U 上的限制是单射，故也可以将 U 的开子概形结构称为 f 的像并记为 $\mathrm{im}(f)$。称 f 是*支配的* (*dominant*)，如果 $\overline{\mathrm{im}(f)}=Y$ (参看 [H, Ex. Ⅱ.3.7])。显然忠实平坦态射都是支配的，且支配态射是范畴意义下的满射。一个 S-概形的 S-态射 $f:X\to Y$ 称为 *S-支配的*，如果对任意态射 $T\to S$，$f\times_S\mathrm{id}_T:X\times_S T\to Y\times_S T$ 是支配的。例如，若 S 是诺特概形，$X\to S$ 为有限型忠实平坦态射，$D\subset X$ 为 S-有效除子，则嵌入 $X-D\hookrightarrow X$ 为 S-支配的 (习题 2)。

定义 4. 设 $\mathfrak{C}$ 为 $\mathfrak{Sch}$ 或其子范畴，$p:Z\to X$ 和 $q:Z\to Y$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的两个态射。如果推出

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & T \end{array} \tag{1}$$

存在且 $Z\to X\times_T Y$ 是强满射 (或 T-支配的)，则称其为*几何推出* (或*弱几何推出*)。如果 $X=Y$，p 和 q 有等化子 $t:X\to T$ 且 $Z\to X\times_T X$ 是强满射 (或 T-支配的)，则称 T (或 t) 为 p 和 q 的一个*几何等化子* (或*弱几何等化子*)。

设 $\mathfrak{C}$ 有终止对象 S，局部闭子概形 $W\subset X\times_S X$ 定义 X 上的一个等价关系。如果存在商 $T=X/W$ 且 $W\to X\times_T X$ 是强满射 (或 T-支配的)，则称 T 为*几何商* (或*弱几何商*)。

注意这与定义 1, 2, 3 有所不同。(注: 上述几何商的定义与 [M3] 中的有所不同, 但实际上在应用中经常是等价的。)

例 4. 设 $G \to S$ 为群概形, $X \to S$ 为概形, $\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的一个作用。如果 ρ 和 $\mathrm{pr}_2 : G \times_S X \to X$ 有等化子 $p : X \to Y$, 则称 Y (或 p) 为 ρ 的一个*范畴商*, 并记 $Y = X/\rho$ (在没有疑问时也可记 $Y = X/G$); 此时若 Y 是几何等化子 (或弱几何等化子) 则称 Y 为 ρ 的*几何商* (或*弱几何商*); 若 Y 是泛等化子则称 Y 为 ρ 的*泛商*。

注意 $o \times_S \mathrm{id}_X : X \to G \times_S X$ 与 ρ 和 pr_2 的合成均等于 id_X, 由注 1.ii) 可见 X/ρ 也可以定义为推出。由定义可见 $Y = X/\rho$ 为几何商 (或弱几何商) 当且仅当 $\alpha = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_S X \to X \times_Y X$ 是强满射 (或 Y-支配的); 此时若 ρ 是自由作用则 α 是同构。

例 5. 设 k 为域而 $X = \mathbb{A}_k^2 - \{(0,0)\}$。在 $X \times_k X$ 中, 令 x, y 与 x', y' 分别为第一、第二个 X 的拷贝的坐标。令 $W \subset X \times_k X$ 为两个闭子概形 $\{x = x', y = y'\}$ 与 $\{x = x' = 0\}$ 的并。不难验证 W 给出 X 上的一个等价关系。但在概形范畴中不存在商 X/W。为证明这一点, 令 $R = k[x, xy^r | r = 1, 2, ...]$ (这不是诺特环), $Y' = \mathrm{Spec} R$, $f : X \to Y'$ 为包含同态 $R \hookrightarrow k[x, y]$ 所诱导的态射, $g : Y' \to \mathbb{A}_k^2$ 为包含同态 $k[x, xy] \subset R$ 所诱导的态射 (注意 g 诱导 Y' 到 $g(Y') = g(f(X))$ 的拓扑同构)。不难验证 $X \to Y'$ 等化 pr_1 与 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$。假设存在商 $Y = X/W$, 则 f 经过 Y, 不难通过逐点局部计算验证 $Y \to Y'$ 是同构。另一方面, $(x, y) \mapsto (x : y)$ 所定义的态射 $X \to \mathbb{P}_k^1$ 也等化 pr_1 与 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$, 故有诱导态射 $\phi : Y \to \mathbb{P}_k^1$ 将 $f(x, y)$ 映到 $(x : y)$。这样对任一点 $P \in \mathbb{P}_k^1$ 都有 $(0, 0) \in \phi^{-1}(P)$, 这是荒谬的。事实上我们证明了 pr_1 与 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$ 没有推出。

例 6. 设 ρ 为 $G = SO_2(\mathbb{C})$ 在 $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x, y]$ 上的作用。令 W 为 $\alpha = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_{\mathbb{C}} X \to X \times_{\mathbb{C}} X$ 的像, 而 $p : X \to Y = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ 为由 $\mathbb{C}[x^2 + y^2] \subset \mathbb{C}[x, y]$ 诱导的态射。不难验证 Y 是 W 的范畴商但不是几何商 (p 将三个 ρ-轨迹 $\{x = \sqrt{-1}y\}$, $\{x = -\sqrt{-1}y\}$ 与 $\{(0, 0)\}$ 映到同一个点)。事实上 W 没有几何商 (因为几何商一定同构于范畴商)。

设 $X' = X - \{(0, 0)\}$, 且为简单起见把 W 在 X' 上的限制仍记为 W。

令 $U_1, U_2 \subset X$ 分别为开子概形 $\{x \neq \sqrt{-1}y\}$, $\{x \neq -\sqrt{-1}y\}$。由下面的命题 1 不难验证 $U_1/W \cong Y$, $U_2/W \cong Y$, 且都是几何商。从而存在几何商 X'/W, 它同构于双重原点的仿射直线 (参看 [H, Example Ⅱ.2.3.6])。注意这是 $\mathbb{C}$ 上不分离的概形, 且 W 不是 $X \times_{\mathbb{C}} X$ 的闭子概形 (参看引理 1)。

注意对任意态射 $X \to T$, $Y \to T$ 及 $T \to S$, 若 $T \to S$ 是分离的, 则 $X \times_T Y$ 是 $X \times_S Y$ 的闭子概形。故若 $W \subset X \times_S Y$ 不是闭子概形而 $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to Y$ 具有几何推出 T, 则 T 在 S 上不是分离的。若将上面的 G 换为 $G' = O_2(\mathbb{C})$, 则易见 W 换为其闭包, 而有几何商 $X'/G' \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, 不再出现不分离的商。

3. 推出的一个判别准则

以下我们考虑概形的范畴或其子范畴, 除非特别说明。

命题 1. 设 S 为诺特概形, $f : X \to S$ 与 $g : Y \to S$ 为有限型态射, 其中 g 是忠实平坦的而 f 是强满射。记 $p : X \times_S Y \to X$ 和 $q : X \times_S Y \to Y$ 为投射。则 S 是 p 和 q 的几何推出, 且当 f 也平坦时是泛推出。

证. 设 $f' : X \to S'$ 与 $g' : Y \to S'$ 为态射使得 $f' \circ p = g' \circ q$。对任意 $y \in Y$, 令 $s = g(y)$, 则存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = s$ (因 f 为满射)。对任意 $y' \in g^{-1}(s)$, 存在 $z \in X \times_S Y$ 使得 $p(z) = x$, $q(z) = y'$, 故 g' 将所有 $g^{-1}(s)$ 中的点映到同一点 $s' = g'(y) \in S'$; 类似地 f' 将所有 $f^{-1}(s)$ 的点映到 s'。故存在唯一集合映射 $\phi : S \to S'$ 满足集合论等式 $\phi \circ g = g'$ 与 $\phi \circ f = f'$。因 g 是 (拓扑空间的) 开映射, 可见 ϕ 是拓扑空间的连续映射。

设 $U' = \mathrm{Spec} R' \subset S'$ 为仿射开子概形。对任意 $s \in \phi^{-1}(U')$ 及任意 $y \in g^{-1}(s)$, 存在 s 的仿射开邻域 $U = \mathrm{Spec} R \subset \phi^{-1}(U')$ 及 y 的仿射开邻域 $W = \mathrm{Spec} B \subset g^{-1}(U)$ 使得 $g(W) = U$。注意 B 在 R 上忠实平坦, 换言之 $g^* : R \to B$ 为单射且 $M = B/g^*(R)$ 为平坦 R-模。令 $V = f^{-1}(U)$ 而 $A = O_X(V)$, 则 $f^* : R \to A$ 为单射, 因为 f 是强满射。由 $R \to B$ 平

坦可见 $O_{X\times_S Y}(V\times_S W)\cong A\otimes_R B$。故有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to R & \xrightarrow{g^*} & B & \xrightarrow{\lambda} & M & \to 0 \\ \downarrow f^* & & \downarrow q^* & & \downarrow \eta & \\ 0\to A & \xrightarrow{p^*} & A\otimes_R B & \xrightarrow{\mu} & A\otimes_R M & \to 0 \end{array} \tag{1}$$

其中的行都是正合的。因 η 是单射且

$$\eta\circ\lambda\circ g'^*=\mu\circ q^*\circ g'^*=\mu\circ p^*\circ f'^*=0:R'\to A\otimes_R M \tag{2}$$

我们有 $\lambda\circ g'^*=0:R'\to M$，故存在 (唯一) 诱导同态 $\phi^*:R'\to R$ 使得 $f^*\circ\phi^*=f'^*$，$g^*\circ\phi^*=g'^*$。由此可将 ϕ 定义为态射，且有态射的等式 $\phi\circ g=g'$，$\phi\circ g=g'$。

最后一个断言成立是因为忠实平坦性在基变换下保持。证毕。

例 7. 设 S 为诺特概形，X 为有限型 S-概形，G 为 S 上的有限型平坦群概形，ρ 为 G 在 X 上的一个作用。若 ρ 有几何商 X/G 且商是 S 的局部闭子概形，则由定义 ρ 是可迁的；另一方面，若 $X\to S$ 是忠实平坦的且 ρ 是可迁的，则由命题 1 及引理 1 可见有几何商 $X/G\cong S$。

下面的推论可以看作引理 I.1.6 的细化。

推论 1. 设 $f:X\to Y$ 为诺特概形的有限平展覆盖 (即满态射)，其中 Y 是连通的，则存在有限平展覆盖 $X'\to X$ 及一个有限群 G 在 X' 上的自由作用，使得有泛几何商 $X'/G\cong Y$，且有一个子群 $H\subset G$ 使得有泛几何商 $X'/H\cong X$。此外，$X'\times_Y X'$ 和 $X'\times_X X'$ 都是 X' 的拷贝的无交并。

证. 由 Y 连通可见 f 的纤维次数处处相等。不妨设 $d=\deg(f)>1$。对任意 $n\geqslant 0$ 令 $X_n=X\times_Y\overset{n}{\cdots}\times_Y X$，并令 $\phi_n=\Delta\times_Y \mathrm{id}_{X_n}:X_{n+1}\to X_{n+2}$，则 ϕ_n 是既开又闭的嵌入 (参看引理 I.1.6 的证明)。显然有一个 $G=\mathfrak{S}_d$ 在 X_d 上的 (置换因子) 作用，对任意 $\sigma\in G$ 记其在 X_d 上的作用为 g_σ。令

$$X'=X_d-\bigcup_{\sigma\in G} g_\sigma(\phi_{d-2}(X_{d-1})) \tag{3}$$

则 X' 是 X_d 中的既开又闭的子概形，且有 G 在 X' 上的诱导作用。令 $p: X' \to Y$ 为投射，$q = \mathrm{pr}_1 : X' \to X$。注意一个截口 $(x_1, ..., x_d) \in \underline{X_d}(T)$ $(x_1, ..., x_d \in \underline{X}(T))$ 在 $\underline{X'}(T)$ 中当且仅当 $x_i \neq x_j$ $(\forall i \neq j)$。对任一代数闭域 k 及任意 $y \in Y(k)$，由 f 平展可见 $f^{-1}(y)$ 由 d 个互不相同的点 $x_1, ..., x_d \in \underline{X}(k)$ 组成，故

$$p^{-1}(y) = \{(x_{\sigma 1}, ..., x_{\sigma d}) | \forall \sigma \in G\} \tag{4}$$

由此可见

$$\deg(p) = d! \tag{5}$$

令 $Z = X' \times_Y X'$，则对任一 $\sigma \in G$ 有闭嵌入 $i_\sigma = (g_\sigma, \mathrm{id}_{X'}) X' \to X' \times_Y X'$，而由 (4) 可见 $Z_\sigma = i_\sigma(X')$ $(\forall \sigma \in G)$ 互不相交，故由 (5) 可见

$$X' \times_Y X' = \coprod_{\sigma \in G} Z_\sigma \cong G \times X' \tag{6}$$

其中每个 $Z_\sigma \cong X'$，而任意 $\tau \in G$ 在 $X' \times_Y X'$ 上的作用将 Z_σ 映到 $Z_{\tau\circ\sigma}$。令 $Z' = X \times_Y X'$，则对每个 $\sigma \in G$，$Z'_\sigma = (q \times_Y \mathrm{id}_{X'})(Z_\sigma) \subset Z'$ 是既开又闭的子概形，且由 $p \times_Y \mathrm{id}_{X'}|_{Z_\sigma}$ 是同构可见 $Z'_\sigma \cong X'$，故 Z' 也是 X' 的拷贝的无交并。令 $H \subset G$ 为 $1 \in \{1, ..., d\}$ 的安定子群 $(H \cong \mathfrak{S}_{d-1})$，则有

$$(f \times_Y \mathrm{id}_{X'})(Z'_{\tau\circ\sigma}) = (f \times_Y \mathrm{id}_{X'})(Z'_\sigma) \quad (\forall \sigma \in G, \ \ \tau \in H) \tag{7}$$

由此可见 $Z' = \coprod_{i=1}^d Z'_i$，其中 $Z'_1 = Z'_{(1)}$，$Z'_j = Z'_{(1j)}$ $(j > 1)$。从而有

$$X' \times_X X' = \coprod_{\tau \in H} Z_\tau \cong H \times X' \tag{8}$$

由命题 1 和例 4 可见，(6) 和 (8) 说明有泛几何商 $X'/G \cong Y$ 和 $X'/H \cong X$。证毕。

例 8. 对一个诺特概形 X，记 $O_{X_{\mathrm{et}}}$ 为在平展拓扑下 X 的结构预层，即对任意平展态射 $U \to X$ 有 $O_{X_{\mathrm{et}}}(U) = O_U$。一个熟知的事实是 $O_{X_{\mathrm{et}}}$ 为平展层，即对任意平展态射 $U \to X$ 及任意两个平展覆盖 $q_1 : U_1 \to U$，$q_2 : U_2 \to U$，若 $a_1 \in \Gamma(O_{U_1})$，$a_2 \in \Gamma(O_{U_2})$ 满足 $\mathrm{pr}_1^*(a_1) = \mathrm{pr}_2^*(a_2) \in \Gamma(O_{U_1 \times_U U_2})$，存在唯一截口 $a \in \Gamma(O_U)$ 使得 $q_1^*(a) = a_1$，$q_2^*(a) = a_2$。

这一事实很容易由命题 1 证明: 不难约化为 q_1 和 q_2 都是有限型的情形, 注意 $\mathcal{O}_U$ 的一个整体截口等价于一个态射 $U \to \mathbb{A}^1$, 故此事实等价于对任意两个态射 $f_1 : U_1 \to \mathbb{A}^1$, $f_2 : U_2 \to \mathbb{A}^1$, 若 $f_1 \circ \mathrm{pr}_1 = f_2 \circ \mathrm{pr}_2 : U_1 \times_U U_2 \to \mathbb{A}^1$, 则存在唯一态射 $f : U \to \mathbb{A}^1$ 使得 $f_1 = q_1 \circ f$, $f_2 = q_2 \circ f$。由命题 1 这是显然的, 因为 U 是 $\mathrm{pr}_1 : U_1 \times_U U_2 \to U_1$ 和 $\mathrm{pr}_2 : U_1 \times_U U_2 \to U_2$ 的推出。

例 9. 设 $f : G \to G'$ 为 S-群概形的忠实平坦同态, $H = \ker(f)$, ρ 为 H 在 G 上的左乘作用。则 H 在 S 上忠实平坦, 且由命题 Ⅱ.1.2. 有右 G-概形同构 $H \times_S G \cong G \times_{G'} G$。故由命题 1 可知 G' 是 ρ 和 $\mathrm{pr}_2 : H \times_S G \to G$ 的泛几何推出, 换言之存在 ρ 的泛几何商 $G/H \cong G'$。

习题

1. 证明引理 1。

2. 设 S 是诺特概形, $X \to S$ 为有限型忠实平坦态射, $D \subset X$ 为 S-有效除子, $U \subset X$ 为开子概形使得 $U \cup D = X$ (作为集合)。证明嵌入 $U \hookrightarrow X$ 为 S-支配态射。

3. 对任一概形 S, n 次交错群 A_n 在 $\mathbb{A}^n_S$ 上有一个置换因子作用。证明存在弱几何商 $\mathbb{A}^n_S / A_n$。

第 2 节　推出的存在性: 平坦射影情形

1. 商与推出的存在性定理

下面的引理可见于 [S3.I, p.276], 这里我们给出一个不同的证明, 其方法后面要用到。

引理 1. 设 S 为诺特概形, $X \to S$ 为相对拟射影态射, 局部闭子概形 $W \subset X \times_S X$ 给出 X 在 S 上的等价关系。若 $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 是紧的和平坦的, 则存在泛几何商 $Y = X/W$, 它在 S 上是相对拟射影的 (若 $X \to S$ 是相对射影的则 $Y \to S$ 亦然), 而 $X \to Y$ 是忠实平坦相对射影的。

证. 设 X_1 为 X 的一个连通分支, $W_1 = \mathrm{pr}_1^{-1}(X_1) \subset W$。令 $X_2 = \mathrm{pr}_2(W_1)$。由定义 1.3 可见 $\mathrm{pr}_1^{-1}(X_2) = W \cap (X_2 \times_S X_2)$, 它给出 W 在 X_2 上的限制。故为简单起见不妨设 $X = X_2$。

将 X 嵌入一个相对射影概形 $\bar{X} \to S$ 作为稠密开子概形, 使得 $i^\# : \mathcal{O}_{\bar{X}} \to i_*\mathcal{O}_X$ 是单射 (其中 $i : X \to \bar{X}$ 为嵌入), 并固定一个 $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$。则因 $W \to X$ 是紧的, W 是 $\bar{X} \times_S X$ 的闭子概形。上述假设保证了 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$ 的所有纤维具有相同的希尔伯特多项式, 设为 χ。由定理 Ⅳ.2.2, 存在 S 上的相对射影概形 $\mathcal{H} = \mathcal{H}ilb^{\chi}_{\bar{X}/S}$, 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{\bar{X} \times_S T \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形, 其在 } T \text{ 上的纤维具有希尔伯特多项式 } \chi\}$$

令 $\mathcal{Z} \subset \bar{X} \times_S \mathcal{H}$ 为泛子概形, 则 W 诱导 S-态射 $\phi : X \to \mathcal{H}$ 使得 $W = \mathcal{Z} \times_{\mathcal{H}} X \subset \bar{X} \times_S X$。令 $\bar{Y} = \overline{\mathrm{im}(\phi)} \subset \mathcal{H}$, $\bar{Z} = \mathcal{Z} \times_{\mathcal{H}} \bar{Y} \subset \bar{X} \times_S \bar{Y}$, 则 $W = \bar{Z} \times_{\bar{Y}} X$。记 $q : X \to \bar{Y}$, $p_1 : \bar{Z} \to \bar{X}$, $p_2 : \bar{Z} \to \bar{Y}$ 和 $p : W \to \bar{Z}$ 为投射, 则 p_2 为忠实平坦的, 故 p 是支配的。注意 $\mathrm{pr}_1 = p_1 \circ p : W \to \bar{X}$, 故 p_1 是满的 (因它是支配的又是紧的), 从而是强满射。

易见 $\bar{Z} \to \bar{Y}$ 和 $q \circ \mathrm{pr}_2 : W \to \bar{Y}$ 的拉回等于 pr_2 和 pr_2 的拉回 (即 W_{22}, 见定义 1.3), 而 $\bar{Z} \to \bar{Y}$ 和 $q \circ \mathrm{pr}_1 : W \to \bar{Y}$ 的拉回等于 pr_1 和 pr_2 的拉回 (即 W_{12})。因为 $W_{12} = W_{22}$, 由 $\mathcal{H}$ 的泛性有 $q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2 : W \to \bar{Y}$, 故

$$q \circ p_1 \circ p = q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2 = p_2 \circ p \tag{1}$$

令 $Z = p_1^{-1}(X)$, 为简单起见仍记 $p_1 : Z \to X$, $p_2 : Z \to \bar{Y}$, $p : W \to Z$ 为投射。由于 $p : W \to Z$ 是满射 (因它是支配的又是紧的), (1) 给出

$$q \circ p_1 = p_2 : Z \to \bar{Y} \tag{2}$$

从而 $p : W \cong Z \times_{\bar{Y}} X \to Z$ 有一个截口 $Z \to W$。由于 $p_2 : \bar{Z} \to \bar{Y}$ 是开映射, 我们可以定义 $Y = p_2(Z) = q(X)$, 它是 $\bar{Y}$ 的稠密开子概形。此外我们有 $W \subset X \times_Y X$, 从而在 $X \times_S X \times_S X$ 中有

$$\begin{aligned} Z \times_Y W \subset Z \times_Y (X \times_Y X) &= W \times_Y X = W \times_Z (Z \times_Y X) \\ &= W \times_Z W \subset W \times_X W = Z \times_Y W \end{aligned} \tag{3}$$

换言之 $Z\times_Y W = Z\times_Y (X\times_Y X)$, 故 $W = X\times_Y X$, 因为 Z 在 Y 上忠实平坦。由此得

$$Z\times_Y W = W_{21} = W_{12} = W\times_Y Z = X\times_Y X\times_Y Z = X\times_Y W \tag{4}$$

由 $(4)\times_W Z$ (通过 p 的截口 $Z\to W$) 给出

$$Z\times_Y Z\cong X\times_Y Z \tag{5}$$

故 $p_1 : Z\to X$ 是同构, 因为 Z 在 Y 上忠实平坦。

因此 $X\to Y$ 忠实平坦, 而 $W = X\times_Y X$, 故由命题 V.1.1 可见 Y 是泛几何商 X/W。证毕。

定理 1. 设 S 为诺特概形, $X\to S$ 与 $Y\to S$ 为相对拟射影态射, $W\subset X\times_S Y$ 为局部闭子概形, 使得

$$W\times_X W\times_Y W = W\times_Y W\times_X W\subset X\times_S X\times_S Y\times_S Y \tag{6}$$

(此即引理 1.2 中的必要条件)。若 $\mathrm{pr}_1 : W\to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W\to Y$ 都是忠实平坦紧态射, 则 pr_1 和 pr_2 有一个泛几何推出 Z, 它在 S 上相对拟射影 (若 $X\to S$ 与 $Y\to S$ 为相对射影则 $Z\to S$ 亦然), 且 $X\to Z$ 与 $Y\to Z$ 是忠实平坦相对射影的。

证. 令 $X_1 = W\times_X W$, 看作 $Y_2 = Y\times_S Y$ 上的相对射影概形, 则 X_1 给出 W 在 S 上的一个等价关系, 且由命题 1.1 有 $W/X_1\cong X$。令 $W_1 = X_1\times_Y W$。不难由预层的语言及 (6) 验证

$$W_1 = X_1\times_{Y_2} X_1\subset X\times_S X\times_S Y\times_S Y \tag{7}$$

这是由于对任意 S-概形 U, 一个态射 $U\to W_1$ 等价于三个态射 (x,y), $(x,y'),(x',y')\in \mathrm{Mor}_S(U,W)$ (其中 $x,x'\in \mathrm{Mor}_S(U,X)$ 而 $y,y'\in \mathrm{Mor}_S(U,Y)$), 而一个态射 $U\to X_1\times_{Y_2} X_1$ 等价于四个态射 $(x,y),(x,y'),(x',y')$, $(x',y)\in \mathrm{Mor}_S(U,W)$。故 W_1 给出 X_1 在 Y_2 上的一个等价关系。由于 $\mathrm{pr}_1 : W_1\to X_1$ 是忠实平坦相对射影的, 由引理 1 存在泛几何商 $Y_3 =$

X_1/W_1, 且 $X_1 \to Y_3$ 是忠实平坦相对射影的, $Y_3 \to Y_2$ 是相对射影的。由 (7) 得

$$X_1 \times_{Y_3} X_1 = W_1 = X_1 \times_{Y_3} (Y_3 \times_{Y_2} X_1) \tag{8}$$

故 $X_1 \cong Y_3 \times_{Y_2} X_1$, 因为 X_1 在 Y_3 上忠实平坦。进一步有 $Y_3 \cong Y_3 \times_{Y_2} Y_3$, 故由引理 I.2.1 可知 $Y_3 \to Y_2$ 是闭嵌入。(对此也可以如下证明: 注意 W_1 可以看作 $W \times_S W$ 的闭子概形, 验证 $Y_3 \to Y_2$ 通过忠实平坦态射 $W \times_S W \to Y_2$ 的拉回为闭嵌入 $W_1 \to W \times_S W$。) 此外, 下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_3 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & Y \end{array} \tag{9}$$

是一个拉回, 即 $X_1 \cong Y_3 \times_Y W$, 这是由于

$$X_1 \times_{Y_3} X_1 \cong W_1 = X_1 \times_Y W \cong X_1 \times_{Y_3} (Y_3 \times_Y W) \tag{10}$$

(以及 $X_1 \to Y_3$ 忠实平坦)。故 $\mathrm{pr}_2 : Y_3 \to Y$ 是忠实平坦相对射影的 (因为合成 $Y_3 \hookrightarrow Y_2 \to Y$ 是相对拟射影的且是紧的)。

我们来证明 Y_3 给出 Y 在 S 上的一个等价关系。交换性是显然的。为验证自反性, 注意合成

$$W \xrightarrow{\Delta} W \times_X W = X_1 \to Y_3 \to Y_2 \tag{11}$$

等于合成 $W \to Y \xrightarrow{\Delta} Y_2$, 其中 $W \to Y$ 忠实平坦。对传递性, 我们需要验证 $Y_{311} = Y_{312} \subset Y \times_S Y \times_S Y$, 其中 Y_{3ij} $(i, j = 1$ 或 $2)$ 是 $\mathrm{pr}_i : Y_3 \to Y$ 与 $\mathrm{pr}_j : Y_3 \to Y$ 的拉回。只需验证 $X_1 \times_{Y_3} Y_{311} = X_1 \times_{Y_3} Y_{312}$ 在 $X \times_S Y \times_S Y \times_S Y$ 中成立即可。由 (9) 有

$$X_1 \times_{Y_3} Y_{311} \cong X_1 \times_Y Y_3 \cong W \times_X W \times_Y Y_3 \cong W \times_X X_1 \cong W \times_X W \times_X W \tag{12}$$

类似地有 $X_1 \times_{Y_3} Y_{312} \cong W \times_X W \times_X W$, 故有同构 $X_1 \times_{Y_3} Y_{311} \to X_1 \times_{Y_3} Y_{312}$, 与它们到 $X \times_S Y \times_S Y \times_S Y$ 的包含态射相容。

由引理 1, 存在泛几何商 $Z = Y/Y_3$, 它在 S 上是相对拟射影的, 且 $Y \to Z$ 是忠实平坦相对射影的。由 (9) 可见 $W \to Z$ 等化 pr_1 和

$\mathrm{pr}_2 : X_1 \to W$, 故 $W \to Z$ 经过 $W/X_1 \cong X$。由于 $W \to X$ 和 $W \to Z$ 都是忠实平坦相对射影的, 可见 $X \to Z$ 是忠实平坦相对射影的。此外,

$$\begin{aligned} W \times_X (X \times_Z Y) &\cong W \times_Z Y \cong W \times_Y (Y \times_Z Y) \\ &\cong W \times_Y Y_3 \cong X_1 \cong W \times_X W \end{aligned} \tag{13}$$

故 $W \to X \times_Z Y$ 是同构。这样由命题 1.1 即可见定理的各断言成立。证毕。

注 1. 观察定理 1 的证明可见其中的所有推理过程都是用范畴的语言。事实上定理 1 可以推广到一般的范畴。

设在范畴 $\mathfrak{C}$ 有积和纤维积, 其中给定了一些特殊的态射称为*良态射*, 满足下列条件:

A) 良态射是满射; 同构是良态射。

B) 若 $f : X \to T$ 为良态射而 $g : Y \to T$ 为任意态射, 则 $\mathrm{pr}_2 : X \times_T Y \to Y$ 为良态射。此外, g 是单射 (满射, 同构) 当且仅当 $\mathrm{pr}_1 : X \times_T Y \to X$ 是如此。

C) 对任两个态射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$, 若 f 和 g 是良态射则 $g \circ f$ 亦然; 若 f 和 $g \circ f$ 是良态射则 g 亦然。

D) 若 $f : X \to T$ 和 $g : Y \to T$ 是良态射, 则 T 是 $\mathrm{pr}_1 : X \times_T Y \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : X \times_T Y \to Y$ 的推出。

E) 设 $Z \subset X \times X$ 为等价关系, 若 $\mathrm{pr}_1 : Z \to X$ 是良态射, 则存在泛几何商 X/Z, 且投射 $X \to X/Z$ 是良态射。

例如当 $\mathfrak{C}$ 为诺特概形 S 上的相对拟射影概形范畴时, 可定义平坦紧态射为良态射 (并以强满射代替满射)。若 $\mathfrak{C}$ 为微分流形的范畴或复解析空间的范畴, 则可定义光滑紧满射为良态射。定理 1 可以推广为

定理 1′. 设范畴 $\mathfrak{C}$ 具有积和纤维积, 且定义了满足条件 A-E) 的良态射。设 $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的良态射使得 $(p, q) : Z \to X \times Y$ 为单射。若条件 (1.1.9) (见引理 1.2) 成立, 则 p 和 q 有泛几何推出 T, 且投射 $X \to T$ 和 $Y \to T$ 也是良态射。

这个定理的证明可以完全照搬定理 1 的推理过程 (习题 1)。

注 2. 我们注意在命题 1.1 中, $p: X\times_S Y\to X$ 和 $q: X\times_S Y\to Y$ 有一个是忠实平坦而另一个是强满射。相比之下定理 1 的要求强了些。在有些情形可将定理 1 的条件类似地减弱, 下面是一个部分的结果:

设 S 为诺特概形, $X\to S$ 和 $Y\to S$ 为相对拟射影态射, 闭子概形 $W\subset X\times_S Y$ 满足 (6)。假设 $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 和 $\mathrm{pr}_2: W\to Y$ 是紧的, $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 是忠实平坦的而 $\mathrm{pr}_2: W\to Y$ 是强满射。则 $\mathrm{pr}_2: W\to Y$ 经过一个强满射 $W\to Z$, 其中 $Z\to Y$ 是有限的且在集合论意义下是一一的, 使得存在几何推出

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & T \end{array} \tag{14}$$

其中 T 在 S 上是相对拟射影的 (若 $X\to S$ 和 $Y\to S$ 为紧的则 $T\to S$ 亦然), $X\to T$ 和 $Z\to T$ 为相对射影的, $Z\to T$ 忠实平坦, $X\to T$ 为强满射。此外若 W 是约化的且 Y 是正规的, 则 $Z\cong Y$。

证明从略 (见 [L-9])。

2. 有理等价关系、有理商和有理推出

在引理 1 中, $W\to X$ 既平坦又相对射影是本质的条件, 但经常不需要假定 W 是等价关系, 而只需要较弱的条件。另一方面, 在没有 $W\to X$ 的平坦性或紧致性条件时, 若 X 是约化的则 W 至少有"有理意义下的"商, 为说明这些我们要用下面的术语。

定义 1. 设 X 为 S-概形而 $W\subset X\times_S X$ 为局部闭子概形。我们说 W 是 X 在 S 上的*有理等价关系*, 如果

i) ("自反性") $\Delta(X)\subset W$;

ii) ("对称性") 令 $\iota: X\times_S X\to X\times_S X$ 为交换因子态射, 则 $\iota(W)=W$;

iii) ("有理传递性") 令 W_{ij} $(i,j=1$ 或 $2)$ 为 $\mathrm{pr}_i: W\to X$ 与 $\mathrm{pr}_j: W\to X$ 的拉回, 看作 $X\times_S X\times_S X$ 的子概形, 则存在稠密开子

概形 $U' \subset X$ 使得 $W_{22} \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(U') = W_{12} \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(U')$。

(若 $U' = X$, 这就是等价关系的定义。) 对一个有理等价关系 W, 若 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$ 有一个推出 Y, 则称 Y 为 X 对于 W 的商, 记为 $Y = X/W$。此外, 一个 S 上的有理映射 $p : X \dashrightarrow Y$ 称为 W 的有理商, 如果存在稠密开子概形 $U \subset Y$ 及稠密开子概形 $V \subset X$ 使得 p 可定义为一个态射 $V \to U$, $W' = W \cap (V \times_S V) \subset V \times_U V$, 且 U 为 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : W' \to V$ 的推出。

更一般地, 设 $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ 为概形的态射, 若存在概形 T 与稠密开子概形 $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ 及态射 $f : X' \to T$, $g : Y' \to T$ 使得 $p^{-1}(X') = q^{-1}(Y')$ 且 T 是 $p|_{p^{-1}(X')} : p^{-1}(X') \to X'$ 和 $q|_{p^{-1}(X')} : p^{-1}(X') \to Y'$ 的推出, 则称 T 为 p 和 q 的有理推出。

推论 1. 设 S 为诺特概形, X 为约化概形, $X \to S$ 为相对拟射影态射, $W \subset X \times_S X$ 为局部闭子概形, 定义 X 上的一个有理等价关系。则存在稠密开子概形 $X' \subset X$ 使得 $W' = W \cap X' \times_S X'$ 定义 X' 的一个等价关系且具有泛几何商。此外 $X'/W' \to S$ 是相对拟射影的且 $X' \to X'/W'$ 是忠实平坦相对拟射影的。故存在 X 对于 W 的有理商。

证. 不难约化到 $X \to S$ 是相对射影的且 W 是 $X \times_S X$ 的闭子概形的情形。于是有稠密开子概形 $X' \subset X$ 使得 $W \cap (X \times_S X')$ 在 X' 上相对射影且平坦。如引理 3 的证明中那样, 可假设对适当选取的 $\mathcal{O}_X(1)$ 及某个希尔伯特多项式 χ, W 诱导一个态射 $\phi : X' \to \mathcal{H} = \mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$。通过进一步缩小 X' 可设 ϕ 将 X' 映为一个局部闭子概形 $Y' \subset \mathcal{H}$。令 $W' = W \cap (X' \times_S X')$, 则由引理 1 的证明可见 $\mathrm{pr}_1 : W' = X' \times_{Y'} X' \to X'$ 与投射 $X' \to Y'$ 为忠实平坦的, 从而由命题 1.1 可见 Y' 是泛几何商 X'/W'。证毕。

习题

1. 证明定理 1′。

2. 写出推论 1 的证明细节。

第 3 节　推出的存在性: 仿射情形

1. 仿射商和仿射推出

设 $\mathfrak{C}$ 为某个概形 S 上的**仿射**概形的范畴, 则对任意 $X,Y,W\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, 任意态射 $p:W\to X$ 和 $q:W\to Y$ 在 $\mathfrak{C}$ 中有推出。详言之, 设 $X=\mathrm{Spec}A$, $Y=\mathrm{Spec}B$, $W=\mathrm{Spec}C$, 令 $\phi:A\times B\to C$ 为加法同态 $\phi(a,b)=p^*(a)-q^*(b)$, $D=\ker(\phi)$, 则不难验证 D 是 $A\times B$ 的子环 (通常记 $D=A\times_C B$)。令 $Z=\mathrm{Spec}D$, 不难验证它有诱导的 S-概形结构。注意投射 $D\to A$ 和 $D\to B$ 都是环同态, 故分别诱导态射 $f:X\to Z$ 和 $g:Y\to Z$, 且不难验证它们是 S-态射。我们来验证 Z 是 p 和 q 在 $\mathfrak{C}$ 中的推出。设 $Z'=\mathrm{Spec}D'\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 而 $f':X\to Z'$, $g':Y\to Z'$ 为 $\mathfrak{C}$ 中的态射使得 $f'\circ p=g'\circ q$, 则有环同态 $\psi=(f'^*,g'^*):D'\to A\times B$, 易见 $\phi\circ\psi=0$, 故 ψ 经过 D, 从而给出唯一态射 $h:Z\to Z'$ 使得 $h\circ f=f'$, $h\circ g=g'$, 且易见 h 是 S-态射。

一般说来, 这个推出不一定是 S-概形范畴中的推出 (也不一定是几何推出)。但若 Z 是 p 和 q 在集合范畴中的推出且其拓扑为 $X\coprod Y$ 的商拓扑 (参看例 1.1), 则它是 p 和 q 在 S-概形范畴中的推出: 对任意 $Z'\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 及任意 S-态射 $f':X\to Z'$, $g':Y\to Z'$ 使得 $f'\circ p=g'\circ q$, 由所设有诱导的连续映射 $h:Z\to Z'$; 对 $O_{Z'}$ 的任意局部截口 d 令 $\psi(d)=(f'^*(d),g'^*(d))$ 则定义了一个 Z' 上的环层同态 $\psi:O_{Z'}\to f'_*O_X\times g'_*O_Y$, 注意 ϕ 诱导环层同态 $h_*\phi:f'_*O_X\times g'_*O_Y\to(f'\circ p)_*O_W$ 且 $h_*\phi\circ\psi=0$, 可见存在唯一诱导同态 $O_{Z'}\to\ker(h_*\phi)=h_*O_Z$, 从而 h 可看作一个 S-概形态射, 且 $h\circ f=f'$, $h\circ g=g'$。总之有

命题 1. 设 X,Y,W 为概形 S 上的仿射概形, $p:W\to X$ 和 $q:W\to Y$ 为 S-态射, 则 p 和 q 在 S-仿射概形的范畴中有一个推出 Z。若 Z 是 p 和 q 在集合范畴中的推出且其拓扑为 $X\coprod Y$ 的商拓扑, 则它也是 p 和 q 在 S-概形范畴中的推出。

推论 1. 设 X 为概形 S 上的仿射概形, $W\subset X\times_S X$ 为局部闭仿射子概形, 定义 X 上的一个等价关系。则在 S-仿射概形的范畴中有商 X/W。

若 X/W 是集合范畴中的商且其拓扑为 X 的商拓扑, 则它也是 S-概形范畴中的商。

注意在推论 1 中若 $X = \mathrm{Spec}A$, $W = \mathrm{Spec}C$, 则 $X/W \cong \mathrm{Spec}R$, 其中 $R = \ker(\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^* : A \to C)$。

2. 格罗滕迪克下降原理

设 $A \to B$ 为环同态, 将 $\mathrm{Spec}(B^{\otimes_A (n+1)})$ 看作 $n+1$ 个 $\mathrm{Spec}B$ 的拷贝 (标号从 0 到 n) 在 $\mathrm{Spec}A$ 上的纤维积, 并记 $q_i : \mathrm{Spec}(B^{\otimes_A (n+1)}) \to \mathrm{Spec}(B^{\otimes_A n})$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 为到 $\mathrm{Spec}B$ 的除去第 i 拷贝外在 $\mathrm{Spec}A$ 上的纤维积的投射 (按预层的语言为 $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$)。

设 N 为 A-模, $M = B \otimes_A N$, 看作 B-模。则有典范同构

$$B \otimes_A M \cong B^{\otimes_A 2} \otimes_A N \cong M \otimes_A B \tag{1}$$

这给出一个 $B^{\otimes_A 2}$-模同构

$$\psi : M \otimes_A B \xrightarrow{\simeq} B \otimes_A M \tag{2}$$

记 $\iota_M : M \otimes_A B \to B \otimes_A M$ 为交换因子 A-模同构 (即将 $m \otimes_A b$ 映到 $b \otimes_A m$, 注意它不是 $B^{\otimes_A 2}$-模同构)。由 ψ 可以定义 $B^{\otimes_A 3}$-模同构

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \mathrm{id}_B \otimes_A \psi = q_0^*(\psi) : B \otimes_A M \otimes_A B \to B \otimes_A B \otimes_A M, \\
\psi_2 &= (\iota_B \otimes_A \mathrm{id}_B) \circ \psi_1 \circ (\iota_M \otimes_A \mathrm{id}_B) \\
&= q_1^*(\psi) : M \otimes_A B \otimes_A B \to B \otimes_A B \otimes_A M, \\
\psi_3 &= \psi \otimes_A \mathrm{id}_B = q_2^*(\psi) : M \otimes_A B \otimes_A B \to B \otimes_A M \otimes_A B
\end{aligned} \tag{3}$$

由 (1) 易见有 $\psi_2 = \psi_1 \circ \psi_3$。

定义一个范畴 $\mathfrak{M}_{A \to B}$ 如下: 其对象为所有对 (M, ψ), 其中 M 为 B-模, ψ 为同构 (2) 使得由 (3) 定义的 ψ_1, ψ_2, ψ_3 满足 $\psi_2 = \psi_1 \circ \psi_3$; 而一个态射 $(M, \psi) \to (M', \psi')$ 是一个 B-模同态 $\phi : M \to M'$ 使得 $(\mathrm{id}_B \otimes_A \phi) \circ \psi = \psi' \circ (\phi \otimes_A \mathrm{id}_B)$。由上所述可见从 A-模范畴 $\mathfrak{M}_A$ 到 $\mathfrak{M}_{A \to B}$ 有一个函子 F, 将一个 A-模 N 映到 $B \otimes_A N$。

引理 1 (格罗滕迪克下降原理). 设 $f: A \to B$ 为忠实平坦环同态, 则 F 为范畴等价。

证. 对任意 $n \geqslant 0$ 定义 A-模同态 $d^n: B^{\otimes_A(n+1)} \to B^{\otimes_A(n+2)}$ 为

$$d^n(b_0 \otimes_A b_1 \otimes_A \cdots \otimes_A b_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i b_0 \otimes_A \cdots \otimes_A b_{i-1} \otimes_A 1 \otimes_A b_i \otimes_A \cdots \otimes_A b_n \tag{4}$$

简言之 $d^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i^*$ (参看 (I.1.3.1))。对任意 A-模 N 记 $d_N^i = d^i \otimes_A \mathrm{id}_N : B^{\otimes_A(n+1)} \otimes_A N \to B^{\otimes_A(n+2)} \otimes_A N$, 并记 $f_N = f \otimes_A \mathrm{id}_N : N \to B \otimes_A N$。我们需要用到下述事实: 对任意 A-模 N, 下面的 A-模列

$$0 \to N \xrightarrow{f_N} B \otimes_A N \xrightarrow{d_N^0} B^{\otimes_A 2} \otimes_A N \xrightarrow{d_N^1} \cdots \xrightarrow{d_N^{n-1}} B^{\otimes_A(n+1)} \otimes_A N \xrightarrow{d_N^n} B^{\otimes_A(n+2)} \otimes_A N \xrightarrow{d_N^{n+1}} \cdots \tag{5}$$

正合。由 f 的忠实平坦性只需证明 $(5) \otimes_A B$ 正合即可。若令 $M = B \otimes_A N$, 则有 $B^{\otimes_A n} \otimes_A N \otimes_A B \cong B^{\otimes_A n} \otimes_A M$, 且可记 $d_M^n = d_N^n \otimes_A \mathrm{id}_B$, $f_M = f_N \otimes_A \mathrm{id}_B$。令 $\Delta_n : B^{\otimes_A(n+1)} \otimes_A M \to B^{\otimes_A n} \otimes_A M$ $(n \geqslant 0)$ 为 A-模同态

$$\Delta_n(b_0 \otimes_A b_1 \otimes_A \cdots \otimes_A b_n \otimes_A m) = (-1)^n b_0 \otimes_A b_1 \otimes_A \cdots \otimes_A b_{n-1} \otimes_A b_n m \tag{6}$$

不难验证 $d_M^{n-1} \circ \Delta_n + \Delta_{n+1} \circ d_M^n = \mathrm{id}_{B^{\otimes_A(n+1)} \otimes_A M}$ $(\forall n \geqslant 1)$, 且 $f_M \circ \Delta_0 + \Delta_1 \circ d_M^0 = \mathrm{id}_{B \otimes_A M}$, 这就说明 $(5) \otimes_A B$ 正合(参看 [L1, XIII.1])。

定义函子 $G: \mathfrak{M}_{A \to B} \to \mathfrak{M}_A$ 如下: 对任意 $(M, \psi) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M}_{A \to B})$ 令

$$G(M, \psi) = \ker(f \otimes_A \mathrm{id}_M - \psi \circ (\mathrm{id}_M \otimes_A f)) = \ker((\iota_M - \psi) \circ (\mathrm{id}_M \otimes_A f)) \tag{7}$$

由定义的典范性可见其函子性。我们来证明 G 是 F 的逆。给定 $(M, \psi) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M}_{A \to B})$, 令 $N = G(M, \psi)$, $f_N : N \to M$ 为嵌入, 则由 $\psi_2 = \psi_1 \circ \psi_3$ 可见下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to N \otimes_A B & \xrightarrow{f_N \otimes_A \mathrm{id}_B} & M \otimes_A B & \xrightarrow{((\iota_M - \psi) \circ (\mathrm{id}_M \otimes_A f)) \otimes_A \mathrm{id}_B} & B \otimes_A M \otimes_A B \\
 & & \simeq \downarrow \psi & & \simeq \downarrow \psi_1 \\
0 \to M & \xrightarrow{f \otimes_A \mathrm{id}_M} & B \otimes_A M & \xrightarrow{q_0^* - q_1^*} & B^{\otimes_A 2} \otimes_A M
\end{array} \tag{8}$$

由定义及 $\otimes_A B$ 保持正合性可见第一行正合; 而第二行可由 (5) $\otimes_A B$ 得到, 从而由上所述也是正合的。故由 (8) 有 $N \otimes_A B \cong M$, 且易见 $F(N) \cong (M, \psi)$, 这说明 $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_{A \to B}}$。另一方面, 对给定的 $N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M}_A)$ 令 $F(N) = (M, \psi)$, 则由 $\psi_2 = \psi_1 \circ \psi_3$ 可见 (8) 交换, 且由上所述可知第二行正合, 从而由 $N \otimes_A B \cong M$ 可见第一行正合, 再由 f 忠实平坦可见

$$N \cong \ker((\iota_M - \psi) \circ (\mathrm{id}_M \otimes_A f)) = G(M, \psi) \tag{9}$$

这说明 $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_A}$。证毕。

为方便起见我们用下列术语: 对一个态射 $\pi : X \to S$ 及 X 上的一个拟凝聚层 $\mathcal{F}$, 若存在 S 上的一个拟凝聚层 $\mathcal{E}$ 使得 $\pi^*\mathcal{E} \cong F$, 则称 $\mathcal{F}$ 可下降到 S, 而称 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 S 上的一个**下降**。引理 1 可理解为下面的推论的仿射情形。

推论 2. 设 $\pi : X \to S$ 为忠实平坦开态射, $\mathcal{F}$ 为 X 上的拟凝聚层, 则 $\mathcal{F}$ 可下降到 S 当且仅当存在 $O_{X \times_S X}$-模层同构 $\psi : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \to \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}$, 使得在 $X \times_S X \times_S X$ 上有

$$\mathrm{pr}_{13}^*(\psi) = \mathrm{pr}_{23}^*(\psi) \circ \mathrm{pr}_{12}^*(\psi) : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \to \mathrm{pr}_3^*\mathcal{F} \tag{10}$$

且此时 $\mathcal{F}$ 有下降

$$\mathcal{E} = \ker(\mathrm{pr}_2^* - \psi \circ \mathrm{pr}_1^* : \pi_*\mathcal{F} \to q_*\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}) \tag{11}$$

其中 $q = \pi \circ \mathrm{pr}_1 = \pi \circ \mathrm{pr}_2 : X \times_S X \to S$。

证. 必要性是显然的, 下面证明充分性。仍记 $\psi_1 = \mathrm{pr}_{23}^*(\psi)$, $\psi_2 = \mathrm{pr}_{13}^*(\psi)$, $\psi_3 = \mathrm{pr}_{12}^*(\psi)$, 且将它们在 $X \times_S X \times_S X$ 的任意开子集上的限制也用同样的记号。

设 X 的仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}B$ 和 $U' = \mathrm{Spec}B'$ 均在 S 的开子概形 $\mathrm{Spec}A$ 上忠实平坦, 投射 $U \to S$ 和 $U' \to S$ 分别由 $f : A \to B$ 和 $f' : A \to B'$ 给出, $\mathcal{F}(U) = M$, $\mathcal{F}(U') = M'$。则由引理 1 可知存在 A-模 N, N' 使得 $M \cong B \otimes_A N$, $M' \cong B' \otimes_A N'$。我们来说明有典范 A-模同构 $N \to N'$。由所设有同构 $\psi : M \otimes_A B' \to B \otimes_A M'$, 由条件 (10) 易见下图交换且每行正合:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to M & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_A f'} & M \otimes_A B' & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_A (f' \otimes_A \mathrm{id}_{B'} - \mathrm{id}_{B'} \otimes_A f')} & M \otimes_A B' \otimes_A B' \\
 & & \simeq \downarrow \psi & & \simeq \downarrow \psi_2 \\
0 \to B \otimes_A N' & \longrightarrow & B \otimes_A M' & \xrightarrow{\mathrm{id}_B \otimes_A (f' \otimes_A \mathrm{id}_{M'} - \psi \circ (\mathrm{id}_{M'} \otimes_A f'))} & B \otimes_A B' \otimes_A M'
\end{array}
\tag{12}
$$

再注意下图交换且每行正合:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to N \otimes_A B' & \longrightarrow & M \otimes_A B' & \xrightarrow{(f \otimes_A \mathrm{id}_M - \psi \circ (\mathrm{id}_M \otimes_A f)) \otimes_A \mathrm{id}_{B'}} & B \otimes_A M \otimes_A B' \\
 & & \simeq \downarrow \psi & & \simeq \downarrow \psi_1 \\
0 \to M' & \xrightarrow{f \otimes_A \mathrm{id}_{M'}} & B \otimes_A M' & \xrightarrow{(f \otimes_A \mathrm{id}_B - \mathrm{id}_B \otimes_A f) \otimes_A \mathrm{id}_{M'}} & B \otimes_A B \otimes_A M'
\end{array}
\tag{13}
$$

由于 f 和 f' 都是单射且余核都是平坦 A-模, 下面的交换图中的行都是正合的且向下的箭头都是单射:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to N & \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes_A f'} & N \otimes_A B' & \xrightarrow{\lambda} & N \otimes_A (B'/f'(A)) \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to M & \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_A f'} & M \otimes_A B' & \xrightarrow{\mu} & M \otimes_A (B'/f'(A)) \to 0
\end{array}
\tag{14}
$$

(参看命题 1.1 的证明), 故在 $M \otimes_A B'$ 中有

$$M \otimes_A 1 \cap N \otimes_A B' = N \otimes_A 1 \cong N \tag{15}$$

同理在 $B \otimes_A M'$ 中有

$$B \otimes_A N' \cap 1 \otimes_A M' = 1 \otimes_A N' \cong N' \tag{16}$$

故由 (12) 和 (13) 可见 ψ 诱导 A-模同构 $N \to N'$, 且由 (10) 可见它与 ψ 相容。

可取 X 的一个仿射拓扑基 $\{X_i | i \in I\}$, 使得每个 $S_i = \pi(X_i)$ 是仿射的, 其函数环记为 A_i。由于 π 是拟紧的, 对任意 $i \in I$ 令

$$N_i = \ker(\mathrm{pr}_2^* - \psi \circ \mathrm{pr}_1^* : \mathcal{F}(X_i) \to \mathrm{pr}_2^* \mathcal{F}(X_i \times_S X_i) \tag{17}$$

则对任意 $X_j \subset \pi^{-1}(S_i)$，由上所述可见 ψ 诱导典范同构 $N_i \otimes_{A_i} A_j \to N_j$ (注意 $S_j \subset S_i$)。由 ψ 是层同构可见诱导同态 $N_i \to N_j$ 与限制映射相容。注意 $\pi^{-1}(S_i)$ 中的所有 X_j 组成 $\pi^{-1}(S_i)$ 的一个开覆盖，可见有 $N_i \cong \mathcal{E}(S_i)$。故由引理 1 有 $\mathcal{F} \cong \pi^*\mathcal{E}$。证毕。

推论 2 可应用于概形的商的存在性。设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型忠实平坦态射，而 $\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层，可下降到 S。注意推论 2 中的 ψ 给出 $\mathcal{F}_2 = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}$ 的一个商层 $\mathcal{F}'$，使得 $\ker(\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}')$ 由所有局部截口 $(\mathrm{pr}_1^*(a), -\psi(\mathrm{pr}_1^*(a)))$ 生成。易见诱导同态 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 和 $\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 都是同构。注意 $\mathcal{F}'$ 定义 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \times_S \mathbb{V}_X(\mathcal{F})$ 的一个闭子概形 W。不难验证 (10) 等价于 W 给出 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F})$ 在 S 上的一个等价关系。反之，若有 $\mathcal{F}_2$ 的一个商层 $\mathcal{F}'$ 使得诱导同态 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 和 $\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 都是同构，则有诱导一个如推论 2 中的同构 $\psi : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \to \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}$。故由推论 2 得

推论 3. 设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型忠实平坦态射，$\mathcal{F}$ 为 X 上的凝聚层。设 $\mathcal{F}'$ 为 ($X \times_S X$ 上的) $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{F} \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}$ 的商凝聚层，使得

$$W := \mathbb{V}_{X \times_S X}(\mathcal{F}') \subset \mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \times_S \mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \tag{18}$$

是 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \to X$ 和 $\mathrm{pr}_1 : X \times_S X \to X$ 的拉回，也是 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S X \to X$ 的拉回，且定义 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F})$ 在 S 上的一个等价关系。则

i) 存在泛几何商 $T = \mathbb{V}_X(\mathcal{F})/W$;

ii) 存在 S 上的凝聚层 $\mathcal{E}$ 使得 $T \cong \mathbb{V}_S(\mathcal{E})$，且 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \cong \mathbb{V}_S(\mathcal{E}) \times_S X$，特别地投射 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}) \to T$ 忠实平坦;

iii) 对任意 $n \geqslant 1$，令 $X_n \subset \mathbb{V}_X(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}^n$ 定义的闭子概形，类似地定义 W_n 和 S_n，则 W_n 定义 X_n 在 S 上的一个等价关系，且有泛几何商 $X_n/W_n \cong S_n$。

由此及定理 2.1′ 可得

推论 4. 设 $\pi_X : X \to S$，$\pi_Y : Y \to S$ 为诺特概形的有限型忠实平坦态射，$\mathcal{F}_X$ 为 X 上的凝聚层，$\mathcal{F}_Y$ 为 Y 上的凝聚层，$\mathcal{F}'$ 为 ($X \times_S Y$ 上的)

$\mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}_X \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}_Y$ 的商凝聚层，使得

$$W := \mathbb{V}_{X\times_S Y}(\mathcal{F}') \subset \mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X) \times_S \mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y) \tag{19}$$

是 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X) \to X$ 和 $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X$ 的拉回，也是 $\mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y) \to Y$ 和 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ 的拉回，且

$$\begin{aligned} & W \times_{\mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X)} W \times_{\mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y)} W \\ = & W \times_{\mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y)} W \times_{\mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X)} W \subset \mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X) \times_S \mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X) \times_S V_Y(\mathcal{F}_Y) \times_S \mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y) \end{aligned} \tag{20}$$

则存在 S 上的凝聚层 $\mathcal{F}_S$ 使得 $\pi_X^*\mathcal{F}_S \cong \mathcal{F}_X$，$\pi_Y^*\mathcal{F}_S \cong \mathcal{F}_Y$，从而 $T = \mathbb{V}_S(\mathcal{F}_S)$ 是 $W \to \mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X)$ 和 $W \to \mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y)$ 的泛几何推出，且投射 $\mathbb{V}_X(\mathcal{F}_X) \to T$ 和 $\mathbb{V}_Y(\mathcal{F}_Y) \to T$ 忠实平坦。

由定理 2.1′ 的方法也可得到关于拟凝聚层的结果。

推论 5. 设 $\pi_X : X \to S$, $\pi_Y : Y \to S$ 为诺特概形的有限型忠实平坦态射，$\mathcal{F}_X$ 为 X 上的拟凝聚层，$\mathcal{F}_Y$ 为 Y 上的拟凝聚层，则下面两个条件等价:

i) 存在 S 上的拟凝聚层 $\mathcal{F}_S$ 使得 $\pi_X^*\mathcal{F}_S \cong \mathcal{F}_X$, $\pi_Y^*\mathcal{F}_S \cong \mathcal{F}_Y$;

ii) 存在 $X \times_S Y$ 上的拟凝聚层同构 $\phi : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}_X \to \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}_Y$，使得在 $X \times_S X \times_S Y \times_S Y$ 上有

$$\mathrm{pr}_{24}^*(\phi) \circ \mathrm{pr}_{23}^*(\phi^{-1}) \circ \mathrm{pr}_{13}^*(\phi) = \mathrm{pr}_{14}^*(\phi) : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}_X \to \mathrm{pr}_4^*\mathcal{F}_Y \tag{21}$$

在推论 2 中，若 $\mathcal{F}$ 为 O_X-代数层而 ψ 为 $O_{X\times_S X}$-代数层同构，则易见 $\mathcal{E}$ 有诱导的 O_S-代数层结构，故有

推论 6. 设 $\pi : X \to S$ 为诺特概形的有限型忠实平坦态射，$\mathcal{B}$ 为拟凝聚 O_X-代数层，则 $\mathcal{B}$ 可下降为拟凝聚 O_S-代数层当且仅当存在 $O_{X\times_S X}$-代数层同构 $\psi : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{B} \to \mathrm{pr}_2^*\mathcal{B}$，使得在 $X \times_S X \times_S X$ 上有

$$\mathrm{pr}_{13}^*(\psi) = \mathrm{pr}_{23}^*(\psi) \circ \mathrm{pr}_{12}^*(\psi) : \mathrm{pr}_1^*\mathcal{B} \to \mathrm{pr}_3^*\mathcal{B} \tag{22}$$

且此时 $\mathcal{B}$ 有下降

$$\mathcal{A} = \ker(\mathrm{pr}_2^* - \psi \circ \mathrm{pr}_1^* : \pi_*\mathcal{B} \to q_*\mathrm{pr}_2^*\mathcal{B}) \tag{23}$$

其中 $q = \pi \circ \mathrm{pr}_1 = \pi \circ \mathrm{pr}_2 : X \times_S X \to S$。换言之, 设 $p : Y \to X$ 为仿射态射, 则下面两个条件等价:

A) 存在仿射态射 $T \to S$ 使得 $Y \cong X \times_S T$;

B) 存在闭子概形 $W \subset Y \times_S Y$ 定义 Y 在 S 上的一个等价关系, 使得下图为拉回

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p \circ \mathrm{pr}_1} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow{\pi \circ p} & S \end{array} \tag{24}$$

且此时 T 为泛几何商 Y/W。

3. 有限情形

设 $X \to S$ 为诺特概形的有限型态射, $W \subset X \times_S X$ 为局部闭子概形, 使得 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$ 为**有限**态射。为了 pr_1 和 pr_2 的等化子存在, 经常不需要假定 W 是等价关系, 而只需要 W 是有理等价关系即可。

我们采用下面的术语: 设 S 是诺特概形, 一个点 $s \in S$ 称为伴随点, 如果 $O_{S,s}$ 中的极大理想是伴随素理想。

引理 2. 设 S 为正规诺特概形, $f : X \to S$, $g : Y \to S$ 为有限强满态射, 将伴随点映到伴随点, 则下图

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array} \tag{1}$$

是推出。

证. 不难约化到 S 是整仿射概形的情形。设 $S = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$, $Y = \mathrm{Spec}B$, 且令 $K = \mathrm{q.f.}(R)$。由所设 A 和 B 的所有伴随素理想均卧于 R 的零理想上, 故 $A \hookrightarrow A \otimes_R K$, $B \hookrightarrow B \otimes_R K$。由此可见 $A \to A \otimes_R B$ 与 $B \to A \otimes_R B$ 都是单射, 故 A 与 B 可看作 $A \otimes_R B$ 的包含 R 的子环。令 $\phi : A \oplus B \to A \otimes_R B$ 为 R-模同态 $(a, b) \mapsto a \otimes_R 1 - 1 \otimes_R b$, 并令

$R' = \ker(\phi)$。由于 $A \otimes_R K$ 和 $B \otimes_R K$ 都在 K 上忠实平坦, 由命题 1.1 可见 $\mathrm{Spec}K$ 是 $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B \otimes_R K) \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$ 与 $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B \otimes_R K) \to \mathrm{Spec}(B \otimes_R K)$ 的推出, 故

$$K \cong \ker(\phi \otimes_R \mathrm{id}_K) \cong R' \otimes_R K \tag{2}$$

换言之 $R' \subset K$。由于 R' 是在 R 上整的而 R 是整闭的, 有 $R = R'$, 从而 (1) 是仿射概形范畴中的推出。注意 $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ 为闭映射, 由命题 1 可见 (1) 是概形范畴中的推出。证毕。

命题 2. 设 S 为诺特概形, X 为正规概形, $X \to S$ 为有限型分离态射, 闭子概形 $W \subset X \times_S X$ 为 X 上的有理等价关系, 使得 $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 是有限的。假设

A) $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 将一般点映到一般点;

B) 任一点 $x \in X$ 具有仿射开邻域 $U \subset X$ 使得 $\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(U)) = U$;

C) 或者 W 是约化的, 或者 X 是正特征的 (即对 X 的任意不可约分支 V 有 $\mathrm{ch}(K(V)) > 0$)。

则存在商 $Y = X/W$ 且

i) Y 在 S 上是有限型的而 $X \to Y$ 是有限的;

ii) 对任意开子概形 $U \subset Y$, $W_U = W \times_Y U$ 给出 $X_U = X \times_Y U$ 上的有理等价关系, 而 $X_U/W_U \cong U$ 为其商;

iii) W 给出 X 上的拓扑学意义的等价关系, 而 $X \to Y$ 的纤维 (作为集合) 为 X 在该等价关系下的等价类;

iv) 若 W 无嵌入点, 则 Y 是正规的;

v) 存在稠密开子概形 $Y' \subset Y$, 其原像 $X' \subset X$ 在 Y 上平坦, 而 $W \times_Y Y' = X' \times_Y X' \subset X \times_S X$ 并且是 X' 上的等价关系 (故 $Y' = X'/(W \times_Y Y')$ 是泛几何商)。

证. 由 B) 和 $X \to S$ 的分离性不难约化到 X 和 S 是仿射概形的情形 (然后由 ii) 推出一般情形)。设 $S = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$ 及 $W = \mathrm{Spec}B$。为简单起见不妨设 X 的所有一般点都在同一个等价类中 (注意 X 是一些整分支的无交并)。令 $X_1 = \mathrm{Spec}A_1$, ..., $X_n = \mathrm{Spec}A_n$ 为 X 的所有不

可约分支, 而 $W_1, ..., W_m$ 为 W 的所有不可约分支的约化诱导概形结构。由推论 2.1 可知 W 有几何有理商 $X \dashrightarrow Y'$。令 $K = K(Y')$。

情形 1: W 是约化的。在此情形每个 $K(X_i)$ 在 K 上可分, 因为 $K(X_i) \otimes_K K(X_i)$ 是约化的。故对每个 W_i, $W_i \to \mathrm{pr}_1(W_i)$ 是一般光滑的, 从而 $K(W_i)$ 也在 K 上可分。取一个有限伽罗瓦扩张 $L \supset K$ 使得每个 $K(W_i)$ 在 K 上同构于 $L \supset K$ 的一个中间域。对每个 i 取一个 K-同态 $K(X_i) \to L$, 并令 $\tilde{A}_i$ 为 A_i 在 L 中的整闭包。所有诱导态射 $\tilde{X}_i = \mathrm{Spec}(\tilde{A}_i) \to X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 合起来给出一个强满射 $q : \tilde{X} \to X$, 其中 $\tilde{X} = \mathrm{Spec}\tilde{A}$ 为所有 $\tilde{X}_i$ 的无交并。考虑 $\tilde{X} \times_X W \times_X \tilde{X}$ 中的不可约分支使得其一般点在 pr_1 下映到 $\tilde{X}$ 的一般点, 令 $\tilde{W} = \mathrm{Spec}\tilde{B}$ 为所有这样的分支的并, 带有约化诱导概形结构。则 $\tilde{W} \subset \tilde{X} \times_S \tilde{X}$ 给出 $\tilde{X}$ 的一个有理等价关系, 且有有理商 Y'。

令 $\tilde{W}_1 = \mathrm{Spec}(\tilde{B}_1), ..., \tilde{W}_r = \mathrm{Spec}(\tilde{B}_r)$ 为 $\tilde{W}$ 的不可约分支, 带有约化诱导概形结构。则由 L 的选择有 $K(\tilde{W}_i) \cong L$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$。对任意 i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 存在一个 $\tilde{W}_t$ 使得 $\mathrm{pr}_1(\tilde{W}_t) = \tilde{X}_i$ 而 $\mathrm{pr}_2(\tilde{W}_t) = \tilde{X}_j$。由于 $\tilde{A}_i$ 整闭而 $\tilde{B}_t$ 是在 $\tilde{A}_i$ 上整的, 由 $K(\tilde{X}_i) \cong L \cong K(\tilde{W}_t)$ 可见 $\tilde{A}_i \to \tilde{B}_t$ 是同构, 即 $\mathrm{pr}_1 : \tilde{W}_t \to \tilde{X}_i$ 是同构。同理 $\mathrm{pr}_2 : \tilde{W}_t \to \tilde{X}_j$ 是同构, 故有 S-同构 $\sigma = \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1^{-1} : \tilde{X}_i \to \tilde{X}_j$。令 Σ 为所有这些同构组成的集合 $(\forall i, j)$。对任意 $\sigma \in \mathrm{Iso}_S(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) \cap \Sigma$ 及任意 $\sigma' \in \mathrm{Iso}_S(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k) \cap \Sigma$, 由 $\tilde{W}$ 给出 $\tilde{X}$ 的有理等价关系可见 $\sigma' \circ \sigma \in \Sigma$。而对每个 i 有 $\mathrm{id}_{\tilde{X}_i} \in \Sigma$。故 $G_i = \mathrm{Aut}_S(X_i) \cap \Sigma$ 为一个有限群。由 $\tilde{W} \dashrightarrow Y'$ 在一般点上的纤维可见 $G_i \cong \mathrm{Gal}(L/K)$。此外, 对每个 j 及任意 $\sigma \in \mathrm{Iso}_S(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) \cap \Sigma$ 有 $G_j = \sigma G_i \sigma^{-1}$。令 $C = \tilde{A}_i^{G_i}$ (它在 K 中整闭) 及 $Y = \mathrm{Spec}C \cong \tilde{X}_i / G_i$。则对每个 j 有 $Y \cong \tilde{X}_j / G_j$, 且 Y' 可等同于 Y 的一个开子概形。由于 $\mathrm{Gal}(L/K(X_j)) \subset \mathrm{Gal}(L/K)$, 每个 $\tilde{X}_j \to Y$ 经过 X_j, 有诱导态射 $X \to Y$, 与 $X \dashrightarrow Y'$ 一致。注意有 R-模正合列

$$0 \to C \to \tilde{A} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*} \tilde{B} \tag{3}$$

这给出 R-模正合列

$$0 \to C \to A \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*} B \tag{4}$$

因为 $A \to \tilde{A}$ 和 $B \to \tilde{B}$ 为单射。由于 $\tilde{A}$ 在 C 上是整的而 A 为有限生成的 R-代数, 可见 X 在 Y 上是有限的, 故存在有限生成的 R-子代数

$C' \subset C$ 使得 X 在 $\mathrm{Spec}C'$ 上是有限的。由于 C' 是诺特环而 A 是有限生成的 C'-模, 可见 C 是有限生成的 C'-模, 故 $Y \to S$ 是有限型的。

我们来验证 Y 是 W 的商。设 S-态射 $\phi : X \to Z$ 等化 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$, 则 $\psi = \phi \circ q : \tilde{X} \to Z$ 等化 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : \tilde{W} \to \tilde{X}$。故对任意仿射开子概形 $U \subset Z$ 及任意 $x \in \psi^{-1}(U) \cap \tilde{X}_i$ 有 $G_i x \subset \psi^{-1}(U)$。令 $I \subset \tilde{A}_i$ 为闭子概形 $\tilde{X}_i - \psi^{-1}(U)$ 的定义理想。令 $p_1, ..., p_s \subset \tilde{A}_i$ 为对应于 $G_i x$ 的点的素理想。则对每个 j $(1 \leqslant j \leqslant u)$ 存在 $a_j \in I - p_i$。由于对任意 $k \neq j$ 有 $p_j \not\supseteq p_k$, 可取 a_j 使得 $a_j \in p_k$ $(\forall k \neq j)$, 从而 $a = \sum_j a_j \in I - \cup_j p_j$。令 $b = \prod_{\sigma \in G_i} \sigma a$, 则 $b \in C$ 且 $G_i x \subset (\tilde{X}_i)_b \subset \psi^{-1}(U)$。由 (3) 有正合列

$$0 \to C_b \to \tilde{A}_b \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*} \tilde{B}_b \tag{5}$$

故 $(\tilde{X}_i)_b \to U$ 唯一地经过 Y_b。由此可见 ϕ 唯一地经过 Y。这就证明了 i), 同时也证明了 ii)。

若 W 没有嵌入点, 则 C 的非零元在 B 中不是零因子, 故 C 是整闭的。这就证明了 iv)。

注意 $\tilde{W}$ 给出 $\tilde{X}$ 的一个等价关系, 且 $\tilde{X}/\tilde{W} \cong Y$ 是几何商 (故为集合论意义下的商)。此外, $\tilde{X} \to X$ 的每个纤维中的点都在同一个等价类中, 故 $\tilde{W}$ 诱导 X 的集合论意义下的等价关系 $\sim$, 且作为集合 $X/\sim \cong Y$。易见 $\sim$ 由 W 决定, 即对任意 $x, x' \in X$, $x \sim x'$ 当且仅当存在 $w \in W$ 使得 $\mathrm{pr}_1(w) = x$, $\mathrm{pr}_2(w) = x'$。再注意投射 $X \to Y$ 的有限性即可见 iii) 成立。

情形 2: X 是正特征的, 为简单起见不妨设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数)。情形 1 的讨论基本上仍适用, 故我们仅写出与情形 1 的不同点。首先, 在此情形 $K(W_i)$ 未必是 K 的可分扩张, 可取有限正规扩张 $L \supset K$ 使得每个 $K(W_i)$ 在 K 上同构于 $L \supset K$ 的一个中间域。这样就可以象情形 1 那样定义 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{W}$, 但 $\tilde{W}$ 未必给出 $\tilde{X}$ 上的一个有理等价关系。仍可定义 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在每个 $\tilde{A}_i$ 上的作用。令 $C_0 = \tilde{A}_i^{G_i}$, 则 (3) 仍成立, 即 $C_0 = \ker(\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*)$。这里 C_0 未必在 A_i 中, 但对充分大的 N 有 $C_0^{p^N} \subset A_i$。仍由 (4) 定义 C, 则作为 $\tilde{A}$ 的子环 $C \subset C_0$。注意在 (4) 中 $\mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^*$ 将 C_0 映入 B 的幂零根, 故对充分大的 N 有 $C_0^{p^N} \subset C$。令 $C_1 = R[C_0^{p^N}] \subset C$, 即由 C 和 $C_0^{p^N}$ 生成的 R-子代数。则 C_1 为有限生成的 R-代数而 C 为有限生成的 C_1-模, 故也是有限生成的 R-代数。

令 $Y=\mathrm{Spec}(C)$, 注意 $Y\to\mathrm{Spec}(C_1)$ 是集合论意义下的一一映射。用情形 1 的讨论即可证明 Y 为一个商 X/W, 且 i-iii) 成立 (参看下面的注 1)。

若 W 没有嵌入点, 则 B 的伴随素理想均卧于 C 的零理想上。令 $K=\mathrm{q.f.}(C)$, 则 $B\to B\otimes_C K$ 为单射。故若 $a\in C_0\cap K$ 则 $a\in C$, 因此 C 是整闭的。这就证明了 iv)。

最后, 注意在任一情形 $W\to X$ 是一般平坦的, 故存在稠密开子概形 $Y'\subset Y$ 使得其原像 $X'\subset X$ 在 Y' 上平坦, 而 $W\times_Y Y'\subset X\times_S X$ 在 X' 上平坦且给出 X' 上的等价关系。这样由 ii) 和推论 2.1 可见 $Y'=X'/(W\times_Y Y')$ 为泛几何商。这就证明了 v)。证毕。

注 1. 在下述意义下命题 2 中的条件几乎都是必要的: 设 X 为在诺特概形 S 上分离的有限型概形, 闭子概形 $W\subset X\times_S X$ 给出 X 上的有理等价关系使得 $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 是有限的。设存在商 $Y=X/W$ 且满足命题 2 中的 i) 和 ii)。令 $W'=X\times_Y X$。则由推论 2.1 可见 W 为 W' 的闭子概形且"一般地等于" W', 即 W' 的任一不在 W 中的不可约分支不支配 X 的任一不可约分支。而 W' 为 X 上的等价关系且有商 $X/W'\cong Y$ (见引理 2)。由此可见 B) 成立。此外, 若 Y 是连通的且 $\mathrm{ch}(K(Y))=0$, 则存在稠密开子概形 $U\subset Y$ 使得 $X\times_Y X\times_Y U$ 是约化的, 故 W 是一般约化的, 换言之 C) 在有理意义下成立。如果在 W 中去掉那些不支配 X 的任一不可约分支的分支, 则得一个闭子概形 $W_0\subset W$, 它也定义 X 上的一个有理等价关系, 且有商 $Y'=X/W_0$, 它在 Y 上是有限的和双有理的。特别地. 若 Y 是正规的则 $Y'\cong Y$, 故在此情形不妨设 A) 也成立。

注 2. 命题 2 可以推广到有限群胚, 此处从略 (见习题 3)。

如同定理 2.1, 由命题 2 可以建立有限正规情形的推出存在性的一个判别准则。这里基本条件仍是 (1.1.9) (见引理 1.2), 但是在"有理意义"下 (即在 X 的一个稠密开子概形上成立)。

定理 1. 设 S 为诺特概形, X, Y 为 S 上的有限型正规概形, $W\subset X\times_S Y$ 为闭子概形, 满足条件:

(*) 存在稠密开子概形 $U\subset X$ 使得

$$W\times_X W\times_Y W\times_X U = W\times_Y W\times_X W\times_X U \subset X\times_S X\times_S Y\times_S Y$$

其中 $W\times_X W\times_Y W\times_X U\to X\times_S X\times_S Y\times_S Y$ 由 $((x,y),(x,y'),(x',y'))\mapsto (x,x',y,y')$ 给出, $W\times_Y W\times_X W\times_X U \to X\times_S X\times_S Y\times_S Y$ 由 $((x,y),(x',y),(x',y'))\mapsto (x,x',y,y')$ 给出 (这可以看作条件 (1.1.9) 的"有理型")。假设 $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 和 $\mathrm{pr}_2: W\to Y$ 为有限强满射, 且

A) $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 和 $\mathrm{pr}_2: W\to Y$ 均将一般点映到一般点;

B) 对任意点 $x\in X$, 存在 x 的仿射开邻域 $U_1\subset X$ 及仿射子概形 $U_2\subset Y$ 使得 $\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1)=\mathrm{pr}_2^{-1}(U_2)\subset W$;

C) 或者 W 是约化的, 或者 S 是正特征的,

则 pr_1 和 pr_2 有一个推出 Z。此外,

i) Z 在 S 上是有限型的, 而 $X\to Z$ 和 $Y\to Z$ 是有限的;

ii) 任一开子概形 $U\subset Z$ 是 $\mathrm{pr}_1: W\times_Z U\to X\times_Z U$ 与 $\mathrm{pr}_2: W\times_Z U\to Y\times_Z U$ 的推出;

iii) Z 是 pr_1 和 pr_2 在拓扑学意义下的推出;

iv) 若 W 没有嵌入点 (特别地若 W 是约化的), 则 Z 是正规的;

v) 存在稠密开子概形 $Z'\subset Z$, 其原像 $X'\subset X$ 和 $Y'\subset Y$ 在 Z 上平坦, 使得 $X'\subset U$ 且 $W\times_Z Z' = X'\times_Z Y'\subset X\times_S Y$ (故 Z' 是 $\mathrm{pr}_1: W\times_Z Z'\to X'$ 和 $\mathrm{pr}_2: W\times_Z Z'\to Y'$的泛几何推出)。

证. 本质上这是定理 2.1′ 的推论, 但由于细节较复杂, 我们还是按照定理 2.1 的途径给出证明。为方便起见用下面的记号: 对一个 X-概形 T 的任意两个闭子概形 V_1, V_2, 若存在稠密开子概形 $U\subset X$ 使得 $V_1\times_X U = V_2\times_X U$, 则记 $V_1\approx V_2$ (例如条件 $(*)$ 可记为 $W\times_X W\times_Y W\approx W\times_Y W\times_X W$)。

令 $X'=W\times_X W$, 看作 $Y_2=Y\times_S Y$ 上的有限概形。令 $X_1\subset X'$ 为闭子概形使得 $X_1\approx X'$ 且 X_1 的伴随点都是一般点。令 $W_1=X_1\times_Y W$。则由定理 2.1 的证明可见 $W_1\approx X_1\times_{Y_2} X_1$ (这给出 X_1 的一个有理等价关系)。令 $Y_3'=\mathrm{im}(X_1\to Y_2)$ (可看作有理商 X_1/W_1)。将 Y_3' 中不卧于 Y 的一般点上的不可约分支去掉, 得一闭子概形 $Y_3\subset Y_3'$。由定理 2.1 的证明可见 Y_3 给出 Y 在 S 上的一个有理等价关系, 故由命题 2 有商 $Z'=Y/Y_3$。

情形 1: W 没有嵌入点。由引理 2 有 $X\cong W/X'$, 故 $X\cong W/X_1$ (参

看注 1 和命题 1)。由 $W \to Z'$ 等化 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : X_1 \to W$ 可见 $W \to Z'$ 经过 X。由于 $X_1 \to W$ 是强满射, 有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z' \end{array} \tag{6}$$

约化到仿射情形, 令 $X = \mathrm{Spec}A$, $Y = \mathrm{Spec}B$, $W = \mathrm{Spec}C$ 及 $Z' = \mathrm{Spec}D'$。为简单起见不妨设 D' 是整环。定义 $\phi : A \oplus B \to C$ 为 $\phi(a,b) = \mathrm{pr}_1^*(a) - \mathrm{pr}_2^*(b)$。令 $D = \ker(\phi)$, 则 D 可看作 C 的子环, 且为有限生成的 D'-模。此外, 由 $D = A \cap B \subset C \otimes_D \mathrm{q.f.}(D)$ 可见 D 为整闭整环。令 $Z = \mathrm{Spec}D$ 并令 $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ 为诱导态射, 则 $f \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$。注意 pr_1 和 pr_2 为一般平坦的, 不难由定理 2.1.v) 得到 v)。

利用命题 2 的方法, 取一个有限正规扩域 $L \supset \mathrm{q.f.}(D)$ 使得对任一不可约分支 $\mathrm{Spec}C \subset W \times_X W \times_Y W$, $\mathrm{q.f.}(C)$ 可嵌入 L 作为 $L \supset \mathrm{q.f.}(D)$ 的中间域。对任一不可约分支 $\mathrm{Spec}A \subset X$ ($\mathrm{Spec}B \subset Y$), 取 A 在 L 中的整闭包 $\tilde{A}$ (B 在 L 中的整闭包 $\tilde{B}$) 并将 $\mathrm{Spec}A$ 换为 $\mathrm{Spec}\tilde{A}$ ($\mathrm{Spec}B$ 换为 $\mathrm{Spec}\tilde{B}$), 这样就将 X 和 Y 分别换为正规概形 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$, 而投射 $\tilde{X} \to X$ 和 $\tilde{Y} \to Y$ 都是有限强满射。将 W 换为 $\tilde{X} \times_X W \times_Y \tilde{Y}$ 中所有映满到 Z 的不可约分支的并 $\tilde{W}$ (带有诱导的约化概形结构)。则 $\tilde{W}$ 同构于 $\mathrm{Spec}\tilde{A} \cong \mathrm{Spec}\tilde{B}$ 的一些拷贝的无交并。由 v) 可见对任意不可约分支 $X_0 \subset \tilde{X}$ 和 $Y_0 \subset \tilde{Y}$, 存在不可约分支 $W_0 \subset \tilde{W}$ 卧于 X_0 和 Y_0 上。对任意 $z \in Z$, $\mathrm{Gal}(L/\mathrm{q.f.}(D))$ 可迁地作用于 z 在 X_0 (Y_0) 中的原像上。由此可见 Z 是 $\mathrm{pr}_1 : \tilde{W} \to \tilde{X}$ 和 $\mathrm{pr}_2 : \tilde{W} \to \tilde{Y}$ 的集合论意义的推出。这说明对任意 $x \in X$, $y \in Y$ 使得 $f(x) = g(y)$, 存在一点 $w \in W$ 使得 $\mathrm{pr}_1(w) = x$, $\mathrm{pr}_2(w) = y$。故 Z 是 $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to Y$ 的集合论意义的推出。此外由有限性易见 Z 的拓扑是 $X \coprod Y$ 的商拓扑, 故由命题 1 可知 Z 是 pr_1 与 pr_2 的推出, 且易见 i), ii) 和 iv) 成立。

情形 2: S 是正特征的。为简单起见设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形, p 为素数。基本上可以重复情形 1 的讨论, 对于不同之处可采用命题 2 中情形 2 的方法 (参看命题 1)。证毕。

推论 7. 设 S 为诺特概形, X, Y 为 S 上的有限型正规概形, $W \subset X \times_S Y$ 为闭子概形, 满足定理 1 的条件。设闭子概形 $W' \subset W$ 没有嵌入点且使

得 $\mathrm{pr}_1 : W' \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W' \to Y$ 都是强满射并将一般点映到一般点。则 $\mathrm{pr}_1 : W' \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W' \to Y$ 有一个推出 Z。此外，

i) Z 是正规的且在 S 上是有限型的，而 $X \to Z$ 和 $Y \to Z$ 是有限的；

ii) 任一开子概形 $U \subset Z$ 是 $\mathrm{pr}_1 : W \times_Z U \to X \times_Z U$ 与 $\mathrm{pr}_2 : W \times_Z U \to Y \times_Z U$ 的推出；

iii) Z 是 pr_1 和 pr_2 在集合论意义下的推出；

iv) 存在稠密开子概形 $Z' \subset Z$，其原像 $X' \subset X$ 和 $Y' \subset Y$ 在 Z 上平坦，使得 Z' 是 $\mathrm{pr}_1 : W' \times_Z Z' \to X'$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W' \times_Z Z' \to Y'$ 的泛几何推出。

证. 由定理 1, $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to Y$ 有一个推出 S'，而 X, Y, W' 都是有限 S'-概形。故由命题 1 可见 $\mathrm{pr}_1 : W' \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W' \to Y$ 有一个在仿射概形范畴中的推出 Z，且 Z 是正规有限 S'-概形。记 $q : W' \to Z$ 为投射。为证明 Z 是概形范畴中的推出，由命题 1 和有限性只需证明它是集合论意义的推出。

令 Ξ 为 $X \coprod Y$ 的所有不可约分支的集合，则 W' 生成 Ξ 的一个等价关系 $\sim$ (参看例 1.1)。易见对 $\sim$ 的任意等价类 $U \subset \Xi$，Z 中有唯一不可约分支 Z_U 使得其在 X (Y) 中的原像为 U 中所有 X (Y) 的分支的并 X_U (Y_U)，而

$$W' \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(X_U) = W' \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(Y_U) = q^{-1}(Z_U) \tag{7}$$

由此用定理 1.iii) 的讨论方法即可证明 Z_U 是 $\mathrm{pr}_1 : q^{-1}(Z_U) \to X_U$ 和 $\mathrm{pr}_2 : q^{-1}(Z_U) \to Y_U$ 的推出。

其他断言由定理 1 立得。证毕。

例 1. 设 k 为域，$X = \mathbb{A}_k^2$。令

$$W = \Delta(X) \cup \{((0,0),(0,1)),((0,1),(0,0))\} \subset X \times_k X \tag{8}$$

则 W 为 X 上的等价关系 (两个点 (0,0) 和 (0,1) 组成 W 的一个等价类，而其他等价类均由一个点组成)。由命题 1 可知在仿射 k-概形范畴中有

商 X/W, 且不难验证 X/W 为拓扑学意义下的商 (在 X 中 "将两个点 (0,0) 和 (0,1) 捏在一起"), 故由命题 1 可知 X/W 是概形意义下的商。当然 X/W 不是正规的 (事实上 $X/W \cong \mathrm{Spec} k[x, xy, y^2 - y, y^3 - y]$)。

更一般地, 对 k 上的任意有限型仿射概形 $X = \mathrm{Spec} A$ 及任意在 k 上有限的闭子概形 $V \subset X$, 可以定义 X 上的一个等价关系 $W = \Delta(X) \cup V \times_k V$, 且有商 X/W ("将 V 捏成一个点"), 满足命题 2.i-iii)。令 $I \subset A$ 为 V 的理想, $B = k + I \subset A$, 则不难验证 B 是 A 的子环且 $X/W \cong \mathrm{Spec} B$。这样的商的构造对于一般的 k-有限型概形 X 也适用, 只需要求 V 含于 X 的一个仿射开子概形即可 (习题 1)。

例 2. 设 $X = Y = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} - \{(0,0)\}$。令

$$W = \{x_1 = y_1, x_2 = y_2\} \cup \{x_1 = y_1 = 0, x_2 = 2y_2\} \subset X \times_{\mathbb{C}} Y \qquad (9)$$

(其中 x_1, x_2 和 y_1, y_2 分别为 X 和 Y 的坐标)。则定理 1 中的条件除了 A) 外都满足。另一方面, $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to Y$ 没有推出, 我们用反证法来证明这一点。设它们有推出 Z, 则集合 $T = \{(0, 2^n) | n \in \mathbb{Z}\} \subset X$ 映到 Z 中的一个点, 注意 T 在集合 $V = \{x_1 = 0\} \subset X$ 中察理斯基稠密, 可见 V 映到 Z 中的一个点。这样 Z 就是一个商 X/W', 其中 $W' = \{x_1 = y_1, x_2 = y_2\} \cup \{x_1 = y_1 = 0\}$, 但由例 1.5 我们知道在概形范畴中这个商不存在。

4. 推出与商的仿射性

引理 3. 设 S 是诺特概形, $f : X \to S$ 和 $g : Y \to S$ 是有限型态射, 其中 g 是忠实平坦的。则 f 是仿射的当且仅当 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ 是仿射的。

证. 必要性是熟知的, 以下证明充分性。只需证明若 S 是仿射的则 X 也是仿射的, 故不妨设 $S = \mathrm{Spec} R$。由 g 的忠实平坦性不难约化到存在仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec} B \subset Y$ 在 S 上忠实平坦的情形。

令 $A = \Gamma(X, O_X)$, $X' = \mathrm{Spec} A$, $\phi : X \to X'$ 为典范态射。由切赫上同调可见

$$\Gamma(X \times_S U, O_{X \times_S U}) \cong \Gamma(X, O_X) \otimes_R B = A \otimes_R B \qquad (1)$$

由所设 $X \times_S U$ 是仿射的, 故有

$$X \times_S U \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \cong X' \times_S U \tag{2}$$

这说明 $\phi \times_S \mathrm{id}_U$ 是同构, 从而由 $U \to S$ 忠实平坦可见 ϕ 是同构。证毕。

推论 8. 设 S 为诺特概形, X, Y 为 S 上的有限型概形, $Z \subset X \times_S Y$ 为闭子概形使得 $\mathrm{pr}_1 : Z \to X$ 和 $\mathrm{pr}_2 : Z \to Y$ 有几何推出 T, 且投射 $Y \to T$ 是忠实平坦的。则投射 $X \to T$ 是仿射的当且仅当 $\mathrm{pr}_2 : Z \to Y$ 是仿射的。

特别地, 若闭子概形 $W \subset X \times_S X$ 定义 X 在 S 上的等价关系, 使得存在几何商 X/W 且投射 $X \to X/W$ 忠实平坦, 则投射 $X \to X/W$ 是仿射的当且仅当 $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ 是仿射的。

习题

1. 给出例 1 中的一般情形的详细证明。

2. 设 $S = \mathrm{Spec}R$ 为诺特概形, $X = \mathrm{Spec}A$ 为 S 上的有限型概形。证明 A 是有限生成的 R-代数。

3. 设 $X_1 \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X_0$ 为诺特概形 S 上的有限型分离群胚, 其中 X_0 是正规的而 p_1 是有限的。假设

A) p_1 将一般点映到一般点;

B) 任一点 $x \in X_0$ 有一个仿射开邻域 $U \subset X_0$ 使得 $p_2(p_1^{-1}(U)) = U$;

C) 或者 X_1 是约化的, 或者 X_0 是正特征的。

证明存在商 $Y = X_0/X_1$, 它在 S 上是有限型的, 且 $X_0 \to Y$ 是有限的。此外, 若 X_1 是约化的则 Y 是正规的。

第 VI 章　群概形与商

第 1 节　群概形作用的商

上一章中讨论的商都是针对一般情形的，此外还有一些事实是关于群概形作用的商，这些结果不一定能推广到一般的群胚。我们下面讨论群概形作用的商的存在性及性质。

1. 群概形作用的商的微积分

设 S 为诺特概型，ρ 为群概形 $G \to S$ 在概形 $X \to S$ 上的作用。仍记 $\alpha = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_S X \to X \times_S X$ (见 Ⅱ.2.1)。令 W 为 α 的像闭包。作为集合映射，α 的象在 $x \in X$ 上的纤维为 x 的 ρ-轨迹；但 W 在 x 上的纤维可能包含不止一个 ρ-轨迹。若 W 就是 α 的像 (例如当 ρ 自由时)，则易见 W 定义 X 在 S 上的一个等价关系；否则至少 W 给出 X 的一个有理等价关系 (见定义 V.2.1)。由引理 V.1.1.i)和注 V.1.1.ii) 可见，一个 S-态射 $X \to Y$ 是 ρ 的商当且仅当它是 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : W \to X$ 的推出。

例 1. 设 S 为诺特概形，$f : G \to G'$ 为 S-群概形的忠实平坦同态，$H = \ker(f)$，ρ 为 H 在 G 上的左乘作用。由命题 Ⅱ.1.2.i) 可知有 S-概形同构 $\alpha_* :\ H \times_S G \cong G \times_{G'} G$，故由命题 V.1.1 可知 G' 是 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : G \times_{G'} G \to G$ 的泛几何推出，换言之 ρ 有泛几何商 $G/\rho = G/H \cong G'$。

例 2. 设 S 为诺特概型，ρ 为有限型分离群概形 $G \to S$ 在有限型分离概形 $X \to S$ 上的可迁作用。令 H 为 ρ 的安定子 (见 Ⅱ.2.2)，则由命题 Ⅱ.2.1.i) 可知 H 为 $G \times_S X$ 作为 X-群概形的闭子群概形 (它在 $G \times_S X$ 上的作用为右乘作用)，且有 $X \times_S X$ 上的同构

$$(G \times_S X)_\alpha \times_\alpha (G \times_S X) \cong (G \times_S X) \times_X H \tag{1}$$

由于 α 忠实平坦，由命题 V.1.1 有泛几何商

$$(G \times_S X)/H \cong X \times_S X \tag{2}$$

若 $X \to S$ 有一个截口 $\zeta : S \to X$, 则 $q = \rho \circ (\mathrm{id}_G \times_S \zeta) : G \to X$ 是忠实平坦态射。令 H_ζ 为投射 $H \to X$ 和 ζ 的拉回, 则由 (2) 可见有泛几何商 $G/H_\zeta \cong X$ (此时我们称 X 为 S 上的一个"齐性概形", 详见下文)。

例 3. 设 $f : G \to G'$ 为一个域 k 上的群簇的同态, 则由引理 Ⅱ.1.5 可知 f 有像, 且像 $f(G)$ 为 G' 的闭子群概形。令 $H = \ker(f)$, 则 f 分解为一个忠实平坦同态 $G \to G/H$ 和一个闭嵌入 $G/H \cong f(G) \to G'$ 的合成。

注 1. 设 G, G' 为 S-群概形, ρ, ρ' 分别为 G, G' 在 S-概形 X 上的作用。若

$$\rho' \circ (\mathrm{id}_{G'} \times_S (\rho \circ \mathrm{pr}_{13})) = \rho \circ (\mathrm{id}_G \times_S (\rho' \circ \mathrm{pr}_{23})) : G \times_S G' \times_S X \to X \quad (3)$$

则称 ρ 与 ρ' 交换。此时由抽象废话, 若 ρ 有 S-泛商, 则 ρ' 诱导 G' 在 X/G 上的作用; 若 S-泛商 X/G, X/G' 和 $(X/G)/G'$ 存在, 则有 S-泛商 $(X/G')/G \cong (X/G)/G'$。

命题 1. 设 S 为诺特概型, ρ 为群概形 $G \to S$ 在概形 $X \to S$ 上的作用, $H = \mathrm{Stab}_G(X)$ (见 Ⅱ.2.2)。设 ρ 有一个商 $q : X \to Y$, 即下图是推出

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\rho} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{q} & Y \end{array} \quad (4)$$

则命题 Ⅲ.2.1 中的 $\alpha^* : \Omega^1_{X/S} \to \tau^* \omega_{G/S}$ 经过典范同态 $\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y}$, 故命题 Ⅲ.2.2 中的正合列 (Ⅲ.2.1.9) 可扩展为一个典范复形

$$q^* \Omega^1_{Y/S} \xrightarrow{q^*} \Omega^1_{X/S} \to \tau^* \omega_{G/S} \to \omega_{H/X} \to 0 \quad (5)$$

且 (5) 是正合列当且仅当 $\Omega^1_{X/Y} \to \tau^* \omega_{G/S}$ 是单射。特别地, 若 (4) 是拉回 (此时 q 为几何商) 则 (5) 给出右正合列

$$q^* \Omega^1_{Y/S} \xrightarrow{q^*} \Omega^1_{X/S} \to \tau^* \omega_{G/S} \to 0 \quad (6)$$

而当 q 光滑时 q^* 是单射。

证. 由 (4) 可见 α 经过 $X\times_Y X$, 从而诱导一个同态 $\Omega^1_{X/Y}\to\tau^*\omega_{G/S}$。故正合列 $q^*\Omega^1_{Y/S}\to\Omega^1_{X/S}\to\Omega^1_{X/Y}\to 0$ 与 (Ⅲ.2.1.9) 合起来给出一个典范复形 (5), 而 (5) 正合当且仅当 $\Omega^1_{X/Y}\hookrightarrow\tau^*\omega_{G/S}$。最后, 若 (4) 是拉回, 即 $G\times_S X\cong X\times_Y X$, 则 $\Omega^1_{X/Y}\to\tau^*\omega_{G/S}$ 是同构。证毕。

2. 平坦射影情形

例 4. 设 S 为诺特概型, $G\to S$ 为平坦相对射影群概形, ρ 为 G 在相对拟射影概形 $X\to S$ 上的自由作用。由上所述 $W=\mathrm{im}(\alpha)$ 定义 X 在 S 上的一个等价关系, 而由 $W\cong G\times_S X$ 可见 $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 是忠实平坦相对射影的, 故由引理 V.2.1 可知存在泛几何商 $X/W=X/G$, 它在 S 上是有限型的, 且投射 $X\to X/G$ 是忠实平坦相对射影的。

特别地, 若 $X\to S$ 是相对射影群概形而 $G\subset X$ 为 S-平坦闭子群概形 (ρ 为 G 在 X 上的左乘作用), 则有泛几何商 X/G, 它在 S 上是有限型的, 且投射 $X\to X/G$ 是忠实平坦相对射影的。若还有 $G\lhd X$, 则由抽象废话可见 $Y=X/G$ 具有诱导的商群概形结构: 由商的泛性可见同构 $\alpha_X: X\times_S X\to X\times_S X$ 诱导一个同构 $\bar\alpha_X: Y\times_S Y\to Y\times_S Y$, 由此可见 Y 有一个群概形结构使得投射 $X\to Y$ 是同态, 且其核为 G。

下面的命题是这一情形的推广。

命题 2. 设 S 为诺特概形, $G\to S$ 为平坦相对射影群概形, $X\to S$ 为相对拟射影态射, ρ 为 G 在 X 上的作用。若安定子 $H=\mathrm{Stab}_\rho$ 在 X 上平坦, 则 ρ 有泛几何商 X/ρ, 它在 S 上是相对拟射影的, 而投射 $X\to X/\rho$ 是忠实平坦相对射影的。特别地, 若 $X\to S$ 也是群概形, $f: G\to X$ 是一个同态使得 $\ker(f)$ 在 S 上平坦, 而 ρ 是 f 通过左乘诱导的作用, 则 $f(G)$ 为 X 的闭子群概形且在 S 上平坦相对射影, 而 $X/f(G)\cong X/\rho$。

证. 注意 H 是 $G_X=G\times_S X$ 的 X-子群概形, 由例 4 有泛几何商 $W=G_X/H$, 且由 $G_X\to X$ 平坦相对射影可见 $W\to X$ 为忠实平坦相对射影的。记 $\rho_X=\rho\times_S\mathrm{id}_X: G\times_S X\times_S X\to X\times_S X$ (看作 G_X 在 $X\times_S X$ 上的作用), 则 $H\subset G_X$ 在 $X\times_S X$ 上的作用平凡, 故诱导一个 X-态射 $i: W=G_X/H\to X\times_S X$。我们下面来证明 i 是闭嵌入, 由引理

I.2.1 只需证明对角态射 $\Delta_{W/X\times_S X}: W \to W \times_{X\times_S X} W$ 是同构。

记 $q: G_X \to W$ 为投射。易见下图是拉回:

$$\begin{array}{ccc} G\times_S H & \xrightarrow{\eta} & G\times_S G\times_S X \\ \downarrow{\mu} & & \downarrow{\nu} \\ W\times_{X\times_S X} W & \longrightarrow & W\times_X W \end{array} \tag{1}$$

其中 η 为 $(g,h,x)\mapsto(g,gh,x)$, μ 为 $(g,h,x)\mapsto q(g,x),q(gh,x))$, ν 为 $(g,g',x)\mapsto(q(g,x),q(g',x))$。易见 μ 经过 $(G\times_S H)/(H\times_X H)\cong W$, 即经过 $\Delta_{W/X\times_S X}$, 而由 ν 忠实平坦可见 μ 忠实平坦, 从而 $\Delta_{W/X\times_S X}$ 忠实平坦, 故为同构。

由抽象废话易见 W 定义 X 在 S 上的一个等价关系, 从而由引理 V.2.1 可知存在泛几何商 X/W, 它在 S 上是相对拟射影的, 且投射 $X\to X/W$ 是忠实平坦相对射影的。再由抽象废话可见 X/W 为泛几何商 $X\rho$。

易见 X/W 为一个泛几何商 X/ρ。其余断言由引理 V.2.1 都是显然的。证毕。

对于一般的群概形作用也可以考虑有理商的存在性 (参看 V.2.2)。设 $\rho: G\times_S X\to X$ 为有限型 S-群概形 G 在 S-相对拟射影概形 X 上的作用, 则 $W=\alpha(G\times_S X)\subset X\times_S X$ 给出 X 在 S 上的一个有理等价关系, 而若 X 是约化的则 $\mathrm{pr}_1: W\to X$ 是一般平坦的, 故由推论 V.2.1 立得

命题 3. 设 S 为诺特概形, X 为约化的 S-相对拟射影概形, G 为平坦相对拟射影 S-群概形, $\rho: G\times_S X\to X$ 为作用, 则存在稠密开子概形 $X'\subset X$ 使得 ρ 的像闭包给出的 X' 上的有理等价关系有泛几何商, 记为 X'/G。此外 $X'/G\to S$ 是相对拟射影的且投射 $X'\to X'/G$ 是忠实平坦相对拟射影的。

对于有限平坦群概形仿射作用 (见定义 Ⅱ.2.1) 有下面的事实。

命题 4. 设 S 为诺特概形, $G\to S$ 为有限平坦群概形, $X\xrightarrow{\tau} S$ 为有限型态射, ρ 为 G 在 X 上的仿射作用。则 ρ 有 (在 S 概形范畴) 商 $q: X\to Y$, 而 $Y\to S$ 是有限型的且 q 是有限的。此外,

i) q 的纤维都是 ρ-轨迹 (即 q 为拓扑商);

ii) 对任意开子概形 $Y' \subset Y$, ρ 的限制给出 G 在 $X' = X \times_Y Y'$ 上的作用, 且有商 $X'/G \cong Y'$;

iii) 若 ρ 的安定子 $H \subset G \times_S X$ 在 X 上平坦 (特别地若 ρ 是自由作用) 则 q 是平坦的, 且为泛几何商;

iv) 若 $X \to S$ 为群概形, G 为 X 的正规闭子群概形, ρ 为 G 在 X 上的左乘作用, 则 X/G 具有诱导的商群概形结构。

证. 先证明主要断言及 i), 由命题 V.3.1 这可约化到 S, G, X 均为仿射的情形。设 $S = \mathrm{Spec}C$, $G = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$。令

$$B = A^G =: \{a \in A | \rho^*(a) = 1 \otimes_C a\} = \ker(\rho^* - \mathrm{pr}_2^* : A \to R \otimes_C A)\} \quad (2)$$

并令 $Y = \mathrm{Spec}B$。由推论 V.3.1 可知 Y 是 ρ 在仿射概形范畴中的商, 且显然 $C \to A$ 经过 B。

先证明 A 为有限生成的 B-模且 B 为有限生成的 C-代数。令 $N = \mathrm{Nm}_A \circ \rho^* : A \to A$, 其中 $\mathrm{Nm}_A : R \otimes_C A \to A$ 为范数映射。我们有右 $G \times_S X$-概形自同构

$$G \times_S G \times_S X \xrightarrow[\simeq]{(m \circ \mathrm{pr}_{12}, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)} G \times_S G \times_S X \quad (3)$$

令 $\psi : R \otimes_C R \otimes_C A \to R \otimes_C R \otimes_C A$ 为 (3) 所对应的右 $R \otimes_C A$-代数自同构, 即

$$\psi(\xi \otimes_C \zeta \otimes_C a) = (\mu(\xi) \otimes_C 1_A) \cdot (1_R \otimes_C \zeta \otimes_C a) \quad (4)$$

则有

$$\begin{aligned} \rho^* \circ N &= \rho^* \circ \mathrm{Nm}_A \circ \rho^* \\ &= \mathrm{Nm}_{R \otimes_C A} \circ (\mathrm{id}_R \otimes_C \rho^*) \circ \rho^* \\ &= \mathrm{Nm}_{R \otimes_C A} \circ (m^* \otimes_C \mathrm{id}_A) \circ \rho^* \\ &= \mathrm{Nm}_{R \otimes_C A} \circ \psi \circ (\mathrm{id}_R \otimes_C \mathrm{pr}_2^*) \circ \rho^* \\ &= \mathrm{Nm}_{R \otimes_C A} \circ (\mathrm{id}_R \otimes_C \mathrm{pr}_2^*) \circ \rho^* \\ &= \mathrm{pr}_2^* \circ \mathrm{Nm}_A \circ \rho^* \\ &= \mathrm{pr}_2^* \circ N \end{aligned} \quad (5)$$

(参看习题 Ⅱ.1.7)。因而 $N(A)\subset B$。若将 A 换成多项式代数 $A[t]$ 并令 $\rho^*(t)=1_R\otimes_C t$, 则 $\chi_a(t)=N(t-a)$ 为 $B[t]$ 中的首一多项式使得 $\chi_a(a)=0$, 故 A 是在 B 上整的。由于 A 是有限生成的 C-代数, 存在有限生成的 C-代数 $B'\subset B$ 使得 A 为有限生成的 B'-模, 故 B 为有限生成的 B'-模, 因而为有限生成的 C-代数。这样诱导态射 $q:X\to Y$ 为有限的, 因而是闭映射。

为证明 Y 是 ρ 在概形范畴中的商, 由推论 V.3.1 只需证明 q 将不同的 ρ-轨迹映到不同的点, 换言之对任意 $x\in X$ 有 $q^{-1}(q(x))=\rho(G\times_S\{x\})$。设 x 为素理想 $P\in A$ 而 $q(x)$ 为素理想 $Q\subset B$, 则 $A'=A\otimes_B B_Q/QB_Q$ 为阿廷环, 其素理想对应于有限多个 ρ-轨迹的并。故可取 $a\in A\otimes_B B_Q$ 使得 a 含于 x 的 ρ-轨迹的每个素理想中, 但模 A' 的其他素理想均余 1。于是存在 n 使得 $\rho^*(a)^n\in R\otimes_C P$, 从而 $N(a)\in P\cap B=Q$。若 $q^{-1}(q(x))$ 还包含其他 ρ-轨迹, 则有 $N(1-a)\in Q$, 从而 $N(1-a^n)\in Q$, 但 $N(1-a^n)\equiv 1 \pmod P$, 矛盾。

以上的讨论同时也证明了 i), 下面证明 ii)。对任意开子概形 $Y'\subset Y$, 由 q 是拓扑商可见 ρ 的限制给出 G 在 $X'=X\times_Y Y'$ 上的作用, 从而有拓扑商 $Y'\cong X'/G$; 而对任意 $b\in B$ 易见 $(A_b)^G=B_b$, 由此可见 Y' 为概形范畴中的商。

最后, iii) 和 iv) 由命题 2 和例 4 立得。证毕。

注 2. 如果 ρ 不是仿射的, 商 X/G 可能在概形范畴中不存在。最早的反例是森重文给出的 (参看 [KM])。

例 5. 设 R 为整闭诺特整环, $K=\mathrm{q.f.}(R)$, $L\supset K$ 为有限伽罗瓦扩张, A 为 R 在 L 中的整闭包, $X=\mathrm{Spec}A$。令 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$, 看作 R 上的离散群概形。对任意子群 $H\subset G$, 令

$$A^H=\{a\in A|\sigma(a)=a\ \forall\sigma\in H\} \tag{6}$$

则由命题 4 可见有商 $Y=\mathrm{Spec}A/H\cong\mathrm{Spec}A^H$。易见 A^H 为 R 在 H 的不变子域 L^H 中的整闭包。特别地有 $X/G\cong\mathrm{Spec}R$。

由例 I.2.9 可见投射 $q:X\to Y$ 不一定平坦 (因为 $A\otimes_{A^H}A$ 不一定是平坦 A-代数)。由此还可见 $\mathrm{Spec}A^H$ 不一定是泛商。另一方面, 如果 q

是平坦的, 则 $\alpha: H\times_R X\to X\times_Y X$ 是强满射, 因为它在 X 的一个稠密开子概形上是同构, 故 q 为泛几何商。

3. 挠子与一个范畴等价

设 S 为诺特概形, $G\to S$ 为群概形, $T\to S$ 为 G-挠子 (见定义 Ⅱ.2.1)。则由命题 V.1.1 和例 V.1.7 可知有泛几何商 $T/G\cong S$, 且 $\alpha: G\times_S T\to T\times_S T$ 是同构 (因为它既是闭嵌入又是忠实平坦的), 由此还可见 $G\to S$ 是平坦的。如果 $T\to S$ 有一个截口, 则由同构 α 可得一个同构 $G\to T$, 在这种情形 T 称为*平凡挠子*。但在一般情形 T 未必同构于 G, 例如在例 5 中若 $R=K$ 且 $[L:K]>1$, 则 X 是 G-挠子但 $X\not\cong G$。

命题 5. 设 S 为诺特概形, $G\to S$ 为有限平坦群概形, T 为有限 S-概形, $\rho_T: G\times_S T\to T$ 为自由作用使得 T 是一个 G-挠子。令 $\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$ 为所有 (X,ρ_X) 组成的范畴, 其中 X 为 $\mathfrak{Sch}_T$ 的对象, $\rho_X: G\times_S X\to X$ 为 G 在 X 上的仿射作用使得 ρ_X, ρ_T 与投射 $X\to T$ 相容 (此时 ρ_X 必为自由的); 而 $\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$ 中的态射为与 G 的作用相容的 T-态射。则有范畴等价 $\Phi:\mathfrak{Sch}_S\to\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$, 将 $\mathfrak{Sch}_S$ 的对象 X 映到 $X\times_S T$, 带有 G 的作用 $g(x,t)=(x,gt)$ (它显然是仿射的), 其逆将 $\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$ 的对象 (X,ρ_X) 映到 X/G。

证. 易见 Φ 为函子, 且由命题 4 可见 $(X,\rho_X)\mapsto X/G$ 定义一个函子 $\Psi:\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}\to\mathfrak{Sch}_S$, 只需证明 Φ 和 Ψ 互逆即可。显然 $\Psi\circ\Phi\simeq\mathrm{id}_{\mathfrak{Sch}_S}$。下面来证明 $\Phi\circ\Psi\simeq\mathrm{id}_{\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}}$。

对 $\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$ 的任意对象 (X,ρ_X), 我们来证明 ρ_X 是自由的, 即 $\alpha_X=(\rho_X,\mathrm{pr}_2): G\times_S X\to X\times_S X$ 是闭嵌入。记 $\tau: X\to T$ 为投射。由所设 $\alpha_T=(\rho_T,\mathrm{pr}_2): G\times_S T\to T\times_S T$ 是同构。注意 α_T 是右 T-态射, 对其作基变换 τ 得到一个同构 $\alpha'_X: G\times_S X\to T\times_S X$。令 $\eta=\tau\times_S\mathrm{id}_X: X\times_S X\to T\times_S X$, 则由所设有 $\eta\circ\alpha_X=\alpha'_X$, 故 α_X 是紧的 (参看 [H, Corollary Ⅱ.4.8.e)]), 由此及 α'_X 是闭嵌入不难推出 α_X 是闭嵌入。

这样, 由命题 4 可知有泛几何商 $Y=X/G$, 且投射 $q: X\to Y$ 是忠

实平坦的。令 $\mu=(\tau,q):X\to T\times_S Y$, 则由所设 μ 与 G 的作用相容, 且

$$\begin{aligned}X\times_Y X&\cong G\times_S X\cong (G\times_S T)\times_T X\cong (T\times_S T)\times_T X\cong T\times_S X\\&\cong (T\times_S Y)\times_Y X\end{aligned}\tag{1}$$

由 q 忠实平坦可见 μ 是同构, 这说明 $\Phi\circ\Psi$ 是 $\mathfrak{Sch}_{T,\rho_T}$ 的单位函子。证毕。

引理 1. 设 $K\subset L$ 为有限域扩张, 则存在有限域扩张 $L\subset F$ 及有限 K-群概形 G 使得 $\mathrm{Spec}(F)$ 为 G-挠子。

证. 若 $K\subset L$ 是可分扩张, 由例 5 可见取 F 为 $K\subset L$ 的伽罗瓦闭包及 G 为 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的离散群概形结构即可。

以下设 $\mathrm{ch}(K)=p>0$。令 $F'\supset L$ 为 $K\subset L$ 的正规闭包, 则在 F' 中有 K 的极大可分扩域 F_1 和极大纯不可分扩域 F_2, 且不难验证同态 $F_1\otimes_K F_2\to F'$ 是同构。令 $L_1=\{\alpha\in F_2|\alpha^p\in K\}$, 则存在 $a_1,...,a_r\in K$ 使得 $L_1\cong K[x_1,...,x_r]/(x_1^p-a_1,...,x_r^p-a_r)$, 换言之存在 $\alpha_1,...,\alpha_r\in L_1$ 使得 $\alpha_i^p=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, $L_1=K[\alpha_1,...,\alpha_r]$, 且 $[L_1:K]=p^r$。令 $L_2=\{\alpha\in L_1^{1/p}|\alpha^p\in L_1\}$, 则存在 $\beta_1,...,\beta_r\in L_2$ 使得 $\beta_i^p=\alpha_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ 且 $L_2=L_1[\beta_1,...,\beta_r]$。若 $f\in L_1[x_1,...,x_r]$ 的各变元的指数均小于 p, 则 $f(\beta_1,...,\beta_r)\neq 0$, 因若不然取 p 次幂就得到 $f^{(p)}(\alpha_1,...,\alpha_r)=0$ (其中 $f^{(p)}\in K[x_1,...,x_r]$ 为将 f 的每个系数都换为其 p 次幂所得的多项式), 这就与 $a_1,...,a_r$ 的选择矛盾。故 $[L_2:L_1]=p^r$。由此归纳地可得 $L_2\subset L_3\subset ...$, 其中每个 $L_i\cong K[x_1,...,x_r]/(x_1^{p^i}-a_1,...,x_r^{p^i}-a_r)$, 且可取 m 使得 $F_2\subset L_m$。令 $F=F'(L_m)$, 则有 $F\cong F_1\otimes_K L_m$, 这可表为

$$\mathrm{Spec}(F)\cong \mathrm{Spec}(F_1)\times_K \mathrm{Spec}(L_m)\tag{2}$$

设 $S=\mathrm{Spec}(K[x]/(x^{p^m}-a)$, 其中 $a\in K-K^p$, 则在 S 上有 $\alpha_{p^m/K}\cong \mathrm{Spec}(K[t]/(t^{p^m})$ $(m^*(t)=t\otimes_K 1+1\otimes_K t)$ 的自由作用 $x\mapsto t\otimes_K 1+1\otimes_K x$, 也有 $\mu_{p^m/K}\cong \mathrm{Spec}(K[t]/(t^{p^m}-1)$ $(m^*(t)=t\otimes_K t)$ 的自由作用 $x\mapsto t\otimes_K x$。不难得到 $S/\alpha_{p^m/K}\cong S/\mu_{p^m/K}\cong \mathrm{Spec}(K)$, 故 S 既是 $\alpha_{p^m/K}$-挠子又是 $\mu_{p^m/K}$-挠子。

令 H_1 为 $\mathrm{Gal}(F_1/K)$ 的离散群概形结构, $H_2=\alpha^r_{p^m/K}$ (或 $\mu^r_{p^m/K}$), 则由上所述可见 $\mathrm{Spec}(F_1)$ 为 H_1-挠子, $\mathrm{Spec}(L_m)$ 为 H_2-挠子。令 $G=H_1\times_K H_2$, 则由 (2) 可见 $\mathrm{Spec}(F)$ 为 G-挠子。证毕。

设 $K\subset L$ 为有限域扩张而 X 是 L-概形, 为确定 X 是否定义在 K 上 (即是否存在 K-概形 X' 使得 $X\cong X'\otimes_K L$), 可如上取 $F\supset L$ 和 G, 由命题 5 和引理 1 就转化为 G 在 $\mathrm{Spec}(F)$ 上的作用是否可以提升到 $X\otimes_L F$ 上的问题。为方便起见, 若 $X\otimes_L F\cong \mathrm{Spec}(R_1\times\cdots\times R_m)$, 其中每个 R_i 为阿廷局部 F-代数且剩余类域同构于 F, 则称 X 在 F 上分裂。

例 6. 设 $X=\mathrm{Spec}R$ 为域 K 上的有限平展概形, 则 R 同构于若干个 K 的可分扩域的直积。取一个包含所有这些扩域的伽罗瓦扩张 $L\supset K$, 则 X 在 L 上分裂。易见 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ 在 X_L 上的作用 ρ 是对每个 L 的拷贝作用并置换点。由于 $L^G\cong K$, 有 $X_L/G\cong X$。记 $\tilde{X}$ 为 X_L 的点集, 则得到 G 在 $\tilde{X}$ 上的置换表示 $\tilde{\rho}$ ("忘掉" G 在 L 上的作用)。反之, 若给定 G 在 $\tilde{X}$ 上的一个置换表示 $\tilde{\rho}'$, 则它和 G 在 L 上的作用合起来给出 G 在 X_L 上的一个作用 ρ', 且 ρ' 与 G 在 L 上的作用相容, 故由命题 5 可见 ρ' 的商为一个 K-概形 X' 使得 $X'\otimes_K L\cong X_L$。易见 X' 为 K 上的平展概形。总之有典范一一对应

$$\{\text{在 } L \text{ 上分裂的有限平展 } K\text{-概形}\}/\sim\ \leftrightarrow \{G \text{ 的有限置换表示}\}/\sim$$

当 X 为群概形时, 易见 $\tilde{\rho}$ 为自同构表示, 这是因为 ρ 显然与群概形运算交换。反之, 若 $\tilde{\rho}'$ 为 G 在有限群 H 上的自同构表示 (等价于一个群同态 $G\to \mathrm{Aut}(H)$), 则 $\tilde{\rho}'$ 与 H 的群运算交换, 从而在 ρ' 的商上有诱导群概形结构。故有典范一一对应

$$\{\text{在 } L \text{ 上分裂的有限平展 } K\text{-群概形}\}/\sim\ \leftrightarrow \{G \text{ 在有限群上的同构表示}\}/\sim$$

例 7. 设 $G=\mathrm{Spec}R$ 为域 K 上次数为 n 的交换群概形, 则 $n_G=0$。对任意素数 p, $\ker(p_G)$ 为 G 的正规子群概形, 故若 G 为单的, 则必有素数 p 使得 $p_G=0$。

任意诺特概形 S 上的满足 $p_G=0$ 的有限平坦交换群概形称为

$(p,...,p)$-型群概形。设 G 为 K 上的 $(p,...,p)$-型群概形, $L \supset K$ 为有限正规扩张使得 G 在 L 上分裂, 则 $G_L = G \otimes_K L$ 的群结构 $\tilde{G} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ $(r \geqslant 0)$, 由此可见 G 的次数为 p 的幂。将 $\tilde{G}$ 看作 r 维 $\mathbb{F}_p$-线性空间, 则 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在 $\tilde{G}$ 上的自同构表示 η_0 为 $\mathbb{F}_p$-线性表示。

当 G 在 K 上平展时, 由例 6 可见 G 为单的当且仅当 η_0 为不可约表示。注意 η_0 诱导群代数的线性表示 $\eta_1 : \mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}(L/K)] \to M_r(\mathbb{F}_p)$。令 $A = \mathrm{im}(\eta_1)$, 则得 $\mathbb{F}_p$-线性表示 $\eta : A \to M_r(\mathbb{F}_p)$。若 G 为单的, 则 η 为不可约表示, 从而 A 的中心 F 为域, 且 F 必同构于某个 $\mathbb{F}_{p^m}$, 于是 G_L 有 F-线性空间概形结构。由于 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在 G_L 上的作用与 F 的作用可交换, 在 G 上有诱导的 F-线性空间概形结构 (即有同态 $F \to End_K(G)$)。特别地, 若 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 为交换的, 则 $A = F$, 此时由 η 的不可约性可见 $\tilde{G}$ 作为 F-线性空间是 1 维的。

由此不难构造有限交换单群概形, 例如取 $K = \mathbb{Q}$, $L = K[\cos \frac{\pi}{7}]$, 则 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 为 3 阶循环群, 故 $\mathbb{F}_2[\mathrm{Gal}(L/K)] \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$, 从而 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 有 1 维 $\mathbb{F}_4$-线性表示, 这给出 K 上次数为 4 的交换单群概形。

4. 半稳定性

由例 V.1.6 可见群概形的作用一般没有几何商, 一个原因是轨迹的“大小”不同。但如果能排除这一障碍, 则群概形作用的几何商就很可能存在, 我们下面对此做详细说明。

设 S 为诺特概形, $X \to S$ 为相对拟射影态射, 则由定义存在 S 上的凝聚层 $\mathcal{E}$ 使得有局部闭嵌入 $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$。我们下面总假设 i 是固定的, 并记 $\bar{X}$ 为 i 的像闭包, 称为 X 的闭包。

定义 1. 设 S 为诺特概形, $G \to S$ 为有限型平坦群概形, $X \to S$ 为相对拟射影态射, $\rho : G \times_S X \to X$ 为作用。一个点 $x \in X$ 称为 ρ-半稳定点 (semistable point), 如果存在 x 的开邻域 $U \subset X$ 使得 $\alpha|_{G \times_S U}$ 在 $\bar{X} \times_S U$ 中的像闭包 V 在 U 上平坦, 且 $\alpha|_{G \times_S U} : G \times_S U \to V$ 是平坦 U-支配的 (见 V.1.2)。记 $\mathrm{S\text{-}S}_G(X)$ (或 $\mathrm{S\text{-}S}_\rho(X)$) 为所有 ρ-半稳定点组成的 X 的开子概形。

例 8. 考虑 $G = PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 而 $X = \mathbb{P}^n$ 的情形。对任意正整数 $m > n$ 有 G 在 X^{m+1} 上的"对角作用" ρ (即 $g(x_0, ..., x_m) = (gx_0, ..., gx_m)$)。记 $v_0, ..., v_n$ 为 $n+1$ 维标准基所对应的点, $U_0 \subset X^{n+2}$ 为 $(v_0, ..., v_n, v_0 + \cdots + v_n)$ 在对角作用下的轨迹, 易见

$$(g, y_1, ..., y_{m-n-1}) \mapsto (gv_0, ..., gv_n, g(v_0 + \cdots + v_n), gy_1, ..., gy_{m-n-1}) \quad (1)$$

定义一个开嵌入 $G \times X^{m-n-1} \hookrightarrow X^{m+1}$, 它可以进一步分解为一些 $G \times \mathbb{A}^{n(m-n-1)} \hookrightarrow (\mathbb{P}^n)^{m+1}$ 的并, 其像 $U \cong U_0 \times \mathbb{A}^{n(m-n-1)}$, 因而 $\alpha(G \times U)$ 的闭包同构于 $(\mathbb{P}^n)^{n+2} \times U$, 故在 U 上平坦。由此可见一个点 $x = (x_0, ..., x_m)$ 为 ρ-半稳定的当且仅当在 $x_0, ..., x_m$ 中可以取出 $n+2$ 个, 使得其中任意 $n+1$ 个张成 n 维射影空间; 这也等价于 x 的安定子群概形为零, 或 x 的轨迹维数为 $n(n+2)$。这是半稳定点的原始概念; 而"稳定"是指 $x_0, ..., x_m$ 中任意 $n+1$ 个张成 n 维射影空间, 这等价于对任意平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 都有 $\frac{\#(\{x_0, ..., x_m\} \cap H)}{m} < \frac{\dim H + 1}{n}$ (习题 6)。

定理 1. 设 S 为诺特概形, $G \to S$ 为有限型平坦群概形, $X \to S$ 为相对拟射影态射, $\rho : G \times_S X \to X$ 为作用。则 $\text{S-S}_\rho(X)$ 为 G-不变的 (即 $\rho(G \times_S \text{S-S}_\rho(X)) = \text{S-S}_\rho(X)$), 且有弱几何泛商 $\text{S-S}_\rho(X)/G$ (见定义 V.1.4), 为 S 上的相对拟射影概形, 而投射 $\text{S-S}_\rho(X) \to \text{S-S}_\rho(X)/G$ 是相对拟射影忠实平坦的。此外, 若 $U \subset \text{S-S}_\rho(X)$ 为满足定义 1 中各条件的 G-不变开子概形, 记 V 为 $\alpha|_{G \times_S U}$ 在 $\bar{X} \times_S U$ 中的像闭包, 则

i) $W = V \cap U \times_S U$ 为 U 在 S 上的等价关系, 且 U/G 典范同构于泛几何商 U/W;

ii) $Y = U/G$ 为几何商当且仅当 $\alpha(G \times_S U)$ (作为集合) 是 $U \times_S U$ 的闭子集, 这也等价于对 S 的任一点 (或任一几何点) s, $\alpha(G \times_S U_s)$ 是 $U_s \times_{\kappa(s)} U_s$ 中的闭集;

iii) 令 $\bar{U} \subset \bar{X}$ 为 U 的闭包, $\bar{W}$ 为 $\alpha|_{G \times_S U} : G \times_S U \to \bar{X} \times_S \bar{X}$ 的像闭包 (显然 $\text{pr}_1 : \bar{W} \to \bar{X}$ 的像为 $\bar{U}$), 若 $\bar{W}$ 在 $\bar{U}$ 上平坦, 则 $Y = U/G \to S$ 是相对射影的当且仅当 $\text{pr}_1(V)$ (作为集合) 是 $\bar{X}$ 中的闭集。

证. 设 $U \subset X$ 为满足定义 1 的条件的开子概形。由 $G \to S$ 平坦可见 ρ 平坦, 故有像 $U' = \rho(G \times_S U)$ 且为 X 的开子概形。我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} G\times_S G\times_S U & \xrightarrow{\gamma} & \bar{X}\times_S(G\times_S U) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times_S\rho} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\bar{X}}\times_S\rho} \\ G\times_S U' & \xrightarrow{\alpha|_{G\times_S U'}} & \bar{X}\times_S U' \end{array} \tag{2}$$

其中 γ 为 $(g,g',x)\mapsto(gg'x,g',x)$。易见 γ 的像闭包同构于 $G\times_S V$，故在 $G\times_S U$ 上平坦，从而在 U' 上平坦。令 V' 为 $\alpha|_{G\times_S U'}$ 在 $\bar{X}\times_S U'$ 中的像闭包，则由 $\mathrm{id}_{\bar{X}}\times_S\rho$ 忠实平坦可见 $(\mathrm{id}_{\bar{X}}\times_S\rho)^{-1}(V')$ 为 γ 的像闭包，即 $G\times_S V$。故 $\rho:G\times_S V\to V'$ 忠实平坦，再由 $G\times_S V$ 在 U' 上平坦可见 V' 在 U' 上平坦。类似地可以说明 $\alpha|_{G\times_S U'}:G\times_S U'\to V'$ 是平坦 U'-支配的。显然 U' 是 G-不变的，这就证明了第一个断言，且在定义 1 中不妨设 U 是 G-不变的。

以下仿照引理 V.2.1 的证明。不妨设 $U=\rho(G\times_S U_0)$，其中 U_0 是 U 的一个连通分支，这保证了 $\mathrm{pr}_2:V\to U$ 的所有纤维具有相同的希尔伯特多项式，设为 χ。只需证明对这样的 U 存在泛几何商 U/G，故不妨设嵌入 $U\to\bar{X}$ 是支配的。由定理 Ⅳ.2.2 可见 V 诱导一个典范 S-态射 $\phi:U\to\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\bar{X}/S}$，记 $\bar{Y}=\overline{\mathrm{im}(\phi)}$，$\bar{Z}\subset\bar{X}\times_S\bar{Y}$ 为 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\bar{X}/S}$ 上的泛子概形在 $\bar{Y}$ 上的拉回，则有

$$V=\bar{Z}\times_{\bar{Y}}U\subset\bar{X}\times_S U \tag{3}$$

记 $q:U\to\bar{Y}$，$p_1:\bar{Z}\to\bar{X}$，$p_2:\bar{Z}\to\bar{Y}$ 和 $p:V\to\bar{Z}$ 为投射，则 p_2 为忠实平坦的，故 p 是支配的。注意 $\mathrm{pr}_1=p_1\circ p:V\to\bar{X}$，故 p_1 是满的 (因它是支配的又是紧的)，从而是强满射。

令 $\beta:G\times_S G\times_S U\to V\times_U V$ 为态射 $(g,g',x)\mapsto(\alpha(g,x),\alpha(g',x))$，则由定义易见 β 是平坦的和 U-支配的，由此可见 $W=V\cap(U\times_S U)\subset U\times_S U$ 为 U 的等价关系，且 $W\to V$ 是支配的。易见 $p_2:\bar{Z}\to\bar{Y}$ 和 $q\circ\mathrm{pr}_2:W\to\bar{Y}$ 的拉回等于 W_{22}，而 p_2 和 $q\circ\mathrm{pr}_1:W\to\bar{Y}$ 的拉回等于 W_{12}。令 $V_i\subset\bar{X}\times_S W$ 为 W_{i2} 的闭包 $(i=1,2)$，则 V_i 为 p_2 和 $q\circ\mathrm{pr}_i$ 的拉回 $(i=1,2)$，而由 $W_{12}=W_{22}$ 有 $V_1=V_2$，故由 $\bar{Y}$ 的泛性有 $q\circ\mathrm{pr}_1=q\circ\mathrm{pr}_2:W\to\bar{Y}$，因此

$$q\circ p_1\circ p=q\circ\mathrm{pr}_1=q\circ\mathrm{pr}_2=p_2\circ p \tag{4}$$

令 $Z = p_1^{-1}(U)$, 为简单起见仍记 $p_1 : Z \to U$, $p_2 : Z \to \bar{Y}$, $p : W \to Z$ 为投射。由于 $p : W \to Z$ 是支配的, (4) 给出

$$q \circ p_1 = p_2 : Z \to \bar{Y} \tag{5}$$

从而 $p : W \cong Z \times_{\bar{Y}} U \to Z$ 有一个截口 $Z \to W$。由于 $p_2 : \bar{Z} \to \bar{Y}$ 是开映射, 我们可以定义 $Y = p_2(Z) = q(U)$, 它是 $\bar{Y}$ 的支配开子概形。由定义 1 有

$$\overline{Z \times_Y U} = \bar{Z} \times_{\bar{Y}} U = V \subset \bar{X} \times_S U \tag{6}$$

此外我们有 $W \subset U \times_Y U$, 从而在 $U \times_S U \times_S U$ 中有

$$\begin{aligned} \bar{Z} \times_{\bar{Y}} W \subset \bar{Z} \times_{\bar{Y}} (U \times_Y U) = V \times_Y U = \overline{W \times_Y U} = \overline{W \times_Z (Z \times_Y X)} \\ = \overline{W \times_Z W} \subset \overline{W \times_U W} = \overline{Z \times_Y W} = \bar{Z} \times_{\bar{Y}} W \end{aligned} \tag{7}$$

故 $\bar{Z} \times_{\bar{Y}} W = \bar{Z} \times_{\bar{Y}} (U \times_Y U)$, 从而 $W = U \times_Y U$, 因为 $\bar{Z}$ 在 $\bar{Y}$ 上忠实平坦。由此得

$$Z \times_Y W = W_{21} = W_{12} = W \times_Y Z = U \times_Y U \times_Y Z = U \times_Y W \tag{8}$$

由 $(8) \times_W Z$ (通过 p 的截口 $Z \to W$) 给出

$$Z \times_Y Z \cong U \times_Y Z \tag{9}$$

故 $p_1 : Z \to U$ 是同构, 因为 Z 在 Y 上忠实平坦。

因此 $U \to Y$ 忠实平坦, 而 $W = U \times_Y U$, 故由命题 V.1.1 可见 Y 是几何泛商 U/W, 再由 $\alpha|_{G \times_S U} : G \times_S U \to W$ 是 U-支配的可见 Y 为弱几何泛商 U/G。上述讨论同时也证明了 i)。

由于 $\alpha|_{G \times_S U}$ 是 U-支配的, $\alpha|_{G \times_S U} : G \times_S U \to W$ 是强满射当且仅当 $\alpha(G \times_S U) = W$, 而这又等价于对 S 的任一点 (或任一几何点) s 有 $\alpha(G_s \times_k U_s) = W_s$。注意 W 作为 $U \times_S U$ 的子集是 $\alpha(G \times_S U)$ 在 $U \times_S U$ 中的闭包, 可见 $\alpha(G \times_S U) = W$ 当且仅当 $\alpha(G \times_S U)$ 是 $U \times_S U$ 的闭子集, 且这也等价于对 S 的任一点 (或任一几何点) s, $\alpha(G \times_S U_s)$ 是 $U_s \times_{\kappa(s)} U_s$ 中的闭集。这就证明了 ii)。

若 iii) 的条件满足, 易见 $\bar{W}$ 定义 $\bar{U}$ 在 S 上的一个等价关系, 由引理 V.2.1 有泛几何商 $\bar{U}/\bar{W}$, 且投射 $q : \bar{U} \to (\bar{U}/\bar{W})$ 忠实平坦。易见 U

在 $\bar{U}/\bar{W}$ 中的像同构于 $U/W \cong Y$, 而由平坦性可见 $\bar{U}/\bar{W}$ 为 U/W 的闭包 (实际上 $\bar{U}/\bar{W} \cong \bar{Y}$)。若 $Y \to S$ 是相对射影的则 $U/W = \bar{U}/\bar{W}$, 注意 $\mathrm{pr}_2^{-1}(\bar{U}) = \mathrm{pr}_1^{-1}(\bar{U}) = \bar{W}$, 可见 $\bar{U} \times_{\bar{U}/\bar{W}} \bar{U} \cong \bar{W} \cong \bar{Z} \times_{\bar{U}/\bar{W}} \bar{U}$, 由 q 忠实平坦可见投射 $\bar{Z} \to \bar{U}$ 是同构, 故 $V = \bar{Z} \times_{\bar{U}/\bar{W}} U \cong \bar{U} \times_{\bar{U}/\bar{W}} U$, 从而 $\mathrm{pr}_1(V) = \bar{U}$。反之, 若 $\mathrm{pr}_1(V)$ 为闭集, 则 $\mathrm{pr}_1(V) = \bar{U}$, 由 $q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2$ 可见 $Y \cong q(U) = q(\bar{U}) = \bar{U}/\bar{W}$, 在 S 上是紧的, 从而是相对射影的。证毕。

在例 8 的情形, 即 $G = PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$, $X = (\mathbb{P}^n)^{m+1}$ 而 ρ 为对角作用, 易见 $\text{S-S}_\rho(X)/G$ 有一个由同构于 $\mathbb{A}^{n(m-n-1)}$ 的开子概形组成的开覆盖。更好的理解是 $\text{S-S}_\rho(X)/G$ 局部可嵌入 $\mathbb{G}_{m-2,m-n-1}$ 作为开子概形。

注 3. 定理 1.iii) 中的条件“$\bar{W}$ 在 $\bar{U}$ 上平坦”与 X 的选择有关。若 $X \to S$ 是紧致的, 适当更换 X 总可以使这个条件满足, 具体说明如下。同构 $Z \to U$ 给出 $\bar{Z}$ 中的一个同构于 U 的支配开子概形, 而 $(\mathrm{id}_{\bar{Z}}, p_2) : \bar{Z} \to \bar{Z} \times_S \bar{Y}$ 显然是闭嵌入。令 ρ' 为 G 在 $X \times_S \bar{Y}$ 的第一个因子上的作用 (即 $g(x, y) = (gx, y)$), 显然 Z 是 ρ'-不变的, 故由 $Z \to \bar{Z}$ 支配及 $G \to S$ 平坦可见 $\bar{Z}$ 是 ρ'-不变的, 换言之 ρ' 诱导 G 在 $\bar{Z}$ 上的一个作用。注意 $Z \times_Y Z$ 在 $\bar{Z} \times_S \bar{Z}$ 中的闭包为 $\bar{Z} \times_{\bar{Y}} \bar{Z}$, 在 $\bar{Z}$ 上平坦。由此可见若将 X 换为 $\bar{Z}$, 则定理 1 的条件及“$\bar{W}$ 在 $\bar{U}$ 上平坦”均满足。注意投射 $\bar{Z} \to \bar{U}$ 是广义的爆发。

注 4. 设 k 为域, ρ 为 $\mathbb{G}_{m/k}$ 在 $\mathbb{A}_k^n$ $(n > 0)$ 上的标量乘作用, 取 $\mathbb{A}_k^n$ 的紧致化为 $\mathbb{P}_k^n$, 则 ρ 可扩张为 $\mathbb{G}_{m/k}$ 在 $\mathbb{P}_k^n$ 上的一个作用。易见 $\alpha|_{\mathbb{G}_{m/k} \times_k \mathbb{A}_k^n}$ 在 $\mathbb{P}_k^n \times_k \mathbb{A}_k^n$ 中的像闭包在 $\mathbb{A}_k^n$ 上不平坦。实际上 ρ 在点 $(0, ..., 0) \in \mathbb{A}_k^n$ 和 $\mathbb{P}_k^n - \mathbb{A}_k^n$ 处不是半稳定的, 而在 $\mathbb{A}_k^n - \{(0, ..., 0)\}$ 上是半稳定的, 故泛几何商 $(\mathbb{A}_k^n - \{(0, ..., 0)\})/\mathbb{G}_{m/k}$ 存在。

在例 V.1.6 中, 取 X 的紧致化为 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, 则易见 $\alpha|_{G \times_{\mathbb{C}} X'}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times_{\mathbb{C}} X'$ 中的像闭包 V 在 X' 上平坦, 但 $\alpha|_{G \times_{\mathbb{C}} X'} : G \times_{\mathbb{C}} X' \to V$ 不是 X'-支配的。实际上 $Y = \{x = \sqrt{-1}y\} \cup \{x = -\sqrt{-1}y\} \subset X'$ 的各点都不是 ρ-半稳定的, 而 $X' - Y$ 的点都是 ρ-半稳定的。

5. 齐性概形

设 G 为有限型平坦 S-群概形而 $H \subset G$ 为 S-平坦闭子群概形, 若几何泛商 G/H 存在, 则称 G/H 为 S 上的齐性概形 (homogeneous scheme)。

定理 1 的下述推论是齐性概形的经常遇到的情形。

推论 1. 设 S 为诺特概形, 有限型平坦 S-群概形 G 可以嵌入一个 S-相对射影概形 X 中作为局部闭子概形, 使得 G 在自身上的左乘和右乘作用均可扩张到 X 上; $H \subset G$ 为闭子概形使得其在 X 中的闭包 $\bar{H}$ 为 S-平坦的。则存在齐性概形 G/H, 它在 S 上相对拟射影, 而投射 $G \to G/H$ 是相对拟射影忠实平坦的。此外, 若 $H \triangleleft G$, 则 G/H 具有诱导的商群概形结构。

证. 记 $\alpha : G \times_S X \to X \times_S X$ 为态射 $(g, x) \mapsto (gx, x)$, 而 $\alpha' : X \times_S G \to X \times_S X$ 为态射 $(x, g) \mapsto (xg^{-1}, x)$, 则易见 $\alpha' \circ \alpha|_{H \times_S G}$ 为 $(h, g) \mapsto (h, g)$。注意 α' 为 G-自同构, 而由 $G \to S$ 平坦可见 $H \times_S G$ 在 $X \times_S G$ 中的闭包为 $\bar{H} \times_S G$, 由所设可见它在 G 上平坦, 而 $\alpha(H \times_S G)$ 的闭包 G-同构于 $\bar{H} \times_S G$, 故也在 G 上平坦。因此 $G \subset \mathrm{S\text{-}S}_H(X)$, 且 G 是 H-不变的, 故由定理 1 可知有弱几何泛商 G/H, 为 S 上的相对拟射影概形, 而投射 $G \to G/H$ 是相对拟射影忠实平坦的。注意 $\alpha(H \times_S G)$ 为 $G \times_S G$ 中的闭子概形, 由定理 1.ii) 可见 G/H 是几何商。

最后, 若 $H \triangleleft G$, 由抽象废话易见 G/H 具有诱导的商群概形结构。证毕。

定理 1.iii) 还给出齐性概形 G/H 的紧致性的一个判别法。

例 9. 将 $\mathbb{P}^{n(n+2)}$ 看作 $n+1$ 阶非零方阵空间模 $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$ 的商空间, 则 $PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 可以典范地嵌入 $\mathbb{P}^{n(n+2)}$ 作为开子概形, 且 $PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 在自身上的左乘和右乘作用都可以扩张到 $\mathbb{P}^{n(n+2)}$ 上。注意任一 $\mathbb{Z}$-平坦闭子概形 $T \subset PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 的闭包都是 $\mathbb{Z}$-平坦的 (因为 $\mathbb{Z}$-平坦等价于 $\mathbb{Z}$-无挠), 由推论 1 可见对任意两个 $\mathbb{Z}$-平坦闭子群概形 $H \subset G \subset PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 给出一个齐性概形 G/H, 且当 $H \triangleleft G$ 时 G/H 为商群概形。

上述事实可以推广到 $PGL_{n+1/S}$, 其中 S 是维数 $\leqslant 1$ 的正规概形。

注意典型群概形如 $SL_{n/\mathbb{Z}}$, $O_{n/\mathbb{Z}}$, $Sp_{n/\mathbb{Z}}$ 等都在 $\mathbb{Z}$ 上平坦，且都可以嵌入 $PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$ 作为闭子群概形 (参看习题 II.2.6)。

6. 域上的情形

命题 6. 设 k 为域, G 为有限型 k-群概形, $H \subset G$ 为闭子群概形, ρ 为 H 在 G 上的左乘作用, 则存在泛几何商 G/H, 它在 k 上是有限型的, 而投射 $G \to G/H$ 是忠实平坦的。此外, 如果 $H \triangleleft G$, 则 G/H 具有商群概形结构。

证. 先证明第一个断言。

情形 1: k 是代数闭的且 G 是约化的。仍记 $\alpha : H \times_k G \to G \times_k G$ 为态射 $(h, g) \mapsto (hg, g)$。先考虑 G 在 k 上拟射影的情形, 任取 G 的一个射影闭包 $\bar{G}$, 令 $W \subset \bar{G} \times_k \bar{G}$ 为 α 的像闭包, 则如上所述 W 给出 $\bar{G}$ 上的一个有理等价关系。设 $\xi \in G$ 为一个一般点, $\{\xi_1, ..., \xi_r\} \subset G$ 为 ξ 的 H-轨迹,

$$T = \operatorname{Spec}(O_{G,\xi_1} \times_k \cdots \times_k O_{G,\xi_r}) \subset G \tag{1}$$

(即 $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$ 在 G 中的诱导概形结构), 则易见 $\alpha(H \times_k T)$ 的闭包为 $\bar{H} \times_k T$, 它在 T 上平坦。由此可见存在稠密开子概形 $U \subset G$ 使得 $\mathrm{pr}_1 : W \to \bar{G}$ 在 U 上平坦。

由命题 3 可见存在几何有理商 $\bar{G}/W$, 详言之可取 U 使得 $W' = W \cap (U \times_k U)$ 定义 U 上的等价关系, 它有泛几何商 $V = U/W'$, 投射 $U \to V$ 忠实平坦, 且 $U \times_V U \cong W'$。我们还可取 U 使得 $\alpha(H \times_k U) \subset U \times_k U$ (因为 $\alpha(H \times_k T) \subset T \times_k T$), 注意 α 是闭嵌入, 可见 $\alpha(H \times_k U)$ 是 $U \times_k U$ 的闭子概形, 从而等于 W', 故有 $H \times_k U \cong U \times_V U$。

对任意闭点 $g \in G$, 令 $\phi_g : G \to G$ 为 k-概形自同构 $g' \mapsto g'g$, 则有 $\alpha(H \times_k Ug) \subset Ug \times_k Ug$, 故有泛几何商 $V_g = Ug/H$。由商的泛性, 所有 V_g 粘起来给出一个泛几何商 G/H, 且投射 $G \to G/H$ 忠实平坦。

注意即使不假定 G 是拟射影的, 有理商 G/H 仍存在, 所以上面的构造仍可成立, 只是更复杂些 (但我们下面将看到 G 总是拟射影的, 见推论 X.2.1)。

情形 2: k 是代数闭的且 G 不是约化的, 这仅当 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$ 时才

可能发生。取 $r>0$ 使得 $F^r_{G/k}$ 经过 $G'=G^{(p^r)}_{\mathrm{red}}$, 注意 $\ker(G\to G')=G[F^r]\lhd G$, 可见 $\ker(H\to G')=H\cap G[F^r]\lhd H$。由于 $H\cap G[F^r]$ 是有限群概形, 由命题 4 可见有泛几何商 $X=G/(H\cap G[F^r])$, 而 $H'=H/(H\cap G[F^r])$ 为 G' 的闭子群概形, 且 H 在 G 上的左乘作用诱导 H' 在 X 上的作用, 与投射 $q:X\to G'$ 相容。只需证明泛几何商 X/H' 存在即可。

由情形 1 可知存在泛几何商 $Y=G'/H'$。令 $\mathcal{F}=q_*O_X$, 则由

$$\begin{aligned} G'\times_Y X &\cong (G'\times_Y G')\times_{G'} X\cong (H'\times_k G')\times_{G'} X\cong H'\times_k X \\ &\cong \alpha(H'\times_k X)\subset X\times_k X \end{aligned} \tag{2}$$

可见 $\mathcal{F}$ 满足推论 V.3.2 的条件, 故 $\mathcal{F}$ 可以下降到 Y, 给出 Y 上的一个代数层, 从而给出拓扑空间 Y 的一个概形结构 Y'。由 (2) 可见 Y' 为泛几何商 X/H'。

情形 3: 一般情形。令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则由情形 1 和情形 2 有泛几何商 $X_1=G\otimes_k\bar{k}/H\otimes_k\bar{k}$。由于 X_1 在 $\bar{k}$ 上是有限型的, 可取 k 的有限扩张 $k'\subset\bar{k}$ 使得商 X_1 定义在 k' 上, 即存在 k'-概形 X_0 使得 $X_1\cong X_0\otimes_{k'}\bar{k}$, 且有 k'-态射 $G\otimes_k k'\to X_0$ 使得其经过基变换 $k'\to\bar{k}$ 给出投射 $G\otimes_k\bar{k}\to X_1$。由命题 V.1.1 易见有 $X_0\cong G\otimes_k k'/H\otimes_k k'$。

由引理 1 可见可取 k' 使得 $\mathrm{Spec}(k')$ 为某个有限 k-群概形 G_0 的挠子。由命题 5 可知有 G_0 在 $G\otimes_k k'$ 和 $H\otimes_k k'$ 上的相容作用使得 $(G\otimes_k k')/G_0\cong G$, $(H\otimes_k k')/G_0\cong H$。由推出的泛性可见它诱导 G_0 在 X_0 上的作用, 再由命题 5 可知有泛几何商 $X=X_0/G_0$, 它是 k-概形且 $X\otimes_k k'\cong X_0$。由此易见 X 为泛几何商 G/H, 且投射 $G\to X$ 忠实平坦。

最后, 若 $H\lhd G$, 则按例 4 的方法可见 X 有一个群概形结构使得投射 $G\to X$ 是同态, 且其核为 H。证毕。

推论 2. 记 $\mathfrak{G}_k$ 为一个域 k 上的所有有限型群概形组成的范畴 (态射为同态)。

i) $\mathfrak{G}_k$ 中的任一同态 $f:G\to G'$ 可以典范地分解为投射 $G\to G/\ker(f)$ (为满同态) 与一个闭嵌入 $G/\ker(f)\hookrightarrow G'$ (为单同态) 的合成 (故 f 有像)。特别地, 若 f 是单射则 f 是闭嵌入; 若 f 是满射则 f 是忠实平坦的。

ii) 设 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{G}_k)$, H,N 为 G 的闭子群概形, 其中 $N\lhd G$。令 $X=$

$H \times_k N$, 则 X 有一个 k-群概形结构使得 $(h,n)\cdot(h',n') = (hh', h'^{-1}nh'n')$ (称为 H 和 N 的半直积并记为 $H \ltimes N$), 且 $(h,n) \mapsto hn$ 定义一个同态 $X \to G$, 其核同构于 $H \cap N$ (其像记为 HN)。若 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, 则可取光滑子群概形 H 和无穷小正规子群概形 N 使得 $G = HN \cong (H \ltimes N)/(H \cap N)$。

iii) 群论中的同构定理和分解定理均可建立在 $\mathfrak{G}_k$ 上, 具体说有:

a) 在 ii) 的条件下有典范同构 $H/(N \cap H) \cong NH/N$。

b) (Zassenhaus) 设 A_1, A_2, B_1, B_2 为 G 的子群概形, 且 $A_1 \triangleleft A_2$, $B_1 \triangleleft B_2$。令 $D_{ij} = A_i \cap B_j$ $(i,j = 1$ 或 $2)$。则 $A_1D_{21} \triangleleft A_1D_{22}$, $B_1D_{12} \triangleleft B_1D_{22}$, 且有典范同构 $A_1D_{22}/A_1D_{21} \cong B_1D_{22}/B_1D_{12}$。

c) (Schreier) G 的任两个正规群概形列有相互同构的加密 (这里"同构"的意思是在二者的因子集之间存在一个一一对应, 使得相互对应的因子同构。)

d) (Jordan-Hölder) 若 G 有合成群概形列, 则任两个合成群概形列同构。

iv) $\mathfrak{G}_k$ 中的所有交换群概形组成的全子范畴是阿贝尔范畴。

证. i) 记 $H = \ker(f)$。由命题 6 可知几何商群概形 G/H 存在, 且有诱导同态 $\phi: G/H \to G'$。由投射 $G \to G/H$ 忠实平坦可见 $\ker(\phi) = 0$, 故由命题 Ⅱ 1.2.ii) 可见 $G/H \to G'$ 是闭嵌入。

由于 $H' = \mathrm{im}(f)$ 是 G' 的闭子群概形, 由命题 6 有几何商 G'/H'。若 f 是单射则 $H = 0$, 从而 $G \cong G/H \to G'$ 是闭嵌入。若 f 是满射则 $H' \to G'$ 是满射, 从而 $H' \to G'/H'$ 是满射, 这仅当 $G'/H' \cong \mathrm{Spec}k$ 时才可能, 故 $H' = G'$, 从而 $G \to G' \cong G/H$ 忠实平坦。

ii) 前一个断言是显然的。

设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域。若 k 是代数闭的, 存在 $n \geqslant 0$ 使得 $F^n_{G/k}$ 经过 $G' = G^{(p^n)}_{\mathrm{red}}$, 故 $G/G[F^n] \cong G'$, 而 G' 是光滑的。对于一般的 k, 记 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则有 $(G/G[F^n]) \otimes_k \bar{k} \cong (G \otimes_k \bar{k})/(G \otimes_k \bar{k})[F^n]$, 故对充分大的 n, $G' = G/G[F^n]$ 在 k 上光滑。由 k 是完全域可见

$$G^{(p^{-n})}/G^{(p^{-n})}[F^n] \cong G'^{(p^{-n})} \hookrightarrow G \tag{3}$$

记 $H = G'^{(p^{-n})}$, 注意 $N = G[F^n] \lhd G$, 由前一个断言有典范同态 $f : H \ltimes N \to G$。由于 $G/N \cong G'$ 是几何约化的, 投射 $G'^{(p^{-n})} \to G'$ 忠实平坦, 由此可见 f 的余核为零, 从而 f 是满同态, 即 $G = HN$。

iii) 照搬群论中的证明即可。

iv) 由 i-iii) 立得。证毕。

特别地, 任一有限 k-群概形都有合成群概形列, 且合成因子在同构之下(不计次序)由 G 唯一决定。不过, G 为单群概形并不意味着 $G(\bar{k})$ ($\bar{k}$ 为 k 的代数闭包) 的群结构是单群 (参看例7)。注意α_p和μ_p都是单群概形。

习题

1. 设 $K \subset L$ 为有限伽罗瓦扩张, $H = \mathrm{Gal}(L/K)$。证明一个 K-群概形等价于一个 L-群概形 G 连同一个 H 在 G 上的作用 ρ, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H \times G \times_K G & \xrightarrow{\mathrm{id}_H \times m} & H \times G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\rho\circ \mathrm{pr}_{12}, \rho\circ \mathrm{pr}_{13})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ G \times_K G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

且与 H 在 L 上的作用一致。

2. 设 $K \subset L$ 为域的有限正规扩张。证明存在 K 上的有限群概形 G 使得 $\mathrm{Spec}(L)$ 为 K 上的 G-挠子。

3. 设 ρ 为对称群 $\mathfrak{S}_3$ 通过置换坐标在 $\mathbb{A}^3$ 上的作用, 它诱导交错群 $A_3 \subset \mathfrak{S}_3$ 在 $\mathbb{A}^3$ 上的一个作用。证明投射 $\mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3/\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{A}^3$ 平坦; 而投射 $\mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3/A_3$ 非平坦。类似地, 若 ρ' 为 $\mathfrak{S}_2$ 通过交换 $\mathbb{A}^4 \cong \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2$ 的两对坐标的作用, 则投射 $\mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4/\mathfrak{S}_2$ 也不平坦。(参看例 I.2.9。)

4. 设 $L \supset K$ 为有限域扩张, 证明 $G = \mathcal{A}ut(\mathrm{Spec}L/K)$ 在 $\mathrm{Spec}L$ 上的作用是可迁的。

5. 设 $L \supset K$ 为有限伽罗瓦扩张使得 $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_n$。对所有 K-群概形 G 使得 $G \otimes_K L$ 同构于 $\mathfrak{S}_n$ 的离散 L-群概形结构, 作完整的同构分类。

6. 证明例 8 的各断言。

7. 构造一个光滑射影代数簇 X, 在其上有一个有限非交换群的自由作用。(提示: 在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上取一个有限非交换群 G 的忠实作用, 它诱导 G 在 $V=(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^n$ $(n>1)$ 上的一个对角作用 ρ, 易见 ρ 在一个有限子集 $D\subset V$ 之外是自由的。令 $Y=V/G$ 而 $q:V\to Y$ 为投射, 则 Y 是射影簇且 q 在 $V-D$ 上的限制是光滑的。对足够一般的超曲面 $Z\subset Y$ 有 $q(D)\cap Z=\emptyset$, 故由例 Ⅳ.1.8 的讨论可见 Z 在 k 上光滑, 从而 $X=q^{-1}(Z)$ 在 k 上光滑, 且 ρ 诱导 G 在 X 上的一个自由作用。此外, 若 $O_Y(Z)$ 是丰富的则 X 是连通的 (参看 [H, Corollary Ⅲ.7.9]), 从而是整的。)

第 2 节 皮卡概形

1. 皮卡概形的存在性

引理 1. 设 S 为诺特概形, $\pi:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射且具有几何连通约化纤维, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。则存在 S 的闭子概形 S_0 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T\mapsto\{\text{态射 } f:T\to S \text{ 使得 } (\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L} \text{ 为 } T\text{-局部平凡的}\}$$

证. 设 X_0 为一个域 k 上的几何整射影概形, $\mathcal{L}_0$ 为 X_0 上的可逆层, 则易见 $\mathcal{L}_0\cong O_{X_0}$ 当且仅当 $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0)$ 和 $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0^{-1})$ 均非零。更一般地, 设 X_0 为一个域 k 上的几何连通约化射影概形, $\mathcal{L}_0$ 为 X_0 上的可逆层, 则 $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0)$ 的一个截口等价于一个 O_{X_0}-模层同态 $\phi:O_{X_0}\to\mathcal{L}_0$, $\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0^{-1})$ 的一个截口等价于一个 O_{X_0}-模层同态 $\psi:\mathcal{L}_0\to O_{X_0}$, 而 $\psi\circ\phi\in\mathrm{End}_{O_{X_0}}(O_{X_0})$ 等价于一个 O_{X_0} 的截口, 即 k 的一个元, 这给出一个 k-双线性映射 $H_{X_0,\mathcal{L}_0}:\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0)\times\Gamma(X_0,\mathcal{L}_0^{-1})\to k$, 易见 $\mathcal{L}_0\cong O_{X_0}$ 当且仅当这个双线性映射非零 (习题 3)。

不妨设 $S=\mathrm{Spec}R$。令 $\bar{S}_0=\{s\in S|H_{X_s,\mathcal{L}_s}\neq 0\}$, $S_1=\{s\in S|\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s)\neq 0,\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s^{-1})\neq 0\}$。由半连续性理论 (参看命题 I.3.1) 可知 S_1 为闭子集, 对其取约化的诱导概形结构并记 $i:S_1\to S$ 为嵌入。记 $F_1=\Gamma(S_1,(i\times_S\mathrm{id}_X)^*\mathcal{L})$, $F_2=\Gamma(S_1,(i\times_S\mathrm{id}_X)^*\mathcal{L}^{-1})$。设 ξ 为 S_1 的一般点, 则可取 ξ 的一个开邻域 $S_2\subset S_1$ 使得 F_1, F_2 在 S_2 上的限制是

局部自由的，且对任意 $s \in S_2$ 有 $\Gamma(X_s, \mathcal{L}_s) \cong F_1 \otimes_R \kappa(s)$，$\Gamma(X_s, \mathcal{L}_s^{-1}) \cong F_2 \otimes_R \kappa(s)$。由此可见若 $H_{X_\xi, \mathcal{L}_\xi} = 0$ 则对任意 $s \in S_2$ 均有 $H_{X_s, \mathcal{L}_s} = 0$。由此及诺特归纳法可见 $\bar{S}_0$ 为 S 中的闭集。

由半连续性理论可知存在有限秩自由 R-模的 R-同态 $\phi : M_0 \to M_1$ 使得对任意态射 $f : T = \operatorname{Spec} A \to S$ 有 $\Gamma(X \times_S T, (\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}) \cong \ker(\phi \otimes_R \mathrm{id}_A : M_0 \otimes_R A \to M_1 \otimes_R A)$。令 $M = \operatorname{coker}(\phi^\vee : M_1^\vee \to M_0^\vee)$，则有 $\ker(\phi \otimes_R \mathrm{id}_A) \cong Hom_R(M, A)$。特别地，对任意对应于 $\bar{S}_0$ 中点的极大理想 $P \subset R$ 有 $M/PM \cong R/P$，故存在 $\bar{S}_0$ 的开邻域 $U \subset S$ 使得 M 在 U 上局部由一个元生成，且 $\operatorname{Supp}(M) \cap U = \bar{S}_0$。注意若 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的，则 f 将 T 的点都映入 $\bar{S}_0$ 中。由此通过适当缩小 S 不妨设 $M \cong R/I$。另一方面，令 $J = \{\psi(1) | \psi \in Hom_R(R/I, A)\}$，则 J 为 A 的理想。若 $J \neq A$，则可取 A 的极大理想 $P \supset J$，于是 $Hom_R(R/I, A) \to Hom_R(R/I, A/P)$ 为零同态，故 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 在 P 附近不是局部平凡的。注意 $J = A$ 当且仅当 $f^*(I) = 0$，故若 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的则 f 经过 $\operatorname{Spec}(R/I)$。

同理，存在有限生成的 R-模 M' 使得 $\Gamma(X \times_S T, (\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}^{-1}) \cong Hom_R(M', A)$，且 M' 在 $\bar{S}_0$ 的一个开邻域 U' 上局部由一个元生成，使得 $\operatorname{Supp}(M') \cap U' = \bar{S}_0$。从而不妨设 $M' \cong R/I'$，而若 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的则 f 经过 $\operatorname{Spec}(R/I')$。由此有 $V(I + I') \supset \bar{S}_0$。反之，若 R 的素理想 $P \supset I + I'$，则 $\Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_R \kappa(P)) \cong \Gamma(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes_R \kappa(P)) \cong \kappa(P)$，从而若 $P \in U \cap U'$ 则 $P \in \bar{S}_0$。故 $V(I + I') \cap U \cap U' = \bar{S}_0$。这定义 $\bar{S}_0$ 的一个概形结构 $S_0 = V(I + I') \cap U \cap U'$。

我们来验证 S_0 满足引理的要求。注意对任意态射 $f : T = \operatorname{Spec} A \to S$，若 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的则 f 经过 $U \cap U'$，故不妨设 $S = U \cap U'$。由上所述对任意理想 $J \supset I + I'$ 有同构 $\Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_R (R/J)) \cong R/J$，这给出一个 O_X-模层同态 $\theta_J : O_X \otimes_R (R/J) \to \mathcal{L} \otimes_R (R/J)$，且当 J 是极大理想时 θ_J 为同构，故 θ_J 对任意 J 为同构 (参看引理 I.2.2.xii)，特别地 $\theta_{I+I'}$ 为同构，故若 f 经过 S_0 则 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 为 T-局部平凡的。另一方面，令 $J = \{\psi(1) | \psi \in Hom_R(R/I, A)\}$，则 J 为 A 的理想。若 $J \neq A$，取 A 的极大理想 $P \supset J$，则 $Hom_R(R/I, A) \to Hom_R(R/I, A/P)$ 为零同态，故 $(\mathrm{id}_X \times_S f)^* \mathcal{L}$ 在 P 附近不是局部平凡的。注意 $J = A$ 当且仅当

$f^*(I)=0$, 这说明若 $(\mathrm{id}_X\times_S f)^*\mathcal{L}$ 局部平凡则 $f^*(I)=0$, 同理 $f^*(I')=0$, 故 f 经过 S_0。证毕。

对任意概形 X, 在 I.4 节定义了 X 的皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$, 即所有 X 上的可逆层的同构类 (等价于直线丛的同构类) 以 $\otimes_{O_X}$ 为乘法组成的群。若 X 是整的, 则 $\mathrm{Pic}(X)$ 同构于 X 的 (卡迪耶) 除子类群。此外对于一个态射 $\pi: X\to S$ 定义了它的相对皮卡群 $\mathrm{Pic}(X/S)=\mathrm{Pic}(X)/\pi^*\mathrm{Pic}(S)$。当 π 为忠实平坦相对射影且具有几何连通约化纤维时, 对任意 $\mathcal{E}\in\mathrm{Pic}(S)$ 有 $\pi_*\pi^*\mathcal{E}\cong\mathcal{E}$, 这给出 $\pi^*:\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(X)$ 的一个截口, 从而可将 $\mathrm{Pic}(S)$ 看作 $\mathrm{Pic}(X)$ 的子群。如果给定 π 的一个截口 $\zeta: S\to X$, 则对 X 上的任一可逆层 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}\otimes_{O_X}(\zeta\circ\pi)^*\mathcal{L}^{-1}$ 满足 $\zeta^*\mathcal{L}_0\cong O_S$, 且对 S 上的任意可逆层 $\mathcal{E}$ 有 $(\mathcal{L}\otimes_{O_X}\pi^*\mathcal{E})_0\cong\mathcal{L}_0$, 这样我们可以用 $\mathcal{L}_0$ 作为 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 中的元的代表, 从而可以典范地将 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 看作 $\mathrm{Pic}(X)$ 的子群 (注意此时 $\pi^*:\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(X)$ 是单射, 实际上 $\mathrm{Pic}(X)$ 是 $\pi^*\mathrm{Pic}(S)$ 与 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 的直积), 在以下遇到这种情形时都照此理解。

设 S 为诺特概形, $\pi: X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 则对于任一希尔伯特多项式 χ 我们可以定义 $\mathrm{Pic}^{\chi}(X/S)$, 即 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 中 (纤维) 逆具有希尔伯特多项式 χ 的可逆层类组成的子集。

为方便起见我们用下面的术语: 设 $\pi: X\to S$ 为忠实平坦相对射影且具有几何连通约化纤维, 一个 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 称为**好的**, 如果对任意 $s\in S$ 及任意 $i>0$, $H^i(X_s,\mathcal{L}_s)=0$。此时由半连续性理论 (参看命题 I.3.1) 可知 $\mathcal{E}=\pi_*\mathcal{L}$ 是局部自由的且生成 $\mathcal{L}$, 而且对任意 $s\in S$ 有 $\mathcal{E}_s\cong\Gamma(X_s,\mathcal{L}_s)$。由命题 I.3.1 和推论 I.3.4 可知对 X 上的任意可逆理想层 $\mathcal{L}$, 存在仅与 $\chi_{\mathcal{L}^{-1}}(x)$ 有关的常数 $N=N(\chi)$ 使得 $\mathcal{L}(n)$ 当 $n\geqslant N$ 时是好的。

设 S-有效除子 $D\subset X$ 的理想层为 $\mathcal{I}$, 则 $O_X(D)\cong\mathcal{I}^{-1}$, 因此若 $\mathcal{L}(n)$ 是好的, 则一个满足 $O_X(D)\cong\mathcal{L}(n)$ 的 S-有效除子 D 的理想层的希尔伯特多项式为 $\chi_{\mathcal{L}^{-1}(-n)}(x)=\chi_{\mathcal{L}^{-1}}(x-n)$, 故

$$\chi_{O_D}(x)=\chi_{O_X}(x)-\chi_{\mathcal{L}^{-1}}(x-n)\tag{1}$$

对任一希尔伯特多项式 χ, 记

$$\chi_n(x)=\chi_{O_X}(x)-\chi(x-n)\tag{2}$$

存在典范映射 $\mathrm{Div}^{\chi_n}(X/S) \to \mathrm{Pic}^{\chi}(X/S)$ 将一个除子 D 映到 $O_X(D)(-n)$ 的等价类，由上所述对 $n \geqslant N(\chi)$ 这是满射。

定理 1. 设 $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射，具有几何整纤维，则对每个整值多项式 $\chi \in \mathbb{Q}[x]$，$\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Pic}^{\chi}_{X/S} : \ T \mapsto \mathrm{Pic}^{\chi}(X \times_S T/T)$$

有一个粗糙模概形 $\mathcal{P}ic^{\chi}(X/S)$，它在 S 上是相对拟射影的。而预层

$$\mathfrak{Pic}_{X/S} : \ T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)$$

有粗糙模概形 $\mathcal{P}ic(X/S) = \coprod_{\chi} \mathcal{P}ic^{\chi}(X/S)$ (称为 $X \to S$ 的*皮卡概形*)。如果 π 有一个截口 $\zeta : S \to X$，则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 为精细模概形，即在 $X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上有一个泛可逆层 $\mathcal{P}_{X/S}$ (称为 $X \to S$ 的*庞加莱层*)，此时 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 有典范的 S-群概形结构，其乘法由可逆层的张量积诱导。此外，若 π 是光滑的，则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 在 S 上是局部射影的，即每个连通分支在 S 上是相对射影的。

证． 为简单起见不妨设 S 是连通的，且不难约化到 S 是诺特概形的情形。

设 χ 为一个希尔伯特多项式。任取 $n \geqslant N(\chi)$，则由上所述对 π 的任意纤维上的可逆层 $\mathcal{L}$，若 $\chi_{\mathcal{L}^{-1}} = \chi$ 则 $\mathcal{L}(n)$ 是好的。记 $Y_1 = \mathcal{D}iv^{\chi_n}_{X/S}$，$D_1 \subset X \times_S Y_1$ 为泛除子，$\mathcal{L}' = O_{X \times_S Y_1}(D_1)$。则由上所述有 $\chi_{\mathcal{L}'^{-1}}(x) = \chi(x-n)$。由引理 1，存在闭子概形 $Y_2 \subset Y_1 \times_S Y_1$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的如下预层:

$$(\phi : T \to S) \mapsto \{\text{除子对 } D_{T1}, D_{T2} \in \mathrm{Div}^{\chi_n}(X \times_S T/T) \text{ 使得 } O_{X \times_S T}(D_{T1} - D_{T2}) \text{ 在 } T \text{ 上局部平凡}\}$$

由于 $O_{X \times_S T}(D_1 - D_2)$ 在 T 上局部平凡当且仅当 $D_2 \in |O_{X \times_S T}(D_1)/T|$，由定理 I.4.1 可见 $\mathrm{pr}_1 : Y_2 \to Y_1$ 为射影空间从。由抽象废话可见 Y_2 定义 Y_1 在 S 上的一个等价关系。故由引理 V.2.1 存在泛几何商 $Y = Y_1/Y_2$，它在 S 上是相对拟射影的，投射 $p : Y_1 \to Y = Y_1/Y_2$ 是忠实平坦相对射影的，且 $Y_2 = Y_1 \times_Y Y_1$。令 $Y_3 = Y_1 \times_Y Y_1 \times_Y Y_1$，则有投射 pr_{12}, pr_{13} 和 $\mathrm{pr}_{23} : Y_3 \to Y_2$。

设 π 有一个给定的截口 $\zeta : S \to X$, 则按上面的约定, $\mathcal{L}'$ 在 $\mathrm{Pic}(X \times_S Y_1/Y_1)$ 中的像为

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}' \otimes_{O_{X \times_S Y_1}} (((\zeta \circ \pi) \times_S \mathrm{id}_{Y_1})^* \mathcal{L}'^{-1} \tag{3}$$

由上所述在 $X \times_S Y_2 \subset X \times_S Y_1 \times_S Y_1$ 上有

$$\mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1 \cong \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{L}_1 \tag{4}$$

注意任意两个同构 (4) 相差一个 $\Gamma(X \times_S Y_2, O^*_{X \times_S Y_2})$ 中的因子, 而由 π 忠实平坦相对射影且具有几何整纤维可知

$$\Gamma(X \times_S Y_2, O^*_{X \times_S Y_2}) \cong \Gamma(Y_2, O^*_{Y_2}) \tag{5}$$

故有唯一同构 $\psi : \mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1 \to \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{L}_1$ 使得

$$(\zeta \times_S \mathrm{id}_{Y_2})^*(\psi) = \mathrm{id}_{O_{Y_2}} \tag{6}$$

由此可以保证在 $X \times_S Y_3$ 上有

$$\mathrm{pr}_{124}^*(\psi) = \mathrm{pr}_{134}^*(\psi) \circ \mathrm{pr}_{123}^*(\psi) : \mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{L}_1 \to \mathrm{pr}_{14}^* \mathcal{L}_1 \tag{7}$$

故由推论 V.3.2 可知存在 $X \times_S Y$ 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $\mathcal{L}_1 \cong p^* \mathcal{L}$。注意 $\chi_{\mathcal{L}^{-1}}(x) = \chi_{\mathcal{L}_1^{-1}}(x) = \chi(x - n)$。

我们来验证 $(Y, \mathcal{L}(-n))$ 代表 $\mathfrak{Pic}^{\chi}_{X/S}$。对任意 S-概形 T 及任意 $\mathcal{L}_T \in \mathrm{Pic}^{\chi}(X \times_S T/T)$, $\mathcal{E}_T = \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{L}_T(n)$ 是局部自由的。由定理 I.4.1 可知 $T_1 = \mathbb{P}_T(\mathcal{E}_T)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_T$ 上的预层 $T' \mapsto |\mathcal{L}_T/T'|$。记 $q : T_1 \to T$ 为投射, $D_T \subset X \times_S T_1$ 为泛除子, 则由命题 I.4.2 有

$$O_{X \times_S T_1}(D_T) \cong (\mathrm{id}_X \times_S q)^* \mathcal{L}_T(n) \otimes_{O_{T_1}} O_{T_1}(1) \tag{8}$$

由上所述有 $\chi_{D_T} = \chi_n$, 故由 Y_1 的泛性有诱导典范态射 $\phi_1 : T_1 \to Y_1$。令 $T_2 = T_1 \times_T T_1$, 则有两个 T_2-有效除子 $D_{T1} = \mathrm{pr}_1^* D_T$ 和 $D_{T2} = \mathrm{pr}_2^* D_T$, 使得 $O_{X \times_S T_2}(D_{T1} - D_{T2})$ 在 T_2 上局部平凡。由 Y_2 的泛性有诱导典范态射 $\phi_2 : T_2 \to Y_2$ 使得

$$\mathrm{pr}_i \circ \phi_2 = \phi_1 \circ \mathrm{pr}_i : T_2 \to Y_1 \quad (i = 1, 2) \tag{9}$$

由于 T 是 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : T_2 \to T_1$ 的推出，有诱导态射 $\phi : T \to Y$ 使得

$$p \circ \phi_1 = \phi \circ q : T_1 \to Y \tag{10}$$

由 (8) 易见 $\phi_1^* \mathcal{L}_1 \cong (p \circ \phi_1)^* \mathcal{L} \cong q^* \mathcal{L}_T(n)$，从而由 (10) 可见

$$\phi^* \mathcal{L}(-n) \cong \mathcal{L}_T \tag{11}$$

由上面的构造过程易见满足 (11) 的 ϕ 是唯一的，这说明 $(Y, \mathcal{L}(-n))$ 代表 $\mathfrak{Pic}^{\chi}_{X/S}$，故可记 $Y = \mathcal{P}ic^{\chi}(X/S)$，且记 $\mathcal{P}^{\chi}_{X/S} = \mathcal{L}(-n)$。

令 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 为所有 $\mathcal{P}ic^{\chi}(X/S)$ (对所有 χ) 的无交并，则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 为 S 上的局部拟射影概形，而所有 $\mathcal{P}^{\chi}_{X/S}$ 合起来给出 $X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的一个可逆层 $\mathcal{P}_{X/S}$。由上所述可见 $(\mathcal{P}ic(X/S), \mathcal{P}_{X/S})$ 代表 $\mathfrak{Pic}_{X/S}$。

注意 $W = X \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的可逆层

$$\mathrm{pr}_{12}^* \mathcal{P}_{X/S} \otimes_{O_W} \mathrm{pr}_{13}^* \mathcal{P}_{X/S} \tag{12}$$

诱导典范态射 $m : \mathcal{P}ic(X/S) \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$ (乘法)，O_X 给出单位截口 $o : S \to \mathcal{P}ic(X/S)$，$X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上的可逆层 $\mathcal{P}^{-1}_{X/S}$ 给出逆 $\iota : \mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$，易见这些合起来就给出 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的群概形结构。

注意上述构造 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的过程并不需要 π 的截口，且易见对任意态射 $S' \to S$ 有 $\mathcal{P}ic(X \times_S S'/S') \cong \mathcal{P}ic(X/S) \times_S S'$。此外投射 $\mathrm{pr}_2 : X \times_S X \to X$ 有一个截口 Δ。故即使没有给定 π 的截口，上述讨论仍可给出典范 X-态射 $T \times_S X \to \mathcal{P}ic(X/S) \times_S X$；再注意 T 是 pr_{12} 和 $\mathrm{pr}_{13} : T \times_S X \times_S X \to T \times_S X$ 的推出，即可见有典范诱导态射 $\phi : T \to Y$。故有自然变换 $F : \mathfrak{Pic}_{X/S} \to \underline{\mathcal{P}ic(X/S)}$。注意对任意 S-概形 S'，若 $\mathrm{pr}_2 : X' = X \times_S S' \to S'$ 有截口则 $\mathcal{P}ic(X/S) \times_S S'$ 是 $\mathfrak{Pic}_{X'/S'}$ 的精细模概形。特别地若 $S' = \mathrm{Spec}(k)$，k 为代数闭域，则 $\mathcal{P}ic(X/S) \times_S S'$ 是 $\mathfrak{Pic}_{X_k/k}$ 的精细模概形，从而

$$\mathcal{P}ic(X/S)(S') \cong \mathfrak{Pic}_{X/S}(S') \cong \mathrm{Pic}(X_k/k) \tag{13}$$

设 Z 为 S-概形而 $F' : \mathfrak{Pic}_{X/S} \to \underline{Z}$ 为自然变换。注意 $p : Y_1 \to Y$ 是由显然的自然变换 $\mathfrak{p} : \mathfrak{Div}^{\chi_n}_{X/S} \to \mathfrak{Pic}^{\chi}_{X/S}$ 诱导的，而 Y_1 是精细模概形，故由

米田引理可知 $F'\circ\mathfrak{p}$ 等价于一个 S-态射 $\psi_1: Y_1\to Z$; 同理有典范 S-态射 $\psi_2: Y_2\to Z$, 且由抽象废话有 $\psi_2=\psi_1\circ \mathrm{pr}_1=\psi_1\circ \mathrm{pr}_2$。由 Y 是 pr_1 和 pr_2 的泛几何推出可见有诱导态射 $\psi: Y\to Z$。由此不难得到 F' 经过 $\underline{\mathcal{P}ic(X/S)}$。这就证明了 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 是粗糙模空间。

在 π 光滑的情形, 由命题 I.4.4 可知每个 $\mathcal{D}iv^{X_n}_{X/S}$ 在 S 上是相对射影的, 故 $\mathcal{P}ic^{\chi}(X/S)$ 在 S 上是相对射影的。证毕。

简记 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的包含零截口 $S\to\mathcal{P}ic(X/S)$ 的最小既开又闭子概形为 $\mathcal{P}ic^{\tau}(X/S)$ (若 S 连通则它是包含零截口的连通分支)。

例 1. 我们来看 $S=\mathrm{Spec}k$ (k 为域) 的特殊情形。

先考虑 k 为代数闭域的情形。易见 $H=\mathcal{P}ic^{\tau}(X/k)$ 为 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的子群概形, 而$\mathcal{P}ic^0(X/k):=H_{\mathrm{red}}$ 是群簇 (参看命题 Ⅱ.1.1)。设 $V\subset\mathcal{P}ic(X/k)$ 为另一不可约分支, 任取 k-点 $x\in V$, 则 $x\cdot: H\to V$ 是 k-概形的同构, 因为它有逆 $x^{-1}\cdot: V\to H$。由此可见 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 作为概形是 H 的一些拷贝的无交并, 而 $\mathcal{P}ic(X/k)/H$ 具有离散的群概形结构。可以证明 $\mathcal{P}ic(X/k)/H$ 是有限生成的阿贝尔群 (参看 [LN]), 其自由部份称为 X 的 *Néron-Severi* 群, 记为 $\mathrm{NS}(X)$。

对一般的域 k, 由此可见 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的连通分支都是不可约的且具有相同的维数, 其中包含 0 的连通分支为子群概形且为几何不可约的 (参看命题 Ⅱ.1.1)。

若 X 是阿贝尔簇, 我们将看到 $\mathcal{P}ic^{\tau}(X/k)$ 也是阿贝尔簇 (故等于 $\mathcal{P}ic^0(X/k)$, 见下章命题 Ⅶ.1.2.ii))。

推论 1. 设 S 为诺特概形, $\pi: X\to S$ 和 $\pi': X'\to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维, 且 π 有一个截口 $\zeta: S\to X$。设 $f: X\to X'$ 为 S-态射 (这给出 π' 的一个截口 $f\circ\zeta$), 则 f 诱导 S-群概形的典范同态 $\hat{f}:\mathcal{P}ic(X'/S)\to\mathcal{P}ic(X/S)$。

证. 对任意 S-概形 T 及任意 $\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}(X'\times_S T/T)$, f 给出 $(f\times_S\mathrm{id}_T)^*\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}(X\times_S T/T)$, 显然这定义一个自然变换 $\mathfrak{Pic}_{X'/S}\to\mathfrak{Pic}_{X/S}$, 由米田引理这等价于一个 S-群概形的同态 $\mathcal{P}ic(X'/S)\to\mathcal{P}ic(X/S)$。

不难用纤维丛的语言给出另一个证明: 由 $X\times_S\mathcal{P}ic(X'/S)$ 上的可逆

层 $\mathcal{L} = (f \times_S \mathrm{id}_{\mathcal{P}ic(X'/S)})^* \mathcal{P}_{X'/S}$ 及 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的泛性，存在唯一 S-态射 $\hat{f} : \mathcal{P}ic(X'/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$ 使得 $(\mathrm{id}_X \times_S \hat{f})^* \mathcal{P}_{X/S} \cong \mathcal{L}$，且易见 $\hat{f}$ 是同态。证毕。

对 $S = \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ 的情形，我们来给出建立 $\mathcal{P}ic(X/S)$ (即 $\mathrm{Pic}(X/S)$ 的几何结构) 的解析方法。

我们先来说明，若 X 为域 k 上的射影代数簇，则有群同构 $H^1(O_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X/k)$。令 $\mathcal{K}$ 为 X 上的有理函数层，即对任意非空开子集 $U \subset X$ 有 $\mathcal{K}(U) = k(X)$。令 $\mathcal{C} = \mathcal{K}^*/O_X^*$，称为 Cousin data 层。对任意非空开子集 $U \subset X$，一个截口 $c \in \mathcal{C}(U)$ 相当于对 U 的一个开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 给出一组截口 $f_i \in \mathcal{K}(U_i)^*$，使得在每个交 $U_i \cap U_j$ $(i, j \in I)$ 上，$f_i/f_j \in O_X^*(U_i \cap U_j)$，这正是 U 中的一个卡迪耶除子。而 $\mathcal{K}(U)^*$ 的截口在 $\mathcal{C}(U)$ 中的象对应于主除子。由正合列 $0 \to O_X^* \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{C} \to 0$ 得长正合列

$$0 \to H^0(O_X^*) \to H^0(\mathcal{K}^*) \to H^0(\mathcal{C}) \to H^1(O_X^*) \to H^1(\mathcal{K}^*) \tag{14}$$

其中 $H^1(\mathcal{K}^*) = 0$，因为 $\mathcal{K}^*$ 是 flasque (参看 [H, Proposition Ⅲ.2.5])。由上所述 $H^0(\mathcal{C})$ 为 X 的卡迪耶除子群，而 $H^0(\mathcal{K}^*)$ 在 $H^0(\mathcal{C})$ 中的象为主除子全体，故

$$H^1(X, O_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X/k) \tag{15}$$

若 $k = \mathbb{C}$，记 X_{an} 为 X 的解析结构，即带有通常的拓扑，而 $O_{X_{\mathrm{an}}}$ 为 X_{an} 上的解析函数层。此时若将 (15) 的左边换为 $O_{X_{\mathrm{an}}}^*$ 作为 X_{an} 上的层的同调，则由 GAGA 定理 (见 [Se]) 可知 (15) 仍成立。

令 $\mathcal{Z}$ 为 X_{an} 上的预层 $U \mapsto 2\pi i\mathbb{Z}$ (对任意非空开子集 $U \subset X$) 的伴随层，则有正合列

$$0 \to \mathcal{Z} \to O_{X_{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\exp} O_{X_{\mathrm{an}}}^* \to 0 \tag{16}$$

由 (16) 得到长正合列，其中 $H^0(\mathcal{Z}) \cong 2\pi i\mathbb{Z}$，$H^0(O_{X_{\mathrm{an}}}) \cong \mathbb{C}$，$H^0(O_{X_{\mathrm{an}}}^*) \cong \mathbb{C}^*$，而 $0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \to 0$ 是正合的，故有正合列

$$0 \to H^1(\mathcal{Z}) \to H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}) \to H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathcal{Z}) \tag{17}$$

其中 c_1 为“第一陈类”映射，$H^1(\mathcal{Z}) \cong H^1_{\mathrm{sing}}(X_{\mathrm{an}})$ 和 $H^2(\mathcal{Z}) \cong H^2_{\mathrm{sing}}(X_{\mathrm{an}})$ 是有限生成的阿贝尔群，$H^1(O_{X_{\mathrm{an}}}) \cong \mathbb{C}^g$ (g 为整数)，而由上所述 (及

GAGA 定理) $H^1(O^*_{X_{\text{an}}}) \cong \text{Pic}(X/\mathbb{C})$。由此可见 $\text{Pic}^0(X/\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$, 其中 $\Lambda = H^1(\mathcal{Z})$, 而 $\text{Pic}(X/\mathbb{C})/\text{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 同构于 $H^2_{\text{sing}}(X_{\text{an}})$ 的一个子群 (其自由部份即 $\text{NS}(X)$)。若 X 是光滑的, 则 $\text{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 是紧致的 (即为阿贝尔簇), 此时 $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ 为格, 而解析映射 $\mathbb{C}^g \to \text{Pic}^0(X/\mathbb{C})$ 由 Θ-函数给出。

例 2. 在类域论中我们看到下面的对应:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q} & \text{虚二次域 } K \supset \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}_{ab} & K_{ab} \\ \text{指数函数} & \text{椭圆函数} \\ \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} & \text{椭圆曲线 } E \cong \mathbb{C}/\Lambda \end{array} \tag{18}$$

这并不仅仅是类比, 因为对 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线 E, 由上所述可见 $\Lambda = H^1(\mathcal{Z})$ 为 $H^1(O_{E_{\text{an}}}) \cong \mathbb{C}$ 中的格, 投射 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda \cong \text{Pic}^0(E/\mathbb{C}) \cong E$ 由指数映射诱导, 而它是由椭圆函数给出的。

设 S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维且有一个截口 $\zeta : S \to X$, 则由夫罗贝纽斯的典范性及皮卡概形的泛性有典范同构 $\mathcal{P}ic(X^{(p)}/S) \cong \mathcal{P}ic(X/S)^{(p)}$, 且 $\mathcal{P}_{X^{(p)}/S} \cong \mathcal{P}^{(p)}_{X/S}$。而由相对夫罗贝纽斯的典范性, $F_{X/S}$ 诱导典范同态 $V_{\mathcal{P}ic(X/S)/S} : \mathcal{P}ic(X/S)^{(p)} \to \mathcal{P}ic(X/S)$, 称为一个移位同态 (Verschiebung, 参看 VII.2 节)。显然 $V_{\mathcal{P}ic(X/S)/S}$ 诱导一个 S-态射 $V_{\mathcal{P}ic(X/S)^\tau/S} : \mathcal{P}ic(X/S)^{\tau(p)} \to \mathcal{P}ic^\tau(X/S)$, 我们滥用记号将 $\mathcal{P}_{X/S}$ 在 $X \times_S \mathcal{P}ic^\tau(X/S)$ 上的限制也记为 $\mathcal{P}_{X/S}$, 且将 $V_{\mathcal{P}ic^\tau(X/S)/S}$ 称为移位态射。

命题 1. 设 S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维且有一个截口 $\zeta : S \to X$, 则

$$V_{\mathcal{P}ic(X/S)/S} \circ F_{\mathcal{P}ic(X/S)/S} = p_{\mathcal{P}ic(X/S)} \tag{19}$$

证. 我们注意, 对任意 $\mathbb{F}_p$-概形 T 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有 $F_T^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^p$。简记 $Y = \mathcal{P}ic(X/S)$, 由皮卡概形的定义和移位同态的定义有

$$\begin{aligned}(\text{id}_X \times_S (V_{Y/S} \circ F_{Y/S}))^*\mathcal{P}_{X/S} &\cong (\text{id}_X \times_S F_{Y/S})^* \circ (\text{id}_X \times_S V_{Y/S})^*\mathcal{P}_{X/S} \\ &\cong (\text{id}_X \times_S F_{Y/S})^* \circ (F_{X/S} \times_S \text{id}_{Y^{(p)}})^*\mathcal{P}^{(p)}_{X/S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cong (F_{X/S}\times_S F_{Y/S})^*\mathcal{P}^{(p)}_{X/S}\\&\cong F^*_{X\times_S Y/S}\mathcal{P}^{(p)}_{X/S}\\&\cong F^*_{X\times_S Y}\mathcal{P}_{X/S}\cong \mathcal{P}^p_{X/S}\end{aligned} \tag{20}$$

另一方面, 由皮卡概形的群概形结构的定义有 $(\mathrm{id}_X\times_S p_Y)^*\mathcal{P}_{X/S}\cong \mathcal{P}^p_{X/S}$, 故由 (20) 和皮卡概形的泛性有 $V_{Y/S}\circ F_{Y/S}=p_Y$。证毕。

注意 (19) 给出

$$V_{\mathcal{P}ic^\tau(X/S)/S}\circ F_{\mathcal{P}ic^\tau(X/S)/S}=p_{\mathcal{P}ic^\tau(X/S)} \tag{21}$$

2. 群概形的作用在皮卡概形上的诱导作用

以下的 S 为诺特概形。若 G 为 S-群概形, 记 G^{op} 为如下群概形: 作为 S-概形 $G^{\mathrm{op}}=G$, 而 $m_{G^{\mathrm{op}}}=m_G\circ e$, 其中态射 $e:G\times_S G\to G\times_S G$ 为交换因子 (不难验证这给出 G^{op} 的一个 S-群概形结构)。

命题 2. 设 $\tau:X\to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维和截口 $\zeta:S\to X$; $\pi:G\to S$ 为有限型分离群概形; $\rho:G\times_S X\to X$ 为作用。则 ρ 诱导 G^{op} 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的典范自同构作用。

证. 令 $\Phi=(\mathrm{pr}_1,\rho):G\times_S X\to G\times_S X$ 为 ρ 所对应的 $\mathrm{Aut}(G\times_S X/G)$ 中的元。注意由皮卡概形的泛性有 $\mathcal{P}ic(G\times_S X/G)\cong G\times_S\mathcal{P}ic(X/S)$, 其庞加莱层为 $\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}_{X/S}$, 其中 pr_{23} 为投射

$$(G\times_S X)\times_G(G\times_S\mathcal{P}ic(X/S))\cong G\times_S X\times_S\mathcal{P}ic(X/S)\to X\times_S\mathcal{P}ic(X/S) \tag{1}$$

由推论 1 可见自同构 $\Phi\in\mathrm{Aut}(G\times_S X/G)$ 诱导 $G\times_S\mathcal{P}ic(X/S)$ 作为 G-群概形的自同构 $\hat{\Phi}$。记 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_{12}\in\mathrm{Aut}(G\times_S G\times_S X/G\times_S G)$ 分别为 $(g_1,g_2,x)\mapsto(g_1,g_2,g_1x)$, $(g_1,g_2,x)\mapsto(g_1,g_2,g_2x)$, 和 $(g_1,g_2,x)\mapsto(g_1,g_2,(g_1g_2)x)$, 由 ρ 是作用有

$$\mathrm{pr}_2\circ\Phi\circ(m_G\times_S\mathrm{id}_X)=\mathrm{pr}_3\circ\mathrm{pr}_{13}^*(\Phi)\circ\mathrm{pr}_{23}^*(\Phi):G\times_S G\times_S X\to X \tag{2}$$

由引理 Ⅱ.2.1 这等价于 $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_{12}$, 故

$$\hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_{12} \in \mathrm{Aut}(G \times_S G \times_S \mathcal{P}ic(X/S)/G \times_S G) \tag{3}$$

注意 $\Phi_i = \mathrm{pr}_{i3}^*(\Phi)$ $(i=1,2)$, 故 $\hat{\Phi}_i = \mathrm{pr}_{i3}^*(\hat{\Phi})$ $(i=1,2)$。由 (3) 可见在 $G \times_S G \times_S X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 上有

$$\begin{aligned} &(\mathrm{id}_X \times_S \hat{\Phi}_{12})^* \mathrm{pr}_{34}^* \mathcal{P}_{X/S} \\ \cong &(\Phi_{12} \times_S \mathrm{id}_{\mathcal{P}ic(X/S)})^* \mathrm{pr}_{34}^* \mathcal{P}_{X/S} \\ \cong &(m_G \times_S \mathrm{id}_{X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)})^* (\Phi \times_S \mathrm{id}_{\mathcal{P}ic(X/S)})^* \mathrm{pr}_{23}^* \mathcal{P}_{X/S} \\ \cong &(m_G \times_S \mathrm{id}_{X \times_S \mathcal{P}ic(X/S)})^* (\mathrm{id}_X \times_S \hat{\Phi})^* \mathrm{pr}_{23}^* \mathcal{P}_{X/S} \\ \cong &(\mathrm{id}_X \times_S (\hat{\Phi} \circ (m_G \times_S \mathrm{id}_{\mathcal{P}ic(X/S)})))^* \mathrm{pr}_{34}^* \mathcal{P}_{X/S} \end{aligned} \tag{4}$$

由 (3), (4) 及 $\mathcal{P}_{X/S}$ 的泛性得

$$\mathrm{pr}_2 \circ \hat{\Phi}_2 \circ (m \times_S \mathrm{id}_{\mathcal{P}ic(X/S)})) = \mathrm{pr}_3 \circ \hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1 \tag{5}$$

这说明若用 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 取代 X, $\hat{\Phi}$ 取代 Φ, G^{op} 取代 G 则 (2) 仍成立, 从而由引理 Ⅱ.2.1 可知 $\hat{\rho} = \mathrm{pr}_2 \circ \hat{\Phi} : G \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(X/S)$ 为 G^{op} 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的自同构作用。证毕。

注 1. 命题 2 也可以用预层的语言证明。由习题 Ⅱ.2.7 可知 ρ 等价于一个群预层自然变换 $\underline{G} \to \mathfrak{Aut}_{X/S}$。对任意 $T \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sch}_S)$, 任意 $g \in \underline{G}(T)$ 给出一个 T-自同构 $g_* \in \mathrm{Aut}(X \times_S T/T)$, 从而给出一个阿贝尔群自同构 $g^* : \mathrm{Pic}(X \times_S T/T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T/T)$, 易见这些 g^* 合起来给出一个自然变换 $P : \underline{G}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{Pic}_{X/S} \to \mathfrak{Pic}_{X/S}$。由于 $\mathfrak{Pic}_{X/S}$ 与 $\underline{\mathcal{P}ic(X/S)}$ 自然等价, 由抽象废话可见 P 等价于一个 G^{op} 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的作用 (习题 2)。

命题 3 ([L-2]). 设 $\tau : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维和一个截口 $\zeta : S \to X$; $\pi : G \to S$ 为有限平坦交换群概形。设 $\rho : G \times_S X \to X$ 为自由作用, $Y = X/\rho = X/G$, $f : X \to Y$ 为投射。则有典范同构 $\ker(\hat{f}) \cong G^D$。

证. 对任意 S-概形 T 简记 $X_T = X \times_S T$, 等等。

令 $G' = \ker(\hat{f})$, 则易见 G' 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y_T/T) | (f \times_S \mathrm{id}_T)^* \mathcal{L} \cong O_{X_T}\}$$

设 $p : L \to Y_T$ 为直线丛，令其在 X_T 上的拉回为 $p' : L' = L \times_Y X \to X_T$。注意 $L' \times_L L' \cong L \times_Y X \times_Y X \cong G_T \times_T L'$。不难验证 $\mathrm{pr}_1 : L' \times_L L' \to L'$ 给出一个 G_T 在 L' 上的作用 ρ_{T1}，这个作用是线性的 (即 ρ_{T1} 与 $\mathbb{G}_m$ 在 L' 上的作用交换)，且有 $L'/G_T \cong L$ 及交换图

$$\begin{array}{ccc} G_T \times_T L' & \xrightarrow{\rho_{T1}} & L' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{G_T} \times_T p'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ G_T \times_T X_T & \xrightarrow{\rho_T} & X_T \end{array} \tag{6}$$

其中 ρ_T 为 G_T 在 X_T 上的作用。反之，若直线丛 $L' \to X_T$ 上有与 ρ_T 相容的线性作用 $\rho_{T1} : G_T \times_T L' \to L'$，则有闭嵌入 $G_T \times_T L' \to X_T \times_T L'$，由此可见 ρ_{T1} 为自由作用，而 L'/G_T 为 Y_T 上的直线丛。故有典范一一对应

$\{Y_T$ 上的直线丛$\} \leftrightarrow \{X_T$ 上的直线丛带有与 ρ_T 相容的 G_T 的线性作用$\}$

特别地，若 L 对应于上述可逆层 $\mathcal{L}$，则 $(f \times_S \mathrm{id}_T)^* \mathcal{L} \cong O_{X_T}$ 等价于 $L' \cong \mathbb{A}^1_T \times_T X_T$。为简单起见不妨设 $T = \mathrm{Spec}R$，$G_T = \mathrm{Spec}A$，则 $\mathbb{A}^1_T \cong \mathrm{Spec}(R[x])$。一个作用 ρ_{T1} 给出 $(\mathrm{pr}_1 \circ \rho_{T1})^* : R[x] \to \Gamma(G_T \times_T L', O_{G_T \times_T L'}) \cong A \otimes_R R[x]$，从而诱导线性作用 $\rho_{T0} : G_T \times_T \mathbb{A}^1_T \to \mathbb{A}^1_T$。注意 G_T 在 $\mathbb{A}^1_T$ 上的一个线性作用等价于一个 T-群概形同态 $G_T \to \mathbb{G}_{m/T}$。故有典范一一对应

$$\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y_T/T) | (f \times_S \mathrm{id}_T)^* \mathcal{L} \cong O_{X_T}\} \leftrightarrow \mathrm{Hom}_T(G_T, \mathbb{G}_{m/T})$$

由命题 Ⅲ.4.1 可知，后者与 $\mathrm{Mor}_T(T \to G_T^D)$ 典范一一对应。故 $G' \cong G^D$。证毕。

3. 皮卡概形的李代数

设 X 是域 k 上的射影代数簇且有一个 k-点。令 $T = \mathrm{Spec}k[t]/(t^2)$，$i : \mathrm{Spec}k \to T$ 为嵌入。由定理 1 可知，$X \times_k T$ 上的一个可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $(\mathrm{id}_X \times_k i)^* \mathcal{L} \cong O_X$ 等价于一个 k-态射 $\phi : T \to \mathcal{P}ic(X/k)$ 使得 $\phi \circ i =$

$o_{\mathcal{P}ic(X/k)}$, 由推论 Ⅳ.3.2 可见这又等价于 $Lie(\mathcal{P}ic(X/k)/k)$ 的一个元。将 $O_{X\times_k T}$ 和 $\mathcal{L}$ 看作 X 上的层, 则有 X 上的阿贝尔群层的正合列

$$0 \to O_X \xrightarrow{\psi} O^*_{X\times_k T} \xrightarrow{(\mathrm{id}_X\times_k i)^*} O^*_X \to \{1\} \tag{1}$$

其中 ψ 为 $a \mapsto 1+ta$。注意 $(\mathrm{id}_X \times_k i)^*$ 分裂, 由 (1.15) 可见有正合列

$$0 \to H^1(X, O_X) \to \mathrm{Pic}(X \times_k T/T) \to \mathrm{Pic}(X/k) \to 0 \tag{2}$$

但由上所述

$$\ker(\mathrm{Pic}(X \times_k T/T) \to \mathrm{Pic}(X/k)) \cong Lie(\mathcal{P}ic(X/k)/k) \tag{3}$$

故有自然同构

$$Lie(\mathcal{P}ic(X/k)/k) \cong H^1(X, O_X) \tag{4}$$

我们下面换一个方法理解 (4)。

设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何连通约化纤维, 且有一个截口。令 $T = S \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[t]/(t^2)$, $i : S \to T$ 为嵌入, $X_T = X\times_S T$。设 $\mathcal{L}$ 为 X_T 上的一个可逆层使得 $(\mathrm{id}_X\times_S i)^*\mathcal{L} \cong O_X$, 则由定理 1 易见 $\mathcal{L}$ 等价于一个 S-态射 $\phi : T \to \mathcal{P}ic(X/S)$ 使得 $\phi\circ i = o_{\mathcal{P}ic(X/S)}$, 由推论 Ⅳ.3.2 可见这又等价于 $Lie(\mathcal{P}ic(X/S)/S)$ 的一个截口。由此得

$$\Gamma(S, Lie(\mathcal{P}ic(X/S)/S)) \cong \ker((\mathrm{id}_X \times_S i)^* : \mathrm{Pic}(X_T/T) \to \mathrm{Pic}(X/S)) \tag{5}$$

将 $O_{X\times_S T}$ 和 $\mathcal{L}$ 看作 X 上的层, 易见有正合列

$$0 \to O_X \xrightarrow{t\cdot} \mathcal{L} \xrightarrow{(\mathrm{id}_X\times_S i)^*} O_X \to 0 \tag{6}$$

故 $\mathcal{L}$ 可看作 $\mathrm{Ext}^1_{O_X}(O_X, O_X) \cong H^1(X, O_X)$ 的一个元; 反之, 若 $\mathcal{L}$ 为 O_X 通过 O_X 的一个扩张, 即有一个 O_X-模层正合列

$$0 \to O_X \xrightarrow{j} \mathcal{L} \xrightarrow{q} O_X \to 0 \tag{7}$$

对 $\mathcal{L}$ 的任一局部截口 s 定义 $ts = j\circ q(s)$, 不难验证这给出 $\mathcal{L}$ 一个 O_{X_T}-模层结构, 且 $(\mathrm{id}_X \times_S i)^*\mathcal{L} \cong O_X$。由此可见有自然同构

$$H^1(X, O_X) \cong \ker((\mathrm{id}_X \times_S i)^* : \mathrm{Pic}(X_T/T) \to \mathrm{Pic}(X/S)) \tag{8}$$

再由 (5) 得自然同构

$$\Gamma(S, Lie(\mathcal{P}ic(X/S)/S)) \cong H^1(X, O_X) \tag{9}$$

注意 (9) 对任意 S 成立, 故有自然同构

$$Lie(\mathcal{P}ic(X/S)/S) \cong R^1\pi_* O_X \tag{10}$$

总之有

命题 4. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何连通约化纤维, 且有一个截口, 则有 O_S-模层的自然同构 (10)。特别地, 若 X 是域 k 上的射影代数簇且有一个 k-点, 则有自然的 k-线性同构 (4)。

习题

1. 设$C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$为三次光滑曲线$X_0^3+2X_1^3+4X_2^3=0$。证明 $\mathcal{P}ic^1(C/\mathbb{Q})$ 没有有理点, 从而 $\mathcal{P}ic(C/\mathbb{Q})(\mathbb{Q})/\mathcal{P}ic^0(C/\mathbb{Q})(\mathbb{Q})$ 是 $(\mathcal{P}ic(C/\mathbb{Q})/\mathcal{P}ic^0(C/\mathbb{Q}))(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}$ 的真子群, 并计算这个子群。

2. 按照注 1 的途径, 用预层的语言证明命题 2。

3. 设 X 为一个代数闭域 k 上的连通约化射影概形, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。注意 $\Gamma(X, \mathcal{L})$ 的一个截口等价于一个 O_X-模层同态 $\phi : O_X \to \mathcal{L}$, $\Gamma(X, \mathcal{L}^{-1})$ 的一个截口等价于一个 O_X-模层同态 $\psi : \mathcal{L} \to O_X$, 而 $\psi \circ \phi \in \mathrm{End}_{O_X}(O_X)$ 等价于一个 $\Gamma(X, O_X) \cong k$ 的一个截口, 这给出一个 k-双线性映射 $H_{X,\mathcal{L}} : \Gamma(X, \mathcal{L}) \times \Gamma(X, \mathcal{L}^{-1}) \to k$。证明 $\mathcal{L} \cong O_X$ 当且仅当 $H_{X,\mathcal{L}} \neq 0$。

第 VII 章　阿贝尔簇与阿贝尔概形

第 1 节　一些基本性质

1. 刚性

以下的群概形如无特别说明均假定是分离的。

引理 1 (刚性引理). 设 S 为连通诺特概形, $\pi : X \to S$ 为具有几何连通约化纤维的忠实平坦紧态射。设 Y 为任意概形而 $f : X \to Y$ 为态射, 若 f 将 π 的某个纤维映到 Y 的一个点, 则存在态射 $\phi : S \to Y$ 使得 $f = \phi \circ \pi$。

证. 设 f 将 π 的纤维 X_s $(s \in S)$ 映到 $y \in Y$。

情形 1: π 有一个截口 ζ。令 $\phi = f \circ \zeta$。易见有一个极大闭子概形 $X_0 \subset X$ 使得 $f|_{X_0} = \phi \circ \pi|_{X_0}$。任取 y 的一个仿射开邻域 $U = \mathrm{Spec}A \subset Y$, 令 $T_0 = S - \pi(X - f^{-1}(U)) \subset S$, 则 T_0 为包含 s 的开集, 且 $\pi^{-1}(T_0) \subset f^{-1}(U)$。任取包含 s 的仿射开子集 $T = \mathrm{Spec}R \subset T_0$, 则 $f|_{\pi^{-1}(T)} : \pi^{-1}(T) \to U$ 由一个同态 $A \to \Gamma(\pi^{-1}(T), O_X) \cong R$ (因为 π 具有几何连通约化纤维) 给出, 故经过 T, 从而 $f|_{\pi^{-1}(T)} = \phi \circ \pi|_{\pi^{-1}(T)}$, 即 $\pi^{-1}(T) \subset X_0$。由此可见对任意 $s' \in S$, 若 $f(X_{s'})$ 为一个点, 则存在 s' 的开邻域 T' 使得 $\pi^{-1}(T') \subset X_0$。换言之, 令 $V = \{s' \in S | f(X_{s'})$ 为一个点$\}$, 则 V 为 S 中的开集。另一方面, 易见 $V = S - \pi(X - X_0)$, 而由 π 平坦及 $X - X_0$ 是 X 中的开集可见 $\pi(X - X_0)$ 是 S 中的开集, 从而 V 是 S 中的闭集。这样由 $s \in V$ 及 S 连通就有 $V = S$, 从而 $X_0 \supset \pi^{-1}(V) = X$。这说明 $f = \phi \circ \pi$。

情形 2: 一般情形。令 $X' = X \times_S X$, 则 $\pi' = \mathrm{pr}_2 : X' \to X$ 有一个截口 Δ。令 $f' = f \circ \mathrm{pr}_1 : X' \to Y$, 则 f' 将 $\pi'^{-1}(X_s)$ 映到 $y \in Y$, 故由情形 1 可知存在态射 $\phi' : X \to Y$ 使得 $f' = \phi' \circ \pi'$。但由命题 V.1.1 可知 S 为 π' 和 $\mathrm{pr}_1 : X' \to X$ 的推出, 故存在态射 $\phi : S \to Y$ 使得 $f = \phi \circ \pi$。证毕。

推论 1 (立方定理). 设 S 为诺特概形, $X\to S$, $Y\to S$ 为具有几何整纤维的忠实平坦相对射影态射, Z 为连通诺特 S-概形, 其中 $X\to S$, $Z\to S$ 有截口。则对 $X\times_S Y\times_S Z$ 上的任意可逆层 $\mathcal{M}$, 存在 $X\times_S Y$ 上的可逆层 $\mathcal{E}$, $X\times_S Z$ 上的可逆层 $\mathcal{F}$ 及 $Y\times_S Z$ 上的可逆层 $\mathcal{G}$ 使得

$$\mathcal{M}\cong \mathrm{pr}_{12}^*\mathcal{E}\otimes_{O_{X\times_S Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_{13}^*\mathcal{F}\otimes_{O_{X\times_S Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{G} \tag{1}$$

此外, 若 $Y\to S$ 也有截口, 任意分别取 $X\to S$, $Y\to S$, $Z\to S$ 的截口 ζ_X, ζ_Y, ζ_Z, 则 $\mathcal{M}$ 在同构之下由 $\mathcal{M}_X=(\zeta_X\times_S \mathrm{id}_Y\times_S \mathrm{id}_Z)^*\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_Y=(\mathrm{id}_X\times_S\zeta_Y\times_S\mathrm{id}_Z)^*\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_Z=(\mathrm{id}_X\times_S\mathrm{id}_Y\times_S\zeta_Z)^*\mathcal{M}$ 唯一决定。

证. 令 $\zeta: S\to Z$ 为 $Z\to S$ 的一个截口, $\mathcal{E}=(\mathrm{id}_{X\times_S Y}\times_S\zeta)^*\mathcal{M}$, $\mathcal{N}=\mathcal{M}\otimes_{O_{X\times_S Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_{12}^*\mathcal{E}^{-1}$, 则

$$(\mathrm{id}_{X\times_S Y}\times_S\zeta)^*\mathcal{N}\cong O_{X\times_S Y} \tag{2}$$

由定理 Ⅵ.2.1 可知 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 存在, 故有 S-态射 $\phi: Y\times_S Z\to\mathcal{P}ic(X/S)$ 及 $Y\times_S Z$ 上的可逆层 $\mathcal{G}$ 使得

$$\mathcal{N}\cong(\mathrm{id}_X\times\phi)^*\mathcal{P}_{X/S}\otimes_{O_{X\times_S Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{G} \tag{3}$$

由 (2) 有 $\phi|_{Y\times_S\zeta(S)}=0$, 故由引理 1 (及 Z 连通) 可见存在态射 $\psi: Z\to\mathcal{P}ic(X/S)$ 使得 $\phi=\psi\circ\mathrm{pr}_2$。令 $\mathcal{F}=(\mathrm{id}_X\times\psi)^*\mathcal{P}_{X/S}$, 则由 (3) 有

$$\mathcal{N}\cong\mathrm{pr}_{13}^*\mathcal{F}\otimes_{O_{X\times_S Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{G} \tag{4}$$

从而 (1) 成立。

若 $Y\to S$ 也有截口, 分别取 $X\to S$, $Y\to S$, $Z\to S$ 的截口 ζ_X, ζ_Y 及 $\zeta_Z=\zeta$。则 $\mathcal{M}_Z=\mathcal{E}$。对 (3) 应用 $(\zeta_X\times_S\mathrm{id}_Y\times_S\mathrm{id}_Z)^*$ 可见 $(\zeta_X\times_S\mathrm{id}_Y\times_S\mathrm{id}_Z)^*\mathcal{N}\cong\mathcal{G}$, 故 $\mathcal{G}\cong\mathcal{M}_X\otimes_{O_{Y\times_S Z}}\mathrm{pr}_1^*(\zeta_X\times_S\mathrm{id}_Y)^*\mathcal{E}^{-1}$, 从而在同构之下由 $\mathcal{M}_X$ 和 $\mathcal{M}_Z$ 决定。再对 (1) 应用 $(\mathrm{id}_X\times_S\zeta_Y\times_S\mathrm{id}_Z)^*$ 可见 $\mathcal{F}$ 在同构之下由 $\mathcal{M}_Y$ 和 $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ 决定。故由 (1) 可见 $\mathcal{M}$ 在同构之下由 $\mathcal{M}_X$, $\mathcal{M}_Y$ 和 $\mathcal{M}_Z$ 唯一决定。证毕。

推论 2. 设 S 为诺特概形而 $\pi: X \to S$ 为阿贝尔概形 (看作加法群概形)。

i) X 是交换群概形。

ii) 设 Y 为 S-群概形 (看作加法群概形) 而 $f: X \to Y$ 为 S-态射, 则存在同态 $h: X \to Y$ 及 $Y \to S$ 的截口 $\zeta = f \circ o_X$ 使得 $f = h + \zeta \circ \pi$ (即 f 等于一个同态与一个平移的合成)。特别地, 若 $f \circ o_X = o_Y$ 则 f 是同态。此外, 若 $Y \to S$ 平坦且具有几何约化纤维而 f 作为集合映射为满射, 则 f 是平坦的。

iii) 设 T 为 S-概形而 $f, g, h: T \to X$ 为 S-态射, 则对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有

$$\begin{aligned}&(f+g+h)^*\mathcal{L}\\ \cong&(f+g)^*\mathcal{L} \otimes_{O_T} (f+h)^*\mathcal{L} \otimes_{O_T} (g+h)^*\mathcal{L} \otimes_{O_T} f^*\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_T} g^*\mathcal{L}^{-1} \otimes\\ &{}_{O_T} h^*\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_T} 0^*\mathcal{L}\end{aligned} \tag{5}$$

iv) ([L-2]) 设 $G \to S$ 为有限型群概形, 具有连通纤维, ρ 为 G 在 X 上的作用。则 $h = \rho \circ (\mathrm{id}_G \times_S o_X): G \to X$ 为同态且 $\rho = m_X \circ (h \times_S \mathrm{id}_X)$ (简言之 G 在 X 上的作用都是平移)。特别地, 若 π 有一个截口 $s: S \to X$ 使得 $\rho \circ (\mathrm{id}_G \times_S s)$ 为闭嵌入, 则 h 将 G 嵌入 X 为闭子群概形 (此时 G 是交换的)。

证. i) 令 $f: X \times_S X \to X$ 为 $(x, y) \mapsto x + y - x - y$, 则 $f|_{X \times_S o_X(S)} = 0$, 应用引理 1 于 $\mathrm{pr}_2: X \times_S X \to X$ 就得到 $f = f \circ ((o \circ \pi) \times_S \mathrm{id}_X) = 0$。

ii) 令 $h = f - \zeta \circ \pi$, 则 $h \circ o_X = o_Y$。令 $\phi: X \times_S X \to Y$ 为 $(x, y) \mapsto h(x+y) - h(x) - h(y)$, 则 $\phi|_{o_X(S) \times_S X} = 0$, $\phi|_{X \times_S o_X(S)} = 0$, 故由推论 1 得 $\phi = 0$, 即 h 为同态。而 $f = h + \zeta \circ \pi$。

对后一个断言, 由于平移是 Y 作为 S-概形的自同构, 不妨设 f 为同态。由于 X 和 Y 在 S 上平坦, 这由引理 I.1.2.vi) 和推论 VI.1.2.i) 立见。

iii) 令 $m_{123}: Y = X \times_S X \times_S X \to X$ 为乘法, $m_{12}: Y \to X$ 为 $(x, y, z) \mapsto x + y$, 等等。由推论 1 不难验证

$$\begin{aligned}m_{123}^*\mathcal{L} \cong m_{12}^*\mathcal{L} \otimes_{O_Y} m_{13}^*\mathcal{L} \otimes_{O_Y} m_{23}^*\mathcal{L} \otimes_{O_Y} \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_Y} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1} \otimes\\ {}_{O_Y} \mathrm{pr}_3^*\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_Y} o_Y^*\mathcal{L}\end{aligned} \tag{6}$$

即 (6) 的两边通过 $o\times_S \mathrm{id}_X\times_S \mathrm{id}_X$, $\mathrm{id}_X\times_S o\times_S \mathrm{id}_X$ 和 $\mathrm{id}_X\times_S \mathrm{id}_X\times_S o$ 的拉回分别相互同构。将 (6) 对 $(f,g,h):T\to Y$ 拉回即得 (5)。

iv) 令 $g=\rho-m_X\circ(h\times_S \mathrm{id}_X):G\times_S X\to X$, 则有 $g\circ(o_G\times_S \mathrm{id}_X)=0:X\to X$。由于 $G\to S$ 具有连通纤维, 由引理 1 可知 g 经过 pr_1; 而对 π 的零截口 o_X 有

$$g\circ(\mathrm{id}_G\times_S o_X)=h-m_X\circ(h\times_S o_X)=0:G\to X \tag{7}$$

故 $g=0$, 即 $\rho=m_X\circ(h\times_S \mathrm{id}_X)$。

现在来验证 h 是同态。我们有

$$\begin{aligned}h\circ m_G&=\rho\circ(m_G\times_S o_X)=\rho\circ(m_G\times_S \mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_{G\times_S G}\times_S o_X)\\&=\rho\circ(\mathrm{id}_G\times_S \rho)\circ(\mathrm{id}_{G\times_S G}\times_S o_X)=\rho\circ(\mathrm{id}_G\times_S h)\\&=m_X\circ(h\times_S \mathrm{id}_X)\circ(\mathrm{id}_G\times_S h)=m_X\circ(h\times_S h).\end{aligned} \tag{8}$$

最后, 若有一个截口 $s:S\to X$ 使得 $\rho\circ(\mathrm{id}_G\times_S s)$ 为闭嵌入, 注意 $\rho\circ(\mathrm{id}_G\times_S s)=m_X\circ(h\times_S s)=T_s\circ h$ (T_s 为 s 给出的平移) 可见 h 也是闭嵌入。证毕。

2. 同源

对任意交换 (加法) 群概形 $\pi:G\to S$, 易见 n_G 诱导的 $\omega_{G/S}$ 的自同态是乘以 n (参看习题 Ⅲ.1.6)。若 S 是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-概形, n_G 诱导 $\omega_{G/S}$ 的自同构, 从而诱导 $\Omega^1_{G/S}$ 的自同构, 特别地当 S 为诺特 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-概形而 π 为平坦有限型时 n_G 为平展的 (参看引理 I.1.2.vi) 及习题 Ⅲ.1.6), 从而 $\ker(n_G)$ 为有限平展群概形。若 S 是 $\mathbb{F}_p$-概形, 则 p_G 诱导 $\Omega^1_{G/S}$ 的零自同态, 令 $H=\ker(p_G)$, $H'=\ker(F_{G/S})$, 由引理 Ⅱ.1.4 可见 $p_{H'}=0$, 故 $\ker(F_{G/S})\subset H$ (注意 $\omega_{G/S}\cong\omega_{H/S}$)。特别地当 S 为诺特概形而 π 为平坦有限型且具有几何约化纤维时, $F_{G/S}$ 为忠实平坦, 故此时存在同态 $\phi:G^{(p)}\to G$ 使得 $p_G=\phi\circ F_{G/S}$。

群概形的有限忠实平坦同态称为**同源** (*isogeny*)。若存在同源 $f:G\to G'$, 则称 G 与 G' 是**同源的** (*isogenous*), 注意此时 $H=\ker(f)$ 为有限平坦 S-群概形, 且 $G'\cong G/H$ (见例 Ⅵ.1.1)。

由上所述可见, 若 G 为域 k 上的交换群簇, 则对任意非零整数 n 使得 $\mathrm{ch}(k)\nmid n$, n_G 是 G 到自身的同源。若 $\mathrm{ch}(k)=p>0$, 则 $F_{G/k}$ 是同源, 但 p_G 不一定是同源, 例如易见 $p_{\mathbb{G}_{m/k}}$ 是同源而 $p_{\mathbb{G}_{a/k}}$ 不是同源。

引理 2. 设 G 为诺特概形 S 上的有限型平坦交换 (加法) 群概形使得对任意非零整数 n, n_G 是同源。则对任意 S-群概形 G', 若存在同源 $G\to G'$ 则也存在同源 $G'\to G$。

证. 设 $f:G\to G'$ 为同源, 则 G' 也是有限型平坦交换群概形, 而 $H=\ker(f)$ 为 S 上的有限平坦交换群概形, 故可取正整数 n 使得 $n_H=0$。令 $H'=\ker(n_G)$, 则有 $H\subset H'$, 故 n_G 经过 G', 详言之存在 S-态射 $g:G'\to G$ 使得 $n_G=g\circ f$。由 f 和 n_G 是同源易见 g 是同源。证毕。

令 $\mathfrak{C}$ 为 S 上的所有使得 n_G 为同源 $(\forall n\neq 0)$ 的有限型平坦交换群概形组成的范畴, 则由引理 2 可见同源是 $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 中的一个等价关系, 称为**同源等价** (*isogeny equivalence*), 此时若 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 同源等价则称 X 与 Y **是同源的** (*isogenous*), 记为 $X\sim Y$。下面将看到 S 上的所有阿贝尔概形都在 $\mathfrak{C}$ 中。

设 X 为域 k 上的 g 维阿贝尔簇, 记 $\mathrm{End}_k(X)$ 为 X 的 k-自同态全体组成的环 (在没有疑问时简记为 $\mathrm{End}(X)$)。我们下面将看到 $\mathrm{End}_k(X)$ 是一个有限秩平坦 $\mathbb{Z}$-代数。为简明起见我们用下面的记号: 对 X 上的一个可逆层 $\mathcal{L}$, 若将其视为加法群 $\mathrm{Pic}(X)$ 的一个元, 则记为 L (对有下标的情形记法类似, 但 $\mathcal{L}^n$ 须记作 nL)。

设 $\phi,\psi\in\mathrm{End}(X)$, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。令 $\mathcal{L}_n=(n\phi+\psi)^*\mathcal{L}$, 将推论 2.iii) 应用于 $n\phi+\psi$, ϕ, $-\phi$ 得

$$L_n-L_{n+1}-L_{n-1}+L_n+\phi^*L+(-\phi)^*L=0 \tag{1}$$

将 (1) 看作 n 的一个二阶线性差分方程, 就不难通过解差分方程将 L_n 表达为 $L'=(\phi^*L+(-\phi)^*L)$, $(\phi+\psi)^*L$ 和 ψ^*L 整系数线性组合。具体可以这样做: 记 $M_n=L_{n+1}-L_n$, 则可将 (1) 改写为

$$M_i-M_{i-1}=\phi^*L+(-\phi)^*L=L' \tag{2}$$

将 (2) 对 $i=1$ 至 n 作和, 得 $M_n-M_0=nL'$, 这可改写为

$$L_{i+1}-L_i=M_i=iL'+M_0 \tag{3}$$

再将 (3) 对 $i=0$ 至 $n-1$ 作和, 得

$$L_n - L_0 = \frac{n(n-1)}{2}L' + nM_0 \tag{4}$$

注意 $M_0 = L_1 - L_0 = (\phi+\psi)^*L - \psi^*L$, $L_0 = \psi^*L$, 代入 (4) 并化简得

$$L_n = \frac{n(n-1)}{2}(\phi^*L + (-\phi)^*L) + n(\phi+\psi)^*L + (1-n)\psi^*L \tag{5}$$

特别地, 令 $\phi = \mathrm{id}_X$, $\psi = 0$, 得

$$n_X^*L = \frac{n(n+1)}{2}L + \frac{n(n-1)}{2}(-1_X)^*L \tag{6}$$

若 $\mathcal{L}$ 满足 $(-1)_X^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ (例如将 $\mathcal{L}$ 换为 $\mathcal{L} \otimes_{O_X} (-1)_X^*\mathcal{L}$), 则 (5) 化为

$$L_n = n(n-1)\phi^*L + n(\phi+\psi)^*L + (1-n)\psi^*L = n^2\phi^*L + nL_{\phi,\psi} + \psi^*L \tag{7}$$

其中 $L_{\phi,\psi} = (\phi+\psi)^*L - \phi^*L - \psi^*L$, 而 (6) 化为

$$n_X^*L = n^2L \tag{8}$$

由 (7) 还可得到

$$L_{n\phi,\psi} = nL_{\phi,\psi} \tag{9}$$

由 (7), (9) 及归纳法不难推出, 对任意 $\phi_1, \ldots, \phi_r \in \mathrm{End}(X)$ 有

$$(n_1\phi_1 + \cdots + n_r\phi_r)^*L = \sum_i n_i^2\phi_i^*L + \sum_{i<j} n_in_jL_{\phi_i,\phi_j} \tag{10}$$

取 $\mathcal{L}$ 为丰富可逆层 (注意若 $\mathcal{L}$ 是丰富的则 $\mathcal{L} \otimes_{O_X} (-1)_X^*\mathcal{L}$ 也是丰富的), 则由 (8) 可见对任意闭点 $x \in X$, $n_X^{-1}(x)$ 在 k 上有限 (因为 $n_X^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{n^2}$ 在 $n_X^{-1}(x)$ 上的限制既是丰富的又是平凡的, 参看习题 I.3.3), 故 n_X 是有限的, 从而是满的。且由 (8) 和命题 I.4.7 有

$$\deg(n_X)[\mathcal{L} \cdot\overset{g}{\cdots}\cdot \mathcal{L}] = [n^*\mathcal{L} \cdot\overset{g}{\cdots}\cdot n^*\mathcal{L}] = n^{2g}[\mathcal{L} \cdot\overset{g}{\cdots}\cdot \mathcal{L}] \tag{11}$$

从而 $\deg(n_X) = n^{2g}$。由 (10) 和推论 I.4.2 可见 $\deg((n\phi+m\psi)^*\mathcal{L})$ 为 n, m 的 $2g$ 次齐次多项式函数, 再由命题 I.4.7 及注 I.4.6 可见 $\deg(n\phi + m\psi)$

为 n, m 的多项式函数。注意 $\deg(n\phi) = \deg(n_X)\deg(\phi) = n^{2g}\deg(\phi)$, 这说明 $\deg(n\phi + m\psi)$ 为 n, m 的 $2g$ 次齐次多项式函数。再由归纳法就可见 $\deg(n_1\phi_1 + \cdots + n_r\phi_r)$ 为 $n_1, ..., n_r$ 的 $2g$ 次齐次多项式函数。注意上面的结果除最后一个外都可以推广到相对情形。总之有

命题 1. 设 $X \to S$ 为相对维数 g 的阿贝尔概形, $\phi_1, ..., \phi_r \in \mathrm{End}(X)$, $n, n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$, $f = n_1\phi_1 + \cdots + n_r\phi_r$, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。则

i) $\mathcal{L}$ 所对应的 $\mathrm{Pic}(X)$ 中的元 L (也可理解为 X 上的直线从) 满足 (6)。

ii) 若 $\mathcal{L}$ 满足 $\iota^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ (例如将 $\mathcal{L}$ 换为 $\mathcal{L} \otimes_{O_X} \iota^*\mathcal{L}$), 则 (8) 和 (10) 成立。

iii) $\deg(n_X) = n^{2g}$, 特别地若 $n \neq 0$ 则 n_X 是同源。

iv) 若 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 则 $\deg(f^*\mathcal{L})$ 和 $\deg(f)$ 为 $n_1, ..., n_r$ 的 $2g$ 次齐次多项式函数, 二者之间的联系由命题 I.4.7 给出。

设 X 为代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇。对任意素数 $p \neq \mathrm{ch}(k)$, 由上所述 p_X 是有限平展的, 从而由命题 1.iii) 有

$$X[p] \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2g} \tag{12}$$

(离散群概形)。对任意 $m > 0$ 记 $H_m = X[p^m]$, 由 p_X^m 是满同态易见有正合列

$$0 \to H_1 \to H_{m+1} \xrightarrow{p_X} H_{m+1} \xrightarrow{p_X^m} H_1 \to 0 \tag{13}$$

这说明 H_m 由 $2g$ 个元生成。而 $p^m H_m = 0$ 且 $|H_m| = p^{2gm}$, 故必有 $H_m \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{2g}$。由 p 的任意性可见对任意非零整数 n, 若 $\mathrm{ch}(k) \nmid n$ 则

$$X[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \tag{14}$$

特别地当 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 时 (14) 对任意 $n \neq 0$ 成立。

若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 由上所述存在同态 $\phi : X^{(p)} \to X$ 使得 $p_X = \phi \circ F_{X/k}$, 故 $X[F] \subset X[p]$。由 $\deg(X[F]/k) = p^g$ 可见有无穷小群 H 及非负整数 $r \leqslant g$ 使得

$$X[p] \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r \times_k H \tag{15}$$

仿照上面的方法，即可见对任意正整数 m 存在一个无穷小群 H_m 使得

$$X[p^m] \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^r \times_k H_m \tag{16}$$

记 $r_X = r$，我们来说明 r_X 是同源不变量。设 $f: X \to Y$ 为 k-阿贝尔簇的同源，取 s 使得 $p^s \parallel \deg f$，则易见对 $m > s$ 有正合列

$$0 \to \ker(f)[p^s] \to X[p^m] \to Y[p^m] \tag{17}$$

故由 (16) 可见 $p^{r_X m} \leqslant p^{r_Y m+s}$，再由 m 的任意性得 $r_X \leqslant r_Y$；而由引理 2 可见同样有 $r_Y \leqslant r_X$，从而 $r_X = r_Y$。

若 $r = g$，则称 X 为**平常的** (ordinary)；若 $r = 0$，则称 X 为**甚特殊的** (very special)，当 $g = 1$ 时也称为**超奇的** (supersingular)。一个 g 维阿贝尔簇 X 称为**超奇的** (supersingular) 是指它与某个 E^g 同源，其中 E 为超奇椭圆曲线。在 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 的情形所有阿贝尔簇都称为平常的。

一个一般域 k 上的阿贝尔簇 X 称为**平常的** (或**甚特殊的**，**超奇的**) 是指 $X \otimes_k \bar{k}$ ($\bar{k}$ 为 k 的代数闭包) 为平常的 (或甚特殊的，超奇的)。

例 1. 若 E 为特征 $p > 0$ 的域 k 上的超奇椭圆曲线，则对任意正整数 g，E^g 是甚特殊的。故超奇阿贝尔簇都是甚特殊的。当 $g \leqslant 2$ 时，所有 g 维甚特殊阿贝尔簇都是超奇的；但当 $g > 2$ 时则不然 (参看下章习题 Ⅷ.3.7)。

例 2. 设 $k = \mathbb{C}$，则对任意 $g > 0$ 维 k-阿贝尔簇的同源 $f: X \to X'$，$H = \ker(f)$ 是有限离散交换群概形，且包含于某个 $X[n]$ 中。由上所述可见 H 由不超过 $2g$ 个元生成，而这样的有限交换群只有可数多个，由此可见 X 的同源等价类由可数多个同构类组成。另一方面，k 上有不可数多个的 g 维阿贝尔簇的同构类 (参看下面的第 5 节)，故有不可数多个同源等价类。

习题

1. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇，S 为 k 上的有限型连通概形且有一个 k-点 s，$Y \subset X \times_k S$ 为 S-阿贝尔子概形。证明 $Y = Y_s \times_k S$ (这可理解为“阿贝尔簇的阿贝尔子簇不能连续变化”)。

2. 设 $f: X \to Y$ 为特征 $p > 0$ 的域 k 上的阿贝尔簇的同源，使得 $f^*: \omega_{Y/k} \to \omega_{X/k}$ 为零同态。证明 f 经过 $F_{X/k}$，即存在同源 $g: X^{(p)} \to Y$ 使得 $f = g \circ F_{X/k}$。

3. 设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇，p 为素数且 $p \neq \mathrm{ch}(k)$。令 G 为 X_{cl} 中的所有阶为 p 的幂的元组成的子群。证明 G 为 X 中的察理斯基稠密集。(提示：G 的察理斯基闭包为闭子群概形。)

4. 设 X 为特征 0 的代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇。证明 X 中的有限阶元组成的子群同构于 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g}$。

5. 设 G 为代数闭域 k 上的射影群概形，其约化结构为交换的。证明 G 的零分支的约化结构为阿贝尔簇。

6. 设 G 为域 k 上的射影交换群概形，$H \subset G$ 为闭子概形使得 $m_G|_{H \times_k H}$ 经过 H。证明 H 为闭子群概形。

7. 设 G 为诺特概形 S 上具有连通纤维的有限型群概形，A 为 S 上的阿贝尔概形，X 为 A-挠子。证明 G 在 X 上的任一作用由一个 (唯一的) 同态 $G \to A$ 诱导。

第 2 节　对偶与极化

1. 对偶

设 S 为连通诺特概形，对 S 上的任一阿贝尔概形 X 记 $\hat{X}$ 为 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的包含零截口的连通分支，称为 X 的对偶 (参看例 VI.2.1)。由定理 VI.2.1 可知 $\hat{X} \to S$ 是相对射影的。若 $S = \mathrm{Spec} k$ 而 k 为代数闭域，这说明 $\hat{X}_{\mathrm{red}}$ 也是阿贝尔簇。若 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 则由推论 III.1.2.i) 即可知 $\hat{X}$ 是阿贝尔簇；若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$，则商群概形 $H = \hat{X}/\hat{X}_{\mathrm{red}}$ (参看命题 VI.1.6) 为无穷小群 (因为它只有一个点)，故有交换群概形的正合列

$$0 \to \hat{X}_{\mathrm{red}} \to \hat{X} \to H \to 0 \tag{1}$$

简言之 $\hat{X}$ 是一个一个无穷小群通过一个阿贝尔簇的扩张 (但下面我们将

看到 $H=0$)。

若 $f:X\to Y$ 为 S 上的阿贝尔概形的同源, 则 $G=\ker(f)$ 为 S 上的有限平坦交换群概形且 $Y\cong X/G$, 故由命题 VI.2.3 有

$$G^D\cong\ker(\hat{f}:\mathcal{P}ic(Y/S)\to\mathcal{P}ic(X/S)) \tag{2}$$

特别地对任意非零整数 n 有

$$\ker(n_X)^D\cong\ker(\hat{n}_X:\mathcal{P}ic(X/S)\to\mathcal{P}ic(X/S)) \tag{3}$$

(参看命题 1.1.iii))。故 $\hat{n}_X$ 是有限同态。

由立方定理可见在 $X\times_S X\times_S\hat{X}$ 上有

$$(m\times_S\mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}_{X/S}\cong\mathrm{pr}_{13}^*\mathcal{P}_{X/S}\otimes_{O_{X\times_S X\times_S\hat{X}}}\mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{P}_{X/S} \tag{4}$$

对 S-阿贝尔概形的任意态射 $f_1,f_2:Y\to X$, 将 (4) 通过 $(f_1,f_2)\times_S\mathrm{id}_{\hat{X}}:Y\times_S\hat{X}\to X\times_S X\times_S\hat{X}$ 拉回, 注意 $m_X\circ(f_1,f_2)=f_1+f_2:Y\to X$, 得

$$((f_1+f_2)\times_S\mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}_{X/S}\cong(f_1\times_S\mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}_{X/S}\otimes_{O_{Y\times_S\hat{X}}}(f_1\times_S\mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}_{X/S} \tag{5}$$

由对偶态射的定义可将 (5) 改写为

$$(\mathrm{id}_Y\times_S\widehat{f_1+f_2})^*\mathcal{P}_{Y/S}\cong(\mathrm{id}_Y\times_S\hat{f}_1)^*\mathcal{P}_{Y/S}\otimes_{O_{Y\times_S\hat{X}}}(\mathrm{id}_Y\times_S\hat{f}_2)^*\mathcal{P}_{Y/S} \tag{6}$$

由 $\hat{Y}$ 的加法的定义, (6) 的右边等于 $(\mathrm{id}_Y\times_S(\hat{f}_1+\hat{f}_2))^*\mathcal{P}_{Y/S}$, 故由 $\mathcal{P}_{Y/S}$ 的泛性有

$$\widehat{f_1+f_2}=\hat{f}_1+\hat{f}_2:\hat{X}\to\hat{Y} \tag{7}$$

特别地, 由归纳法即得

$$\hat{n}_X=n_{\hat{X}}\in End_S(\hat{X})\quad(\forall n\in\mathbb{Z}) \tag{8}$$

总之有

命题 1. 设 X,Y 为连通诺特概形 S 上的阿贝尔概形, $\hat{X},\hat{Y}$ 分别为它们的对偶。

i) 对任意 S-态射 $f_1, f_2 : Y \to X$ 有等式 (7), 特别地 (8) 成立。

ii) 若 $f : X \to Y$ 为同源, 则 (2) 成立, 特别地 (3) 成立。

警告. (7) 仅对 $\hat{X} \to \hat{Y}$ 成立而对 $\mathcal{P}ic(X/S) \to \mathcal{P}ic(Y/S)$ 不成立 (参看命题 1.1.i))。

设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 定义 $X \times_k X$ 上的可逆层

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = m^*\mathcal{L} \otimes_{O_{X\times_k X}} \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_{X\times_k X}} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1} \tag{9}$$

由于 $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ 在 X 的第二个拷贝上上有一个纤维是平凡的, 它诱导一个 k-态射 $\phi_{\mathcal{L}} : X \to \hat{X}$ (注意若 $x \in X$ 为 k-点, 则 $\phi_{\mathcal{L}}(x)$ 代表 $T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1}$, 其中 T_x 为平移 $y \mapsto y + x$)。若 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X/k)$, 则由命题 1.i) 可见

$$T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \cong \mathrm{id}_X^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} i_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \cong O_X \quad (\forall x \in X(k)) \tag{10}$$

其中 $i_x : X \to X$ 为将 X 映到 $x \in X$ 的态射, 由此得 $\phi_{\mathcal{L}} = 0$。对于一般的 $\mathcal{L}$ 及任意 $x \in X(k)$ 令 $\mathcal{L}' = T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1}$, 由于 $\mathcal{L}' = \phi_{\mathcal{L}}(x) \in \mathrm{Pic}^0(X)$ 有 $\phi_{\mathcal{L}'} = 0$, 故对任意 $y \in X$ 有 $T_y^*\mathcal{L}' \otimes_{O_X} \mathcal{L}'^{-1} \cong O_X$。由此得

$$T_{x+y}^*\mathcal{L} \cong T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} T_y^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \quad (\forall \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X),\ x, y \in X) \tag{11}$$

可将 (11) 改写为

$$\phi_{\mathcal{L}}(x + y) = \phi_{\mathcal{L}}(x) \otimes_{O_X} \phi_{\mathcal{L}}(y) \tag{12}$$

即 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同态 (这由 $\phi_{\mathcal{L}}(0) = 0$ 及推论 1.2.iii) 也可看出)。

命题 2. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 令

$$K_{\mathcal{L}} = \ker(\phi_{\mathcal{L}}) \overset{i}{\hookrightarrow} X \tag{13}$$

i) 若 $\mathcal{L}$ 是丰富的, 则 $K_{\mathcal{L}}$ 为有限群概形。

ii) $\hat{X}$ 也是阿贝尔簇且 $\dim(\hat{X}) = \dim(X)$。若 $\mathcal{L}$ 是丰富的, 则 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同源, 特别地 X 与 $\hat{X}$ 同源等价。

iii) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 有 $\ker(n_{\hat{X}}) \cong \ker(n_X)^D$。商群概形 $\mathcal{P}ic(X/k)/\hat{X}$ 是无挠的 (即没有有限阶的非零几何点)，故可看作 $\mathrm{NS}(X)$ 的群概形结构。

iv) 设 $D \subset X$ 为有效除子, $\mathcal{L} = O_X(D)$, 若 $K_{\mathcal{L}}$ 为有限群概形, 则 $\mathcal{L}$ 为丰富层。

证. 不妨设 k 为代数闭域。

i) 令 $f = (\mathrm{id}_X \times_k \iota_X) \circ \Delta_X \circ i = (i, \iota_X \circ i) : K_{\mathcal{L}} \to X \times_k X$ (即 $x \mapsto (x, -x)$), 由 $K_{\mathcal{L}}$ 的定义有 $(i \times_k \mathrm{id}_X)^* \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \cong O_{K_{\mathcal{L}} \times_k X}$, 故

$$O_{K_{\mathcal{L}}} \cong f^* \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \cong i^*(\mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_X} \iota^* \mathcal{L}^{-1}) \tag{14}$$

若 $\mathcal{L}$ 是丰富的, 则因 ι 是自同构可见 $\iota^*\mathcal{L}$ 也是丰富的, 故 $O_{K_{\mathcal{L}}}$ 是 $K_{\mathcal{L}}$ 上的丰富可逆层, 这只有当 $K_{\mathcal{L}}$ 为有限时才可能 (参看习题 I.3.3)。

ii) 令 $g = \dim(X)$, $g' = \dim(\hat{X}_{\mathrm{red}}) = \dim(\hat{X})$。任取 X 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 由 i) 有闭嵌入 $X/K_{\mathcal{L}} \hookrightarrow \hat{X}$, 故

$$g' \geqslant \dim(X/K_{\mathcal{L}}) = \dim(X) = g \tag{15}$$

而由命题 1 可见对任意正整数 n 有

$$\ker(n_{\hat{X}_{\mathrm{red}}}) = \ker(\hat{n}_X|_{\hat{X}_{\mathrm{red}}}) \subset \ker(\hat{n}_X : \mathcal{P}ic(X/k) \to \mathcal{P}ic(X/k)) \cong \ker(n_X)^D \tag{16}$$

若 n 满足 $\mathrm{ch}(k) \nmid n$, 则由命题 1.1.iii), (15) 和 (16) 得

$$n^{2g} \leqslant n^{2g'} = \deg(\ker(\hat{n}_X|_{\hat{X}_{\mathrm{red}}})/k) \leqslant \deg(\ker(n_X)^D/k) = n^{2g} \tag{17}$$

故 $g' = g$。若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$, 由 (1) 可见对充分大的 m, 诱导同态 $\ker(p^m_{\hat{X}}) \to H$ 是满同态。易见 $\ker(p^m_{\hat{X}_{\mathrm{red}}}) = \ker(p^m_{\hat{X}}) \cap \hat{X}_{\mathrm{red}}$, 故有正合列

$$0 \to \ker(p^m_{\hat{X}_{\mathrm{red}}}) \to \ker(p^m_{\hat{X}}) \to H \to 0 \tag{18}$$

由命题 1.1.iii), (18) 和 (16) 有

$$\deg(\ker(p^m_{\hat{X}})/k) = p^{2mg'} \deg(H/k) \leqslant p^{2mg} \tag{19}$$

故 $H=0$, 从而 $\hat{X}=\hat{X}_{\text{red}}$, 即为阿贝尔簇。再由 $g=g'$ 可见 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同源。

iii) 由 ii) 有 $\deg(\ker(n_{\hat{X}}))=n^{2g}=\deg(\ker(n_X)^D)$, 故由 (16) 可见

$$\ker(\hat{n}_X|_{\hat{X}_{\text{red}}})\subset\hat{X} \tag{20}$$

从而由 (2) 有 $\ker(n_{\hat{X}})\cong\ker(n_X)^D$。

对后一个断言, 设 $a\in\mathcal{P}ic(X/k)/\hat{X}$ 使得对某个正整数 n 有 $na=0$, 任取 a 在 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 中的一个提升 $\tilde{a}$, 则 $n\tilde{a}\in\hat{X}$。由 $\hat{X}$ 是阿贝尔簇可见 $n_{\hat{X}}$ 是满射, 从而存在 $b\in\hat{X}$ 使得 $nb=n\tilde{a}$, 于是 $n(\tilde{a}-b)=0$, 故由 (20) 有 $\tilde{a}-b\in\hat{X}$, 从而有 $a=0$。

iv) 由 (11) 可见对任意 $x\in X$ 有

$$T_x(D)+T_{-x}(D)\in|\mathcal{L}^2| \tag{21}$$

对任意 $y\in X$ 取 $x\in X-T_y(\iota(D))-T_{-y}(D)$, 则有 $y\notin T_x(D)+T_{-x}(D)$, 这说明线性系 $|\mathcal{L}^2|$ 没有基点, 从而给出一个 k-态射 $\phi:X\to\mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{L}^2)^\vee)=Y$。我们来说明 ϕ 是有限的, 用反证法。假设 ϕ 不是有限的, 则存在闭点 $y\in Y$ 使得 $\phi^{-1}(y)$ 包含一条不可约曲线 C, 因而 $\mathcal{L}^2$ 在 C 上的限制是平凡的, 这说明 $|\mathcal{L}^2|$ 中的任意除子或者与 C 不相交, 或者包含 C; 而由于所有 $T_x(D)+T_{-x}(D)$ 没有共同点, 存在一个 $T_x(D)+T_{-x}(D)$ 与 C 不相交。记 $i:C\to X$ 为嵌入。由于 X 是非奇异的 (局部为 UFD), D 的任一不可约分支 E (带有约化的诱导概形结构) 都是有效除子, 而存在一个 $T_x(E)$ 与 C 不相交, 故 $i^*\mathcal{O}_X(T_x(E))\cong\mathcal{O}_C$。由定理 I.4.2 可知 $i^*\mathcal{O}_X(T_y(E))$ 的次数与 y 无关 ($i^*\mathcal{O}_X(T_y(E))$ 可看作 $(m\circ(i\times_k\mathrm{id}_X))^*\mathcal{O}_X(E)$ 在 $y\in X$ 上的纤维), 故等于 0, 从而或者 $T_y(E)\supset C$, 或者 $T_y(E)\cap C=\emptyset$。定义态射 $\psi:C\times_k E\to X$ 为 $(c,e)\mapsto -c+e$, 则 ψ 的像的维数不小于 $g-1$ (因为它至少包含一个除子 $T_c(E)$), 且是不可约的, 故或者等于某个 $T_{-c}(E)$, 或者等于 X。但后者是不会发生的, 因若不然对任意 $x\in X$ 都存在 $c\in C$ 使得 $x\in T_{-c}(E)$, 从而 $c\in T_{-x}(E)$, 于是由上所述有 $C\subset T_{-x}(E)$, 即 $T_x(C)\subset E$ $(\forall x\in X)$, 显然不可能。因此对任意 $c,c'\in C$ 都有 $T_{-c}(E)=T_{-c'}(E)$, 由 E 的任意性有 $T_{-c}(D)=T_{-c'}(D)$, 从而 $\phi_{\mathcal{L}}(-c)=\phi_{\mathcal{L}}(-c')$。这说明 $\phi_{\mathcal{L}}(c'-c)=0$ $(\forall c'\in C)$, 即 $T_{-c}(C)\subset K_{\mathcal{L}}$, 与 $K_{\mathcal{L}}$ 有限的假设矛盾。

由 ϕ 有限可见 $\phi^*O_Y(1)\cong\mathcal{L}^2$ 是丰富层 (见 [H, Ex. Ⅲ.5.7.(d)]), 从而 $\mathcal{L}$ 是丰富层。证毕。

注 1. 在命题 2.iv) 中, $\mathcal{L}$ 为有效除子的可逆层这一条件不能去掉。例如设 E 为 k-椭圆曲线, $X=E\times_k E$, $\mathcal{L}=O_X(\{0\}\times_k E-E\times_k\{0\})$, 则 $\phi_{\mathcal{L}}=\phi_{O_E(0)}\times_k\phi_{O_E(0)^{-1}}$ 为同源, 但 $\mathcal{L}$ 不是丰富层。

设 $\pi:X\to S$ 为阿贝尔概形, 一个 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 称为在 S 上**相对丰富的** (**相对极丰富的**), 如果对任意仿射开子概形 $S'\subset S$, $\mathcal{L}$ 在 $X\times_S S'$ 上的限制为 S'-丰富的 (S'-极丰富的)。注意 $\mathcal{L}$ 在 S 上相对丰富 (相对极丰富) 等价于对任意仿射开子概形 $S'\subset S$, 对某个 m 存闭嵌入 $X\times_S S'\to\mathbb{P}^m_{S'}$ 使得对某个 $n>0$ 有 $\mathcal{L}^{\otimes_{O_X}n}|_{X\times_S S'}\cong O_{X\times_S S'}(1)$ ($\mathcal{L}|_{X\times_S S'}\cong O_{X\times_S S'}(1)$)。

对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$,仿照阿贝尔簇的情形定义 $X\times_S X$ 上的可逆层

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}=m^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_S X}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1}\otimes_{O_{X\times_S X}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1}\otimes_{O_S}o^*\mathcal{L}\tag{22}$$

易见 $(o\times_S\mathrm{id}_X)^*\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong(\mathrm{id}_X\times_S o)^*\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong O_X$, 故 $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ 诱导一个 S-态射 $\phi_{\mathcal{L}}:X\to\hat{X}$, 它在任一点 $s\in S$ 上的纤维与 $\phi_{\mathcal{L}_s}:X_s\to\hat{X}_s$ 一致。另一方面同样有 $(\mathrm{id}_X\times_S o)^*\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong O_X$, 这说明 $\phi_{\mathcal{L}}\circ o_X=o_{\hat{X}}$, 从而由推论 1.2.ii) 可见 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同态。由命题 2 可知, 若 $\mathcal{L}$ 是 S-相对丰富的, 则对任意 $s\in S$, $(\phi_{\mathcal{L}})_s$ 为 X_s 到 $\mathcal{P}ic(X/S)_s$ 的零分支的同源。

引理 1. 设 S 为诺特概形, 闭点 $s\in S$ 满足 $\mathrm{ch}(\kappa(s))=p>0$。设 G 为 S 上的局部射影交换群概形, $\mathcal{I}\subset O_G$ 为 $o:S\to G$ 的定义理想层, $e\in G$ 为 s 上的纤维 G_s 的单位元, $\mathcal{M}\subset O_G$ 为 e 的定义理想层, $\mathcal{J}\subset O_G$ 为 G_s 的定义理想层。对任意正整数 n 记 $\mathcal{I}_n=p_G^{n*}\mathcal{I}\subset O_G$ (为 $\ker(p_G^n)$ 的定义理想层)。则对任意 n, 当 m 充分大时有

$$\mathcal{M}^mO_{G,e}\subset(\mathcal{I}_n+\mathcal{J}^n)O_{G,e},\quad(\mathcal{I}_m+\mathcal{J}^m)O_{G,e}\subset\mathcal{M}^nO_{G,e}\tag{23}$$

因此

$$\varprojlim_n O_{G,e}/(\mathcal{I}_n+\mathcal{J}^n)O_{G,e}\cong\hat{O}_{G,e}\tag{24}$$

证．为方便起见简记 $M=\mathcal{M}O_{G,e}$, $I=\mathcal{I}O_{G,e}$, $J=\mathcal{J}O_{G,e}$, 以及 $I_n=\mathcal{I}_nO_{G,e}$, 注意 $I+J=M$。

情形 1: $S=\mathrm{Spec}(k)$, k 为 (特征 p 的) 域。记 $g=\dim(G)$。不难约化到 k 是代数闭域的情形, 且不妨设 G 是连通的。这样 $G'=G_{\mathrm{red}}$ 为阿贝尔簇。商群概形 G/G' 为无穷小群 (因为它只有一个点), 故对充分大的 n 有 $F^n_{(G/G')/k}=0$, 从而 $F^n_{G/k}$ 诱导有限满同态 $q:G\to G'^{(p^n)}$ (因为 $F^n_{G'/k}:G'\to G'^{(p^n)}$ 是满同态), 而 $H=\ker(q)=G[F^n]$ 是无穷小群, 且有一个满同态 $H\times_k G'\to G$ (因为 $G'\to G/H$ 是满同态)。由此可见 $G[p^n]$ 是有限群概形。

令 H' 为 $G[p^n]$ 的零分支 (只有一个点), 则存在 m 使得 $F^m_{H'/k}=0$, 从而 $I^{(p^m)}=F^{m*}_{G/k}(I)$ 在 $O_{G[p^n],e}$ 中的像为 0, 即 $I^{(p^m)}\subset I_n$。令 $h=\dim_k\omega_{G/k}$, 则 I 由 h 个元生成, 故有

$$I^{hp^m}\subset I^{(p^m)}\subset I_n\subset I^{(p^n)}\subset I^{p^n} \tag{25}$$

情形 2: 一般情形。不妨设 $S=\mathrm{Spec}(R)$, 而 s 对应于极大理想 $P\subset R$。则有 $J=PO_{G,e}$。对任意 n, 由情形 1 可见对充分大的 m 有 $I^m\subset I_n+J$, 故 $I^{mn}\subset I_n+J^n$, 从而 $M^{mn+n}\subset I_n+J^n$。另一方面, 由情形 1 有 $p_G^*I\subset(I^{(p)}+J)\cap I$。注意 $O_{G,e}$ 作为 R_P-模有分解 $O_{G,e}\cong I\oplus R_P$, 故 $J\cap I=PI=IJ$, 由此得

$$p_G^*I\subset I^{(p)}+IJ\subset I^2+IJ=I(I+J) \tag{26}$$

注意 $p_G^*J=J$, 由 (26) 及归纳法得

$$I_n=p_G^{n*}I\subset I(I+J)^n\subset M^n \tag{27}$$

从而有 $I_n+J^n\subset M^n$。证毕。

定理 1. 设 S 为连通诺特概形而 $\pi:X\to S$ 为阿贝尔概形, 则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的包含零截口的连通分支 $\hat{X}=\mathcal{P}ic^\tau(X/S)$ 是 S 上的阿贝尔概形。此外, 对 X 上的任意 S-相对丰富可逆层 $\mathcal{L}$, $\phi_{\mathcal{L}}:X\to\hat{X}$ 为同源。

证．不妨设 $S=\mathrm{Spec}(R)$, 取定一个闭嵌入 $X\hookrightarrow\mathbb{P}^m_S$, 令 χ 为 π 的希尔伯特多项式, 则 π 给出一个态射 $\phi:S\to\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^m}$ 使得 X 同构于

$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^m}$ 上的泛子概形 $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^m \times \mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^m}$ 通过 ϕ 的拉回。由于 $\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^m}$ 是有限型 $\mathbb{Z}$-概形, 可取 R 的一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-子代数 R_0 使得 ϕ 定义在 $S_0 = \mathrm{Spec}R_0$ 上。由于 X 的群概形结构由若干个 S-射影态射给出, 可取 R 的一个有限生成的 R_0-子代数 R_1 使得 X 的群概形结构定义在 $S_1 = \mathrm{Spec}R_1$ 上。令 X_1 为 $\mathcal{X}$ 在 S_1 上的拉回, 则有 S_1 的一个极大开子概形 S_2 使得 $X_1 \times_{S_1} S_2$ 在 S_2 上光滑 (参看 [L1, 命题 XVI.3.1]), 且有 S_2 的一个极大开子概形 S_3 使得 X_1 在 S_3 上的纤维都是几何连通的 (见命题 I.3.1), 这样 $X_3 = X_1 \times_{S_1} S_3$ 为有限型 $\mathbb{Z}$-概形 S_3 上的阿贝尔概形, 且 $S \to S_1$ 经过 S_3, 而 X 同构于 X_3 通过 $S \to S_3$ 的拉回。由皮卡概形的典范性, 只需证明 $\mathcal{P}ic^{\tau}(X_3/S_3)$ 是 S_3 上的阿贝尔概形, 这样就约化为 R 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-代数的情形。

由定理 VI.2.1 可知 $\hat{X} \to S$ 是射影的。由命题 1.ii) 有

$$\ker(\hat{n}_{\mathcal{P}ic(X/S)}) \cong \ker(n_X)^D \tag{28}$$

它在 S 上平坦, 而由命题 1.ii) 有 $n_{\hat{X}} = \hat{n}_X$, 故

$$\ker(n_{\hat{X}}) \cong \ker(\hat{n}_X) = \ker(\hat{n}_{\mathcal{P}ic(X/S)})|_{\hat{X}} \tag{29}$$

也在 S 上平坦。

设 $s \in S$ 为闭点, 对应于极大理想 $P \subset R$, 则 $\kappa(s)$ 的特征非零 (习题 I.4.2), 设为 p。对 $G = \mathcal{P}ic(X/S)$ 采用引理 1 的记号, 由 (29) 可见对任意 $n > 0$, $O_{G,e}/I_n$ 在 R 上忠实平坦。故由引理 1 可见 $\hat{O}_{G,e} \cong \varprojlim_n O_{G,e}/(I_n + J^n)$ 在 $\hat{R}_P$ 上忠实平坦。由形式完备化理论 (参看例如 [L1, IX]) 可知 $\hat{O}_{G,e}$ 在 $O_{G,e}$ 上忠实平坦, $\hat{R}_P$ 在 R_P 上忠实平坦, 故 $O_{G,e}$ 在 R_P 上忠实平坦 (参看例如 [L1, 命题 VII.2.2])。这样就有 s 在 G 中的一个开邻域在 S 上平坦 (参看例如 [L1, 命题 XVI.3.1])。由此可见 G 中有一个包含 $o(S)$ 的开子概形 U 在 S 上平坦。由引理 II.1.6.i) 可知 $m(U \times_S U) \subset G$ 在 S 上平坦。记 $U' = \hat{X} \cap m(U \times_S U)$, 则由命题 II.1.1.i) 可知 U' 包含 $\hat{X} \to S$ 的每个纤维的零分支。

任取 X 的 S-丰富可逆层 $\mathcal{L}$ (例如 $O_X(1)$), 则由上所述可见 $\phi_{\mathcal{L}} : X \to \hat{X}$ 经过 U'。由命题 2.i) 可知对任意 $s \in S$, $\phi_{\mathcal{L}}$ 在 s 上的纤维是 X_s 到 $\hat{X}_s$ 的零分支的同源, 从而是平坦的, 故 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是平坦的 (见引理 I.1.2.vi)), 从而

其像是开集。但由 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是紧的可见其像是闭集，故由 $\hat{X}$ 的连通性可见 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是满射，从而 $\hat{X}=U'$，且 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是忠实平坦的。而 $m(\hat{X}\times_S\hat{X})=\hat{X}$，由此可见 $\hat{X}$ 是 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的既开又闭的子群概形。再注意 $\hat{X}\to S$ 平坦，且其纤维都是阿贝尔簇，故为阿贝尔概形。

最后,对 X 上的任意 S-相对丰富可逆层 $\mathcal{L}$，注意 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是相对射影的且纤维都是有限的，可见它是有限的，从而是同源。证毕。

由于有定理 1，我们可以记 $\hat{X}=\mathcal{P}ic^{\tau}(X/S)$ 为 $\mathcal{P}ic^{0}(X/S)$ (参看例 VI.2.1)。

推论 1 (庞加莱完全可约性). 设 X 为一个域 k 上的阿贝尔簇，$Y\subset X$ 为阿贝尔子簇，则存在 k-阿贝尔子簇 $Z\subset X$ 使得 $Y\cap Z$ 为有限群概形且乘法 $\mu: Y\times_k Z\to X$ 为同源 (等价于 $\dim(X)=\dim(Y)+\dim(Z)$)。

证. 令 $i: Y\to X$ 为嵌入。任取 X 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}$，易见对任意闭点 $y\in Y$ 有 $i^*T_y^*\mathcal{L}\cong T_y^*i^*\mathcal{L}$，故 $\hat{i}(\phi_{\mathcal{L}}(y))=\phi_{i^*\mathcal{L}}(y)$，换言之 $\hat{i}\circ\phi_{\mathcal{L}}\circ i=\phi_{i^*\mathcal{L}}$。由于 $i^*\mathcal{L}$ 是丰富的，由命题 2.ii) 可知 $\phi_{i^*\mathcal{L}}$ 是满射，故 $\hat{i}\circ\phi_{\mathcal{L}}$ 是满同态。令 $Z'=\ker(\hat{i}\circ\phi_{\mathcal{L}})\subset X$。则有

$$Y\cap Z'=\ker(\hat{i}\circ\phi_{\mathcal{L}}\circ i)=\ker(\phi_{i^*\mathcal{L}}) \tag{30}$$

由命题 2.i) 可知它是有限的。

情形 1: k 是代数闭的。令 Z 为 Z' 的零分支的约化结构，则 Z 为 X 的阿贝尔子簇且 $\dim(Z)=\dim(X)-\dim(\hat{Y})=\dim(X)-\dim(Y)$。由 $Y\cap Z'$ 是有限的可见 $\ker(Y\times_k Z\to X)=Y\cap Z$ 是有限的，再由 $\dim(Y)+\dim(Z)=\dim(X)$ 可见 $Y\times_k Z\to X$ 是同源。

注意 Z 是 Z' 的闭子群概形，而 Z'/Z 是有限群概形，故存在正整数 n 使得 $n_{Z'/Z}=0$。由此可见 n_X 将 Z' 映入 Z。但 n_Z 是满射，故 n_X 诱导满同态 $Z'\to Z$。这说明 $Z\cong Z'/(Z'\cap X[n])$。

情形 2: 一般情形。记 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包，$\bar{X}=X\otimes_k\bar{k}$，$\bar{Y}=Y\otimes_k\bar{k}$，$\bar{Z}'=Z'\otimes_k\bar{k}$。令 $H=Z'\cap X[n]$。则 $Z=Z'/H$ 可以看作 $X/X[n]\cong X$ 的闭子群概形。由情形 1 可见 $\bar{Z}=Z\otimes_k\bar{k}$ 是 $\bar{X}$ 的含于 $\bar{Z}'$ 中的阿贝尔子簇且 $\bar{Y}\times_{\bar{k}}\bar{Z}\to\bar{X}$ 是同源。故 Z 为 X 的阿贝尔子簇且 $Y\times_k Z\to X$ 是同源。证毕。

一个阿贝尔簇若没有非平凡阿贝尔子簇，则称为**单的**。若 X 是域 k 上的阿贝尔簇使得 $X \otimes_k \bar{k}$ 是 $\bar{k}$ 上的单阿贝尔簇，则称 X 是**绝对单的**。

由推论 1 可见任一域 k 上的阿贝尔簇同源于若干个单阿贝尔簇的直积，但一般未必**同构**于若干个单阿贝尔簇的直积。下面是一个例子。

例 1. 设 E_1, E_2 为 $\mathbb{C}$ 上互不同源等价的椭圆曲线 (参看例 1.2)，则有 $E_1[2] \cong E_2[2] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$。取 2 阶元 $a_1 \in E_1$ 和 $a_2 \in E_2$，则 $(a_1, a_2) \in E_1 \times_{\mathbb{C}} E_2 = Y$ 生成一个 2 次子群概形 H，而 $X = Y/H$ 与 Y 同源。我们来说明 X 不同构于单阿贝尔簇的直积。用反证法，设有同构 $f: X \to Z = E_3 \times_{\mathbb{C}} E_4$，其中 E_3, E_4 为 1 维单阿贝尔簇，即椭圆曲线。则投射 $q: Y \to X$ 诱导的同态 $Y \to E_3$ 等价于一对同态 $f_1: E_1 \to E_3$ 和 $f_2: E_2 \to E_3$。由于 E_1 和 E_2 不同源，f_1 和 f_2 至少有一个等于 0 (当然不能都等于 0)，不妨设 $f_2 = 0$，即 $Y \to E_3$ 等于投射 $Y \to E_1$ 与一个同源 f_1 的合成。同理 $Y \to E_4$ 等于投射 $Y \to E_2$ 与一个同源 $g_1: E_2 \to E_4$ 的合成。由 $E_1 \cap H = 0$ 可见 $E_1 \to X$ 是单射，故 f_1 为同构；同理 g_1 为同构，由此得到 $f \circ q$ 是同构，矛盾。

命题 3. 设 S 为连通诺特概形，$\pi_X: X \to S$, $\pi_Y: Y \to S$ 为忠实平坦相对射影态射，具有几何整纤维，且分别有截口 $i_X: S \to X$, $i_Y: S \to Y$。则有典范同构 $\mathcal{P}ic^\tau(X \times_S Y/S) \cong \mathcal{P}ic^\tau(X/S) \times_S \mathcal{P}ic^\tau(Y/S)$。

证. 简记 $\hat{X} = \mathcal{P}ic^\tau(X/S)$ 等等，记 $\mathcal{P}^\tau_{X/S}$ 为 $\mathcal{P}_{X/S}$ 在 $X \times_S \hat{X}$ 的限制等等，且记 $Z = X \times_S Y$。令

$$\begin{aligned} i_1 = \mathrm{id}_X \times_S i_Y : X \to Z,\ i_2 = i_X \times_S \mathrm{id}_Y : Y \to Z, \\ p_1 = \mathrm{id}_X \times_S \pi_Y : Z \to X,\ p_2 = \pi_X \times_S \mathrm{id}_Y : Z \to Y \end{aligned} \tag{31}$$

则有典范同态 $\hat{i}_1 : \hat{Z} \to \hat{X}$, $\hat{i}_2 : \hat{Z} \to \hat{Y}$, $\hat{p}_1 : \hat{X} \to \hat{Z}$, $\hat{p}_2 : \hat{X} \to \hat{Z}$, 且

$$\hat{i}_1 \circ \hat{p}_1 = \mathrm{id}_{\hat{X}},\ \hat{i}_2 \circ \hat{p}_2 = \mathrm{id}_{\hat{Y}},\ \hat{i}_1 \circ \hat{p}_2 = 0,\ \hat{i}_2 \circ \hat{p}_1 = 0 \tag{32}$$

令 $\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 : \hat{Z} \to \hat{X} \times_S \hat{Y}$, $\hat{p} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 : \hat{X} \times_S \hat{Y} \to \hat{Z}$，则有 $\hat{i} \circ \hat{p} = \mathrm{id}_{\hat{X} \times_S \hat{Y}}$，故只需证明 $\hat{p} \circ \hat{i} = \mathrm{id}_{\hat{Z}}$，为此只需证明

$$(\hat{p} \circ \hat{i})^* \mathcal{P}^\tau_{Z/S} \cong \mathcal{P}^\tau_{Z/S} \tag{33}$$

注意

$$(i_1\times_S\mathrm{id}_{\hat{Z}})^*\mathcal{P}^\tau_{Z/S}\cong(\mathrm{id}_X\times_S\hat{i}_1)^*\mathcal{P}^\tau_{X/S},\ (i_2\times_S\mathrm{id}_{\hat{Z}})^*\mathcal{P}^\tau_{Z/S}\cong(\mathrm{id}_Y\times_S\hat{i}_2)^*\mathcal{P}^\tau_{Y/S}. \tag{34}$$

令 $\mathcal{P}=(\mathrm{id}_X\times_S\hat{i}_1)^*\mathcal{P}^\tau_{X/S}\otimes_{O_{Z\times_S\hat{Z}}}(\mathrm{id}_Y\times_S\hat{i}_2)^*\mathcal{P}^\tau_{Y/S}$, 则由推论 1.1 (及 $\hat{Z}$ 连通) 和 (34) 可见 $\mathcal{P}\cong\mathcal{P}^\tau_{Z/S}$, 而由 (32) 易见 $(\hat{p}\circ\hat{i})^*\mathcal{P}\cong\mathcal{P}$, 这就证明了 (33)。证毕。

2. 极化

对于一个阿贝尔概形 $\pi:X\to S$, 由定理 1 可见 X 上的一个 S-相对丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 诱导一个同源 $\phi_\mathcal{L}:X\to\hat{X}$, 这样一个同源称为“极化”。更一般地有

定义 1. 设 $\pi:X\to S$ 为阿贝尔概形。一个同源 $\phi:X\to\hat{X}$ 称为 X 的极化 (*polarization*), 如果它经过一个忠实平坦基变换后由一个相对丰富可逆层诱导 (详言之存在一个忠实平坦态射 $T\to S$ 及 $X\times_ST$ 上的一个 T-相对丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $\phi_\mathcal{L}=\phi\times_S\mathrm{id}_T:X\times_ST\to\widehat{X\times_ST}\cong\hat{X}\times_ST$); 此时若 ϕ 是同构 (即 $\deg(\phi)=1$) 则称其为主极化 (*principal polarization*)。

注 2. 一个极化 $\phi:X\to\hat{X}$ 不一定由 X 上的一个 S-相对丰富可逆层诱导。在 [M4] 中定义极化为一个同源 $\phi:X\to\hat{X}$使得对任意几何点 $s:\mathrm{Spec}k\to S$ (k 为代数闭域), ϕ_s 由 X_s 上的一个丰富可逆层诱导。这比定义 1 的要求稍弱, 而在阿贝尔簇的情形与定义 1 的要求等价 (参看习题 7)。采用定义 1 是为了后面建立模空间的需要 (见 XI.1 节)。

例 2. 设 E 为域 k 上的椭圆曲线, 取 $\mathcal{L}=O_E(0)$, 注意 $\phi_\mathcal{L}$ 由 $E\times_kE$ 上的可逆层 $\mathcal{M}_\mathcal{L}$ (见 (1.9)) 给出, 记 $\mathcal{M}_i$ ($i=1,2$) 分别为 $\mathcal{M}_\mathcal{L}$ 在投射 pr_{12} 和 $\mathrm{pr}_{13}:E^3\to E^2$ 下的拉回, $S\subset E^2$ 为极大闭子概形使得 $\mathcal{M}_1|_{E\times_kS}\cong\mathcal{M}_2|_{E\times_kS}$ (参看引理 VI.2.1)。由黎曼-罗赫定理有 $h^0(\mathcal{L})=1$, 故 $S=\Delta(E)$, 从而由定理 VI.2.1 的证明可见 $\phi_\mathcal{L}:E\to\hat{E}$ 为同构, 换言之 $\phi_\mathcal{L}$ 为主极化。更一般地, 任意相对维数 1 的阿贝尔概形 $X\to S$ (即椭圆曲线族) 有主极化 (详见下节)。

但一般的阿贝尔簇不一定有主极化 (参看下章习题 VIII.5.13)。

以下我们专门讨论阿贝尔簇，尽管其中的结果一般都可以推广到阿贝尔概形。

命题 4. 设 X 为域 k 上的 g 维阿贝尔簇。

i) 设 X 上的可逆层 $\mathcal{L} \not\cong O_X$，若

$$m^*\mathcal{L} \cong \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_{X\times_k X}} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L} \tag{1}$$

则 $H^i(X,\mathcal{L}) = 0$ $(\forall i \geqslant 0)$。(注意若 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$，则由 (1.10) 可见 (1) 成立。)

ii) 记 $\mathcal{P}^0_{X/k}$ 为 X 的庞加莱层在 $X \times_k \hat{X}$ 上的限制，则

$$H^i(X \times_k \hat{X}, \mathcal{P}^0_{X/k}) \cong \begin{cases} 0 & 若\ i \neq g \\ k & 若\ i = g \end{cases} \tag{2}$$

故 $\chi(\mathcal{P}^0_{X/k}) = (-1)^g$。

iii) $\dim_k H^i(X, O_X) = \binom{g}{i}$ $(\forall i \geqslant 0)$。

iv) 若 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 满足 (1) (即 $\phi_{\mathcal{L}} = 0$)，则 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$。

证． i) 首先注意 $H^0(X,\mathcal{L}) = 0$，否则有有效除子 $D \neq 0 \subset X$ 使得 $O_X(D) \cong \mathcal{L}$，因而 $\iota(D) \subset X$ 也是有效除子，由 (1.4) 用 $(\mathrm{id}_X, \iota_X)^*$ 得

$$O_X(D + \iota(D)) \cong \mathcal{L} \otimes_{O_X} \iota^*\mathcal{L} \cong (\mathrm{id}_X + \iota_X)^*\mathcal{L} \cong 0^*\mathcal{L} \cong O_X \tag{3}$$

从而 $D + \iota(D)$ 为零除子，矛盾。

以下对 i 用归纳法。注意 $m : X \times_k X \to X$ 有一个截口 $(\mathrm{id}_X, 0)$，故有单射 $H^i(X,\mathcal{L}) \hookrightarrow H^i(X \times_k X, m^*\mathcal{L})$。由 (1) 及居内特公式有

$$H^i(X \times_k X, m^*\mathcal{L}) \cong \bigoplus_{j=0}^{i} H^j(X,\mathcal{L}) \otimes_k H^{i-j}(X,\mathcal{L}) \tag{4}$$

故由归纳法假设有 $H^i(X,\mathcal{L}) = 0$。

ii) 不妨设 k 是代数闭域。由半连续性理论 (见命题 I.3.1.ii))，对任意仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$，存在长度为 g 的有限生成的自由 A-模复形 $L^{\cdot}$ 使得对任意有限生成 A-模 M 在 U 上有

$$R^i\mathrm{pr}_{2*}(\mathcal{P}^0_{X/k} \otimes_{O_{X\times_k \hat{X}}} \mathrm{pr}_2^*\tilde{M}) \cong H^i(L^{\cdot} \otimes_A M) \quad (\forall i) \tag{5}$$

由 i) 可知每个 $H^i(L^\cdot \otimes_A M)$ 的支撑集至多只有一个点 0, 故若 $0 \notin U$ 则 $L^\cdot$ 是正合的。以下设 $0 \in U$。令 $R_0 = O_{\hat{X},0}$, 取 $x_1, ..., x_g \in A$ 使得它们生成 R_0 的极大理想, 并记 $R_i = R/(x_1, ..., x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$。我们来说明对所有 $j < g - i$ 都有 $H^j(L^\cdot \otimes_A R_i) = 0$。对 j 用归纳法, 注意 $H^0(L^\cdot \otimes_A R_i) \subset L^0 \otimes_A R_i$, 若它不等于 0 则其支撑集为 $\mathrm{Spec} R_i$, 但由上所述其支撑集至多只有一个闭点, 矛盾。故当 $i < g$ 时它必等于 0。由正合列 $0 \to R_{i-1} \xrightarrow{x_i \cdot} R_{i-1} \to R_i \to 0$ 得长正合列

$$\cdots \to H^j(L^\cdot \otimes_A R_i) \to H^{j+1}(L^\cdot \otimes_A R_{i-1}) \xrightarrow{x_i \cdot} H^{j+1}(L^\cdot \otimes_A R_{i-1}) \to \cdots \tag{6}$$

由于 $H^{i+1}(L^\cdot \otimes_A R_{i-1})$ 的支撑集只有一个点 0, 可见 $x_i \cdot$ 是幂零的, 故若 $H^j(L^\cdot \otimes_A R_i) = 0$ 则 $H^{j+1}(L^\cdot \otimes_A R_{i-1}) = 0$, 这就完成了归纳证明。

由此可见对任意 $i < g$ 有 $H^i(L^\cdot) = 0$。但 $H^g(L^\cdot) \neq 0$, 否则 $L^\cdot$ 是正合的, 从而由 (5) 有 $H^0(X, O_X) \cong H^0(L^\cdot \otimes_A R_g) = 0$, 矛盾。我们来说明 $R = H^g(L^\cdot) \cong k$。注意 $H^g(L^\cdot) \cong \mathrm{coker}(d^{g-1} : L^{g-1} \to L^g)$, 可见 $H^g(L^\cdot \otimes_A R_g) \cong R \otimes_A R_g$, 但由 (5) 有 $H^g(L^\cdot \otimes_A R_g) \cong H^g(X, O_X)$, 而由塞尔对偶 (及 $\Omega^1_{X/k} \cong O_X^{\oplus g}$) 有 $H^g(X, O_X) \cong k$ (参看 [H, Ⅲ.7]), 故 $R \otimes_A R_g \cong k$, 这说明 R 由一个元生成, 从而可看作 R_0 的剩余类环。若 $R \neq k$, 则可取 R 的剩余类环 R' 使得 $\dim_k R' = 2$, 其极大理想由一个元 a 生成。记 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{P}_{X/k}$ 在 $X \times_k \mathrm{Spec} R'$ 上的拉回。由正合列 $0 \to R_g \xrightarrow{a \cdot} R' \to R_g \to 0$ 有正合列 $0 \to O_X \xrightarrow{a \cdot} \mathcal{E} \xrightarrow{p} O_X \to 0$, 而由上所述有 $H^g(L^\cdot \otimes_A R') \cong R'$, 故有正合列 $0 \to H^g(X, O_X) \to H^g(X, \mathcal{E}) \to H^g(X, O_X) \to 0$; 再由塞尔对偶得正合列 $0 \to H^0(X, O_X) \to \mathrm{Hom}_{O_X}(\mathcal{E}, O_X) \to H^0(X, O_X) \to 0$, 由此可知存在 O_X-模层同态 $q : \mathcal{E} \to O_X$ 使得 $q|_{a\mathcal{E}}$ 是同构。易见 $(q, p) : \mathcal{E} \to O_X \oplus O_X$ 为 O_X-模层同构, 这说明 $\mathcal{E} \cong O_X \otimes_k R'$, 从而由 $\hat{X}$ 的泛性可见投射 $A \to R'$ 经过 R_g, 矛盾。

这样, 利用 Leray 谱序列 (参看 [L1, 定理 XIII.4.1]) 就得到 (2)。

iii) 由 ii) 可见 $L^\cdot$ 是 R_g 的自由预解, 故同伦等价于 $x_1, .., x_g$ 的科斯居尔复形 (参看 [L1, p.147]), 因此不妨设它就是科斯居尔复形。在 (5) 中取 $M = R_g$ 立得。

iv) 任取丰富可逆层 $\mathcal{L}'$, 由极化的定义可见只需证明存在闭点 $x \in X$ 使得 $\mathcal{L} \cong T_x^* \mathcal{L}' \otimes_{O_X} \mathcal{L}'^{-1}$。用反证法, 设不存在这样的 x。令 $X \times_k X$ 上

的可逆层

$$\mathcal{K}=m^*\mathcal{L}'\otimes_{O_{X\times_k X}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}'^{-1}\otimes_{O_{X\times_k X}}\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{L}'\otimes_{O_X}\mathcal{L})^{-1} \tag{7}$$

对任意 $x\in X_{\mathrm{cl}}$, $\mathcal{K}$ 在 $\{x\}\times_k X\cong X$ 上的限制同构于

$$\mathcal{L}_{1x}=T_x^*\mathcal{L}'\otimes_{O_X}\mathcal{L}'^{-1}\otimes_{O_X}\mathcal{L}^{-1} \tag{8}$$

而在 $X\times_k\{x\}\cong X$ 上的限制同构于

$$\mathcal{L}_{2x}=T_x^*\mathcal{L}'\otimes_{O_X}\mathcal{L}'^{-1} \tag{9}$$

由 (1.10) 可见 $\mathcal{L}_{1x}$ 满足 i) 的条件, 而由反证法假设有 $\mathcal{L}_{1x}\not\cong O_X$, 故由 i) 有 $H^i(X,\mathcal{L}_x)=0$ $(\forall x\in X,\ i\geqslant 0)$。这样由 ii) 的证明方法就得到 $\chi(\mathcal{K})=0$; 另一方面, $\mathcal{L}_{2x}$ 也满足 i) 的条件, 而由命题 2.i) 可知存在且仅存在有限多个闭点 x 使得 $\mathcal{L}_{2x}\cong O_X$, 故由 ii) 的证明方法就得到 $\chi(\mathcal{K})\neq 0$, 矛盾。证毕。

引理 2. 设 X 为域 k 上的射影簇, k 上的有限群概形 G 自由作用于 X 上, $f:X\to Y=X/G$ 为投射。则对 Y 上的任一凝聚层 $\mathcal{F}$ 有

$$\chi(f^*\mathcal{F})=\deg(f)\chi(\mathcal{F}) \tag{10}$$

证. 对 Y 上的任意凝聚层 $\mathcal{E}$ 有 $f_*f^*\mathcal{E}\cong\mathcal{E}\otimes_{O_Y}f_*O_X$, 故有

$$f^*f_*f^*\mathcal{E}\cong f^*\mathcal{E}\otimes_{O_X}(O_X\otimes_{f^{-1}O_Y}O_X) \tag{11}$$

首先注意 $\alpha:G\times_k X\to X\times_k X$ 诱导 $G\times_k X\cong X\times_Y X$, 故

$$O_X\otimes_{f^{-1}O_Y}O_X\cong O_X\otimes_k\Gamma(G,O_G)\cong O_X^d \tag{12}$$

其中 $d=\deg(f)$。由于 f 是有限的, 对 X 上的任意凝聚层 $\mathcal{F}'$ 有 $\chi(\mathcal{F}')=\chi(f_*\mathcal{F}')$, 故若存在 Y 上的凝聚层 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{F}\cong f_*f^*\mathcal{E}$, 则 (10) 成立。其次, 由 χ 的加性及 f^* 的正合性 (因 f 平坦), 对 Y 上凝聚层的任一正合列 $0\to\mathcal{E}'\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}''\to 0$, 若 (10) 对 $\mathcal{F}=\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}''$ 之中的两

个成立, 则它对第三个也成立。再次, 当 $\dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))=0$ 时 (10) 显然成立, 我们对 $\dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ 用归纳法。对一般的 $\mathcal{F}$, 可取 $\mathcal{F}$ 的一个过滤使得它的每个因子 $\mathcal{E}$ 可以看作某个整的闭子概形 $i: T\hookrightarrow Y$ 上的无挠凝聚层 (即存在 T 上的无挠凝聚层 $\mathcal{E}_T$ 使得 $\mathcal{E}\cong i_*\mathcal{E}_T$)。由 χ 的加性, 我们只需对 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$ 证明 (10) 即可。对充分大的 n, 可取单射 $i_*O_T(-n)^{\oplus d}\to f_*f^*i_*O_T$ 使得其余核的支撑集不是 T。由上所述及归纳法假设可知 (10) 对 $\mathcal{F}=i_*O_T(-n)^{\oplus d}$ 成立, 从而对 $\mathcal{F}=i_*O_T(-n)$ 成立。对充分大的 n 还可取单射 $i_*O_T(-n)^{\oplus r}\to\mathcal{E}$ 使得其余核的支撑集不是 T, 其中 r 为 $\mathcal{E}$ 在 T 的一般点处的秩, 故由上所述及归纳法假设可知 (10) 对 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$ 成立。证毕。

推论 2. 设 X 为域 k 上的 g 的阿贝尔簇, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。

i) 若 $\iota^*\mathcal{L}\cong\mathcal{L}^{-1}$ 则 $\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}^0(X)$。

ii) 存在 $\mathcal{E}\in\mathrm{Pic}^0(X)$ 使得 $\mathcal{L}'=\mathcal{L}\otimes_{O_X}\mathcal{E}$ 满足 $\iota^*\mathcal{L}'\cong\mathcal{L}'$。

iii) 设 $\phi,\psi\in\mathrm{End}(X)$, 记 $\mathcal{L}_n=(n\phi+\psi)^*\mathcal{L}$ (如上节), 则 $\chi(\mathcal{L}_n)$ 为 n 的多项式函数。特别地有

$$\chi(\mathcal{L}^n)=\chi(\mathcal{L})n^g=\frac{1}{g!}\deg(\mathcal{L})n^g \tag{13}$$

由此及推论 I.4.2 得

$$\chi(\mathcal{L})=\frac{1}{g!}[\mathcal{L}\overset{g}{\cdots}\mathcal{L}] \tag{14}$$

iv) $\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}^0(X)$ 当且仅当 $\mathcal{L}$ 的数值类为 0, 即对任意可逆层 $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{g-1}$ 有 $[\mathcal{L}\mathcal{L}_1\cdots\mathcal{L}_{g-1}]=0$。

v) 若 $\phi\in\mathrm{End}(X)$ 为同源而 $\chi(\mathcal{L})\neq 0$ (例如 $\mathcal{L}$ 为丰富的), 则有

$$\deg(\phi)=\frac{[\phi^*\mathcal{L}\overset{g}{\cdots}\phi^*\mathcal{L}]}{[\mathcal{L}\overset{g}{\cdots}\mathcal{L}]}=\frac{\chi(\phi^*\mathcal{L})}{\chi(\mathcal{L})} \tag{15}$$

vi) $\deg(\phi_{\mathcal{L}})=\chi(\mathcal{L})^2$, 特别地 $\deg(\phi_{\mathcal{L}})$ 总是平方数。(注意当命题 2 中的 $K_{\mathcal{L}}$ 为有限群概形时, $\deg(\phi_{\mathcal{L}})=\deg(K_{\mathcal{L}}/k)$。)

vii) 若 $K_{\mathcal{L}}$ 是有限的 (即 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为满射), 则存在整数 $i=i(\mathcal{L})\in[0,g]$ 使得 $H^j(X,\mathcal{L})\neq 0$ 当且仅当 $j=i$。此外 $i(\mathcal{L}^{-1})=g-i(\mathcal{L})$。

证. i) 由所设有 $\mathcal{L}^2 \cong \mathcal{L} \otimes_{O_X} \iota^*\mathcal{L}^{-1}$。对任意 $x \in X$ 有 $\mathcal{E} = \mathcal{L} \otimes_{O_X} T_{-x}^*\mathcal{L}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X)$, 故由命题 1.2.i) 或命题 1.i) 有 $\iota^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}^{-1}$, 由此及 (1.10) 得

$$\begin{aligned} T_x^*\mathcal{L}^2 &\cong T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \iota^* T_{-x}^*\mathcal{L}^{-1} \\ &\cong T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \iota^*\mathcal{E} \otimes_{O_X} \iota^*\mathcal{L}^{-1} \\ &\cong T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{E}^{-1} \otimes_{O_X} \mathcal{L} \\ &\cong T_x^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} T_{-x}^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}^2 \end{aligned} \tag{16}$$

即 $\phi_{\mathcal{L}^2} = 0$, 从而 $\phi_{\mathcal{L}} = 0$, 故由命题 4.iv) 有 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$。

ii) 由 i) 可见 $\iota^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X)$, 由于 $2_{\hat{X}}$ 是满同态, 存在 $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ 使得

$$\iota^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{E}^2 \tag{17}$$

由命题 1.2.i) 或命题 1.i) 有 $\iota^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}^{-1}$。令 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{E}$, 则由 (17) 有

$$\iota^*\mathcal{L}' \otimes_{O_X} \mathcal{L}'^{-1} \cong \iota^*\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}^{-1} \otimes_{O_X} \mathcal{E}^{-2} \cong O_X \tag{18}$$

故 $\iota^*\mathcal{L}' \cong \mathcal{L}'$。

iii) 注意对任意有限型连通 k-概形 S 及 $X \times_k S$ 上的任意可逆层 $\mathcal{M}$, 所有 $\mathcal{M}$ 在 S 上的纤维 $\mathcal{M}_s$ 具有相同的欧拉特征标 $\chi(\mathcal{M}_s)$, 特别地取 $S = \hat{X}$, 可见对任意 $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ 有 $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{E})$。按 ii) 那样取 $\mathcal{L}'$ 代替 $\mathcal{L}$, 就可化为 $(-1)^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ 的情形, 由引理 2 及命题 1.iv) 可见 $\chi(\mathcal{L}_n)$ 为 n 的多项式函数。特别地, 若 $(-1)^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$, 则由命题 1.ii), iii) 及引理 2 得

$$\chi(\mathcal{L}^{n^2}) = \chi(n_X^*\mathcal{L}) = \deg(n_X)\chi(\mathcal{L}) = n^{2g}\chi(\mathcal{L}) \tag{19}$$

由推论 I.3.2 可知 $\chi(\mathcal{L}^n)$ 是 n 的多项式, 故由 (19) 即可知 $\chi(\mathcal{L}^n)$ 是 n 的 g 次齐次多项式。由定义 $\chi(\mathcal{L}^n)$ 的首项系数是 $\frac{1}{g!}\deg(\mathcal{L})$, 故 (13) 成立。特别地取 $n = 1$, 则由推论 I.4.2 可见 (14) 成立。

iv) 不妨设 k 为代数闭的。由 $\hat{X}$ 的连通性可见 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 中的所有可逆层具有相同的数值类, 即 O_X 的数值类 0。由此可见所有数值类为 0 的可逆层组成 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的一个子群概形 $H \supset \hat{X}$。任意取定 $O_X(1)$, 由 iii) 可见 H 中的所有可逆层具有相同的希尔伯特多项式 $\chi = \chi_{O_X}$, 故由

定理 Ⅳ.2.2 可知 H 是射影的, 从而只有有限多个连通分支。这样 H 在 $\mathrm{NS}(X)=\mathcal{P}ic(X/k)/\hat{X}$ 中的像 $\bar{H}$ 是有限子群, 但 $\mathrm{NS}(X)$ 是无挠的 (命题 2.iii)), 只能有 $\bar{H}=0$, 即 $H=\hat{X}$。

v) 由 iii) 和命题 I.4.7 及注 I.4.6 立得。

vi) 先考虑 $K_{\mathcal{L}}$ 为有限群概形的情形, 此时由定义有 (见 (1.9))

$$(\mathrm{id}_X\times_k\phi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}^0_{X/k}\cong\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\tag{20}$$

故由引理 2 有

$$\deg(\phi_{\mathcal{L}})=\deg(\mathrm{id}_X\times_k\phi_{\mathcal{L}})=\frac{\chi(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})}{\chi(\mathcal{P}^0_{X/k})}\tag{21}$$

如命题 4.ii) 的证明那样利用 Leray 谱序列, 由 (5) 显然有

$$R^i\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong R^i\mathrm{pr}_{2*}(m^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1})\quad(\forall i)\tag{22}$$

注意

$$m^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1}\cong\alpha^*(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1})\tag{23}$$

其中 $\alpha=(m,\mathrm{pr}_2):X\times_kX\to X\times_kX$, 为 $X\times_kX$ 的自同构, 故

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})&=\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\chi(R^i\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{M}_{\mathcal{L}})\\&=\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\chi(R^i\mathrm{pr}_{2*}(m^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1}))\\&=\chi(m^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1})\\&=\chi(\alpha^*(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1}))\\&=\chi(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}\otimes_{O_{X\times_kX}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1})\\&=\chi(\mathcal{L})\chi(\mathcal{L}^{-1})=(-1)^g\chi(\mathcal{L})^2\end{aligned}\tag{24}$$

其中最后一步用到 (13)。由命题 4.ii), (21) 和 (24) 即得 $\deg(\phi_{\mathcal{L}})=\chi(\mathcal{L})^2$。

现在考虑一般情形, 可取丰富可逆层 $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ 使得 $\mathcal{L}\cong\mathcal{E}_1\otimes_{O_X}\mathcal{E}_2^{-1}$, 令

$$\mathcal{E}_{mn}=\mathcal{E}_1^m\otimes_{O_X}\mathcal{E}_2^n,\quad\phi_{mn}=\phi_{\mathcal{E}_{mn}}\quad(\forall m,n\in\mathbb{Z})\tag{25}$$

则由命题 I.4.7 及注 I.4.6 可知 $\deg(\phi_{mn})$ 是 m,n 的多项式函数; 另一方面, 由 (14) 可见 $\psi(m,n)=\chi(\mathcal{E}_{mn})^2$ 也是 m,n 的多项式函数。由上述特殊情形可知对 $m,n>0$ 有 $\deg(\phi_{mn})=\psi(m,n)$, 故对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$ 都有 $\deg(\phi_{mn})=\psi(m,n)$, 取 $m=1$, $n=-1$ 即得 $\deg(\phi_{\mathcal{L}})=\chi(\mathcal{L})^2$。

vii) 令 $K_{\mathcal{L}}=\mathrm{Spec}R$, 注意 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是有限平坦的, 而由定义有 $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong(\mathrm{id}_X\times_k\phi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}^0_{X/k}$, 故

$$(\mathrm{id}_X\times_k\phi_{\mathcal{L}})_*\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong\mathcal{P}^0_{X/k}\otimes_k R \tag{26}$$

由命题 4.ii) 的证明可见对任意 i 有

$$R^i\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong\phi^*_{\mathcal{L}}R^i\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{P}^0_{X/k}\cong\begin{cases}R & 若\ i=g\\ 0 & 其他情形\end{cases} \tag{27}$$

注意 (22) 成立, 且可如 vi) 的证明中那样得到

$$\begin{aligned}&\dim_k H^i(X\times_k X, m^*\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times_k X}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^{-1})\\=&\dim_k H^i(X\times_k X,\alpha^*(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times_k X}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1}))\\=&\dim_k H^i(X\times_k X,\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times_k X}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}^{-1})\end{aligned} \tag{28}$$

故由命题 4.ii), (27) 和居内特公式可见对任意 $m\leqslant 2g$ 有

$$\sum_{i=0}^m h^i(\mathcal{L})h^{m-i}(\mathcal{L}^{-1})=\begin{cases}\deg\phi_{\mathcal{L}} & 若\ m=g\\ 0 & 其他情形\end{cases} \tag{29}$$

由此可见有一个 $h^i(\mathcal{L})\neq0$, 且此时 $h^{g-i}(\mathcal{L}^{-1})\neq0$, 而对任一 $j\neq i$ 有 $h^j(\mathcal{L})=0$。证毕。

通常将 (14) 和推论 2.vi) 合起来称为**阿贝尔簇的黎曼-罗赫定理**。注意推论 2 完全可以推广到阿贝尔概形。以下两个命题也都可以推广到阿贝尔概形。

命题 5. 设 $f:Y\to X$ 为 k-阿贝尔簇的同态, $\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层, 则

$$\hat{f}\circ\phi_{\mathcal{L}}\circ f=\phi_{f^*\mathcal{L}} \tag{30}$$

证. 仍记 $\mathcal{P}^0_{X/k}$ 为 $\mathcal{P}_{X/k}$ 在 $X\times_k\hat{X}$ 上的限制。令 $\mathcal{F}=(f\times_k\mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}^0_{X/k}$, 则由定义有 $(\mathrm{id}_Y\times_k\hat{f})^*\mathcal{P}^0_{Y/k}\cong\mathcal{F}$。另一方面由 $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ 的定义显然有

$$(f\times_k f)^*\mathcal{M}_{\mathcal{L}}\cong\mathcal{M}_{f^*\mathcal{L}} \tag{31}$$

注意

$$(\mathrm{id}_X \times_k \phi_{\mathcal{L}}) \circ (f \times_k f) = (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}}) \circ (\mathrm{id}_Y \times_k (\phi_{\mathcal{L}} \circ f)) \tag{32}$$

我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_Y \times_k \phi_{f^*\mathcal{L}})^*\mathcal{P}^0_{Y/k} &\cong \mathcal{M}_{f^*\mathcal{L}} \\ &\cong (\mathrm{id}_Y \times_k (\phi_{\mathcal{L}} \circ f))^*\mathcal{F} \\ &\cong (\mathrm{id}_Y \times_k (\phi_{\mathcal{L}} \circ f))^*((\mathrm{id}_Y \times_k \hat{f})^*\mathcal{P}^0_{Y/k}) \\ &= (\mathrm{id}_Y \times_k (\hat{f} \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f))^*\mathcal{P}^0_{Y/k}\end{aligned} \tag{33}$$

由此及 $\mathcal{P}_{Y/k}$ 的泛性得 (30) 成立。证毕。

命题 6. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, 则有典范同构 $\mu_X : X \to \hat{\hat{X}}$。将 X 与 $\hat{\hat{X}}$ 按 μ_X 等同起来, 则 $\mathcal{P}_{X/k}$ 同构于 $\hat{X}$ 的庞加莱层 (如果交换 $X \times_k \hat{X}$ 的因子的话)。此外, 对 X 上的任意丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 有 $\hat{\phi}_{\mathcal{L}} \circ \mu_X = \phi_{\mathcal{L}}$。

证. 为方便起见, 对任意阿贝尔簇的同态 $f : X \to Y$ 及任意整数 n, 记 $nf = f \circ n_X = n_Y \circ f$。由命题 1.i) 有 $\widehat{nf} = n\hat{f}$。此外记 $e_{XY} : X \times_k Y \to Y \times_k X$ 为交换因子的同构。

由于 $e^*_{\hat{X}X}\mathcal{P}_{X/k} \in \mathrm{Pic}(\hat{X} \times_k X/X)$, 存在典范态射 $\mu_X : X \to \hat{\hat{X}}$ 使得 $(\mathrm{id}_{\hat{X}} \times_k \mu_X) * \mathcal{P}_{\hat{X}/k} \cong e^*_{\hat{X}X}\mathcal{P}_{X/k}$, 我们来证明 μ_X 是同构。

任取 X 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 则因 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同源 (命题 2), 由引理 1.2 可取正整数 n 及同源 $f : \hat{X} \to X$ 使得 $f \circ \phi_{\mathcal{L}} = n_X$, 于是 $f \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f = n_X \circ f = f \circ n_{\hat{X}}$, 故 $\phi_{\mathcal{L}} \circ f = n_{\hat{X}}$。由命题 5 有 $\phi_{f^*\mathcal{L}} = \hat{f} \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ f = n\hat{f}$。由

$$\begin{aligned}(nf \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}^0_{X/k} &\cong (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}})^*(n_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}})^*\mathcal{P}^0_{X/k} \\ &\cong (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}})^*(\mathrm{id}_X \times_k n_{\hat{X}})^*\mathcal{P}^0_{X/k} \\ &\cong (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}})^*(\mathrm{id}_X \times_k f)^*(\mathrm{id}_X \times_k \phi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}^0_{X/k} \\ &\cong (f \times_k f)^*\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \cong \mathcal{M}_{f^*\mathcal{L}}\end{aligned} \tag{34}$$

可见下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X} \times_k \hat{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \hat{X} \times_k \hat{X} & \xrightarrow{e_{\hat{X}\hat{X}}} & \hat{X} \times_k \hat{X} \\ \downarrow{\scriptstyle nf \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle n\hat{f} \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\hat{X}} \times_k n\hat{f}} \\ X \times_k \hat{X} & \xrightarrow{\mu_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{X}}} & \hat{\hat{X}} \times_k \hat{X} & \xrightarrow{e_{\hat{\hat{X}}\hat{X}}} & \hat{X} \times_k \hat{\hat{X}} \end{array} \tag{35}$$

故 $\mu_X \circ nf = n\hat{f}$。由命题 1 有 $\deg(nf) = \deg(n\hat{f})$, 故 $\deg(\mu_X) = 1$, 即 μ_X 是同构。

注意由此还得到 $\mu_X \circ f = \hat{f}$, 故

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{\mathcal{L}} \circ \mu_X \circ f = \hat{\phi}_{\mathcal{L}} \circ \hat{f} = \widehat{f \circ \phi_{\mathcal{L}}} \\ = \hat{n}_X = n_{\hat{X}} = \phi_{\mathcal{L}} \circ f\end{aligned} \tag{36}$$

由此及 f 为同源可见 $\hat{\phi}_{\mathcal{L}} \circ \mu_X = \phi_{\mathcal{L}}$。证毕。

由命题 6 可见, 任意阿贝尔概形 $X \to S$ 都可以看作一个阿贝尔概形 $\hat{X} \to S$ 的对偶。特别地若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数), 则移位同态 $V_{\mathcal{P}ic(\hat{X}/S)/S}$ 显然诱导一个同态 $(\hat{\hat{X}})^{(p)} \cong \hat{\hat{X}}^{(p)} \to \hat{\hat{X}}$, 通过 μ_X 可将它看作一个同态 $X^{(p)} \to X$, 称为 X 的移位同态并记作 $V_{X/S}$。简言之 $V_{X/S}$ 是 X 的对偶的夫罗贝纽斯的对偶。这样由命题 VI.1.1 立得 $V_{X/S} \circ F_{X/S} = p_X$。更一般地, 对任意非负整数 n, $F^n_{\hat{X}/S}$ 的对偶给出一个同态 $V^n_{X/S} : X^{(p^n)} \to X$。记 $X^{(p^n)}[V^n] = \ker(V^n_{X/S}) \subset X^{(p^n)}$。由 p_X 的典范性有

$$F_{X/S} \circ V_{X/S} \circ F_{X/S} = F_{X/S} \circ p_X = p_{X^{(p)}} \circ F_{X/S} \tag{37}$$

故由 $F_{X/S}$ 是同源可见 $F_{X/S} \circ V_{X/S} = p_{X^{(p)}}$。再由命题 1 得

推论 3. 设 p 为素数, S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, $X \to S$ 为阿贝尔概形, 则对任意非负整数 n 有

$$V^n_{X/S} \circ F^n_{X/S} = p^n_X \ , \quad F^n_{X/S} \circ V^n_{X/S} = p^n_{X^{(p^n)}} \tag{38}$$

且有

$$X[F^n]^D \cong \hat{X}^{(p^n)}[V^n] \ , \quad \hat{X}[F^n]^D \cong X^{(p^n)}[V^n] \tag{39}$$

以及正合列

$$0 \to X[F^n] \to X[p^n] \to X^{(p^n)}[V^n] \to 0 \tag{40}$$

在推论 3 的条件下, 若 $H \subset X$ 为 S 上的有限平坦子群概形, 则由 (38) 和 $V_{H/S} \circ F_{H/S} = p_H$ (引理 II.1.4) 及夫罗贝纽斯的自然性可见

$$V_{H/S}|_{\mathrm{im}(F_{H/S})} = V_{X/S}|_{\mathrm{im}(F_{H/S})} \tag{41}$$

由于 $F_{X/S}$ 是同源, 对任意有限平坦闭子群概形 $H' \subset X$ 都存在有限平坦闭子群概形 $H \subset X$ 使得 $\mathrm{im}(F_{H/S}) \supset H'^{(p)}$ (取 $H = F_{X/S}^{-1}(H'^{(p)})$ 即可)。将 (41) 限制在 $H'^{(p)}$ 上就得到 $V_{H'/S} = V_{X/S}|_{H'^{(p)}}$。这样就有

推论 4. 设 p 为素数, S 为诺特 $\mathbb{F}_p$-概形, $X \to S$ 为阿贝尔概形, $H \subset X$ 为 S 上的有限平坦子群概形, 则对任意有限平坦闭子群概形及任意非负整数 n 有

$$V_{H/S}^n = V_{X/S}^n|_{H^{(p^n)}} : H^{(p^n)} \to H \tag{42}$$

简言之阿贝尔概形的移位同态与其有限平坦闭子群概形的移位同态相容。

例 3. 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域, E 为 k 上的椭圆曲线。令 $G = E[p]$, 则由命题 1.ii) 和例 2 有 $G \cong G^D$。若 E 是平常的 (参看例 1.1), 则 G 含有离散子群概形 $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 故由 $G \cong G^D$ 可见 G 含有子群概形 $H^D \cong \mu_p$, 但由命题 1.1.iii) 可知 G 的次数为 p^2, 故有 $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times_k \mu_p$。

若 E 为超奇的, 由于 $F_{E/k}$ 是同源且 $\hat{E}$ 与 E 同源, 由上节可知 $E^{(p)}$ 和 $\hat{E}$ 也是超奇的。令 $H = \ker(F_{E/k})$, 则 H 与 $H^D \cong \ker(F_{\hat{E}/k})$ 都是无穷小的, 由命题 Ⅲ.4.2 可知 $H \cong \alpha_p$, 故有正合列

$$0 \to \alpha_p \to E[p] \to \alpha_p \to 0 \tag{43}$$

(关于 G 的结构参看下章例 Ⅷ.3.1)。

由此还可见 E 为平常当且仅当存在单同态 $\mu_p \hookrightarrow E$, 而 E 为超奇当且仅当存在单同态 $\alpha_p \hookrightarrow E$。

命题 7. 设 X 为域 k 上的 g 维阿贝尔簇, $\mathcal{L}$ 为 X 上的丰富可逆层, 则 $h^0(\mathcal{L}) \neq 0$, 且对任意 $n \geqslant 3$, $\mathcal{L}^n$ 是极丰富的。

证. 不妨设 k 是代数闭的。我们仅讨论 $n = 3$ 的情形, $n > 3$ 的情形类似。为证明 $\mathcal{L}^3$ 是极丰富的, 需要证明 $V = H^0(X, \mathcal{L}^3)$ 分离 X 的点且分离切空间 (参看 [H, Proposition Ⅱ.7.3])。

我们先来说明 $h^0(\mathcal{L}) \neq 0$, 即推论 2.vii) 中的指数 $i(\mathcal{L}) = 0$。注意若

$f: Y \to X$ 为同源, 则由命题 5 可见 $K_{f^*\mathcal{L}}$ 有限, 且由引理 2 有

$$(-1)^{i(f^*\mathcal{L})}h^{i(f^*\mathcal{L})}(f^*\mathcal{L}) = \chi(f^*\mathcal{L}) = \deg(f)\chi(\mathcal{L}) = (-1)^{i(\mathcal{L})}h^{i(\mathcal{L})}(\mathcal{L})\deg(f) \tag{44}$$

故 $i(f^*\mathcal{L}) = i(\mathcal{L})$。而由推论 2 可知对任意正整数 n, $n_X^*\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}^{n^2}$ 数值等价, 故对充分大的 n, $n_X^*\mathcal{L}$ 是极丰富的, 从而 $h^0(n_X^*\mathcal{L}) \neq 0$, 即 $i(n_X^*\mathcal{L}) = 0$, 取 $f = n_X$ 即得 $i(\mathcal{L}) = 0$。

这样就有有效除子 $D \subset X$ 使得 $O_X(D) \cong \mathcal{L}$。注意 X 是非奇异代数簇, 其局部函数环都是 UFD, 故 D 可分解为素除子的和 $D = P_1 + \cdots + P_m$。若存在 $x_0 \in K_{\mathcal{L}}$ 使得 $T_{x_0}(P_1)$ 等于某个 P_i $(i > 1)$, 将 P_1 和 P_i 分别换为 $T_x(P_1)$ 和 $T_{-x}(P_i)$ 得到一个除子 D', 由 (2.1.11) 可见 $O_X(D') \cong \mathcal{L}$; 而对足够一般的 $x \in X$, $T_x(P_1)$ 不等于 D' 的任何其他素除子在任何平移 T_{y_0} $(y_0 \in K_{\mathcal{L}})$ 下的像。由归纳法可取 D 使得对任意 $x_0 \in K_{\mathcal{L}}$, $T_{x_0}(P_i) = P_j$ 仅当 $i = j$ 且 $x_0 = 0$ 时成立。由此可见对任意 $x \neq 0 \in X$ 有 $T_x(D) \neq D$, 因为若 $T_x(D) = D$ 则 $T_x^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$, 从而 $x \in K_{\mathcal{L}}$, 再由 D 的取法有 $x = 0$。

对任意闭点 $x_1 \neq x_2 \in X$ 取闭点 $x \in X$ 使得 $x_1 \in T_{-x}(D)$, 由 (2.1.11) 可见

$$T_{-x}(D) + T_{-y}(D) + T_{x+y}(D) \in |\mathcal{L}^3| \quad (\forall x, y \in X_{\mathrm{cl}}) \tag{45}$$

对足够一般的 y 有 $x_2 \notin T_{-y}(D) + T_{x+y}(D)$, 我们来说明存在 x 使得 $x_2 \notin T_{-x}(D)$。若不然, 即 $x_1 \in T_{-x}(D) \Rightarrow x_2 \in T_{-x}(D)$, 换言之 $x \in T_{-x_1}(D) \Rightarrow x \in T_{-x_2}(D)$, 即 $T_{-x_1}(D) = T_{-x_2}(D)$, 但由上所述这仅当 $x_1 = x_2$ 时成立, 矛盾。这说明可取 x, y 使得 $x_2 \notin T_{-x}(D) + T_{-y}(D) + T_{x+y}(D)$, 故 V 分离 X 的点, 从而给出有限 k-态射 $f: X \to \mathbb{P}(V^\vee)$。

将 $X \times_k X$ 通过 pr_2 看作 X-概形, 则它有两个 X-有效除子 $D \times_k X$ 和 $\alpha(D \times_k X)$, 令 $H \subset X$ 为这两个除子的等化子 (见推论 Ⅳ.2.3), 易见 H 是闭子群概形。由上所述可见 H 只有一个点 0, 故若 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 则 $H = 0$, 而若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$ 则 H 为无穷小群。在特征 $p > 0$ 的情形, H 在 D 上的作用给出 $Y = X/H$ 的一个除子 $E = D/H$, 而 $\mathcal{L}$ 同构于 $O_Y(E)$ 的拉回, 注意 $O_Y(E)$ 是 Y 上的丰富层。这样就有 H 在 $W = H^0(X, \mathcal{L})$ 上的一个诱导作用 ρ。若 $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ 是对应于 D 的一个截口, 则 ks 在 ρ 下的安定子群概形为 0, 因为 H 在 D 上的作用是自由的。由此易见 ρ 在 $\mathbb{P}(W^\vee)$ 上的诱导作用是忠实的。

令 $T=\mathrm{Spec}k[t]/(t^2)$, 则 X 在 x_1 处的一个切向量等价于一个 k-态射 $T\to X$ 将 T 的闭点映到 x_1, 即 x_1 的一个无穷小变形。故 V 分离 $x_1\in X$ 的切空间等价于对 x_1 的任意两个不同的无穷小变形 $\phi_1,\phi_2:T\to X$, 若 $\phi_1(T)\neq\phi_2(T)$ 则 $f\circ\phi_1(T)\neq f\circ\phi_2(T)$。设 $v_1,v_2\in T_{X,x_1}$ 分别为 ϕ_1,ϕ_2 所对应的切向量, 则 $\phi_1(T)\neq\phi_2(T)$ 等价于 v_1 和 v_2 在 k 上线性无关。为方便起见对任意 $c\in k^*$ 简记 cv_2 所对应的 k-态射 $T\to X$ 为 $c\phi_2$, 注意 $c\phi_2(T)=\phi_2(T)$。记 $X'=X\times_k T$, $D'=D\times_k T$, 由上所述可见对任意 T-点 $x',y'\in X'(T)$ 有

$$T_{-x'}(D')+T_{-y'}(D')+T_{x'+y'}(D')\in|\mathcal{L}^3/T| \tag{46}$$

取 $x'\in X'(T)$ 使得 $\phi_1\in T_{-x'}(D')$, 对足够一般的 y' 有 $\phi_2\notin T_{-y'}(D')+T_{x'+y'}(D')$, 故若存在 $x'\in X'(T)$ 使得 $\phi_2\notin T_{-x'}(D')$ 则 V 分离 ϕ_1 和 ϕ_2。若不然, 即 $\phi_1\in T_{-x'}(D')\Rightarrow\phi_2\in T_{-x'}(D')$, 换言之 $x'\in T_{-\phi_1}(D')\Rightarrow x'\in T_{-\phi_2}(D')$, 即 $T_{-\phi_1}(D')=T_{-\phi_2}(D')$, 则由 H 的泛性可见 $\phi_1-c\phi_2$ 经过 H $(\forall c\in k^*)$, 而这仅当 $\mathrm{ch}(k)\neq 0$ 时才可能发生; 由于 H 在 $\mathbb{P}(W^\vee)$ 上的作用是忠实的, 存在 $c\in k^*$ 使得 $T_{\phi_1-c\phi_2}$ 不保持 $T_{-\phi_1}(D')$, 矛盾。证毕。

习题

1. 设阿贝尔概形 $X\to S$ 有一个主极化 ϕ。证明对任意正整数 n, ϕ 诱导典范同构 $X[n]\to X[n]^D$。

2. 设 k 为特征 $p>0$ 的代数闭域, E 为 k 上的超奇椭圆曲线, $G=E[p]\cong\mathrm{Spec}(R)$。则由推论 Ⅲ.1.3 和例 3 可见 $R\cong k[x]/(x^{p^2})$, 且 $H=E[F]\cong\alpha_p\cong\mathrm{Spec}(R/(x^p))$。证明下列事实。

i) 可取 x 使得其在 $R/(x^p)$ 中的像 $\bar{x}\in\alpha(H)$ (参看 Ⅲ.4 节)。

ii) 令 y 为 x 在 $O_{G^{(p)}}(G^{(p)})\cong R^{(p)}=R\otimes_{\sigma_k}k$ 中的像, 则 $y\in\alpha(E[V])$, 而 (39) 诱导同构 $\phi:E[V]\cong G/H$, 使得 $\phi^*(\bar{x})=cy$ $(c\in k^\times)$。适当取 x 还可使 $c=1$。

iii) 设 $X=E\times_k E$, $M=\alpha(X[F])$, 如 ii) 那样取 M 的一组基 v_1,v_2。则 X 的一个同构于 α_p 的子群概形 H_0 等价于 M 的一个 1 维 k-线性子

空间 kv, 其中 $v = c_1v_1 + c_2v_2$ ($c_1, c_2 \in k$ 不全为 0)。令 $X_1 = X/H_0$, 则 $F_{X_1/k}$ 和 $V_{X_1^{(p-1)}/k}$ 均经过 $X^{(p)} = X/X[F]$。

iv) 令 $H_1 = X[p]/H_0 \subset X_1$, $H_2 = X[p]/X[F] \cong X[F]^{(p)}$, 则 $F_{X_1/k}$ 和 $V_{X_1^{(p-1)}/k}$ 分别诱导 $\phi : H_2 \to H_1^{(p)}$, $\psi : H_2 \to H_1^{(p^{-1})}$。将 v_1, v_2 在 $\alpha(X[F]^{(p)}) \cong M^{(p)}$ 中的像分别记为 w_1, w_2, 则 $\ker(\phi)$ 和 $\ker(\psi)$ 分别为 $c_1^p w_1 + c_2^p w_2$ 和 $c_1^{p^{-1}} w_1 + c_2^{p^{-1}} w_2$ 定义的 α-子群。

v) 若 $c_1, c_2 \neq 0$ 且 $c_1/c_2 \notin \mathbb{F}_{p^2}$, 则 $\ker(\phi) \neq \ker(\psi)$, 从而 $X_1[F] \cap X_1^{(p^{-1})}[V] \cong \alpha_p$; 而在其他情形 $X_1[F] \cap X_1^{(p^{-1})}[V] \cong \alpha_p^2$。这给出同源而不同构的又一个例子 (参看例 1)。

3. 设 S 为诺特概形。一个交换群概形 $X \to S$ 称为拟阿贝尔概形如果它是一个阿贝尔概形通过一个有限平坦交换群概形的扩张 (即存在一个有限平坦交换闭子群概形 $H \subset X$ 使得 X/H 为阿贝尔概形)。记 $\mathfrak{C}$ 为 S-拟阿贝尔概形的范畴。

i) 设 $X \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, $H \subset X$ 为有限平坦闭子群概形使得 $Y = X/H$ 为阿贝尔概形。证明存在有限忠实平坦同态 $H \times_S Y \to X$, 故存在有限平坦闭子群概形 $G \subset H \times_S Y$ 使得 $X \cong (H \times_S Y)/G$。

ii) 证明 $\mathfrak{C}$ 中的任意两个对象有直积, 且任意平坦同态有核及余核, 其中余核是有限平展群概形。

iii) $\mathfrak{C}$ 中的一个同态称为同源, 如果它有有限平坦的核及余核。详言之, 一个同态 $f : X \to Y$ 为同源意味着存在有限平坦交换群概形 G 及忠实平坦同态 $g : Y \to G$, 使得 f 经过 $\ker(g)$, 且诱导的 $X \to \ker(g)$ 是有限忠实平坦的。证明同源是一个等价关系。(提示: 设 $X_i \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, $H_i \subset X_i$ 为有限平坦闭子群概形使得 $Y_i = X_i/H_i$ 为阿贝尔概形 ($i = 1, 2$), 则 X_1 与 X_2 同源当且仅当 Y_1 与 Y_2 同源。)

iv) 设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数)。证明对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ 可以定义一个函子性的"移位"同态 $V_{X/S} : X^{(p)} \to X$, 它是有限平坦交换群概形和阿贝尔概形的移位同态的推广, 且满足 $V_{X/S} \circ F_{X/S} = p_X$, $F_{X/S} \circ V_{X/S} = p_{X^{(p)}}$。

4. 设 X 为代数闭域 k 上的单阿贝尔簇, $D \subset X$ 为非零有效除子。证明 $O_X(D)$ 是丰富层。

5. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ 为 X 上数值等价的两个可逆层。证明若 $\mathcal{L}$ 是丰富的 (或极丰富的) 则 $\mathcal{L}'$ 亦然。

6. 设 k 为代数闭域, X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇, 具有 d^2 次极化。证明 X 由 $\mathcal{H}ilb^X_{\mathbb{P}^N_k}$ 的一个 k-点代表, 其中 $N = 3^g d - 1$, $\chi(x) = 3^g dx^g$。

7. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, ϕ 为 X 的一个极化。证明存在有限扩域 $k' \supset k$ 及 $X \otimes_k k'$ 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $\phi \otimes_k \mathrm{id}_{k'} = \phi_{\mathcal{L}}$。

8. 设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇, $\mathcal{L}$ 为 X 上的丰富可逆层, $G = \ker(\phi_{\mathcal{L}})$, 则有典范同构 $\eta : G \to G^D \cong \ker(\hat{\phi}_{\mathcal{L}}) \subset \hat{X}$。设 H 为 G 的闭子群概形, 则 H^D 可以看作 $G \cong G^D$ 的商群概形。记 $i : H \to G$ 为嵌入, $j : G \to H^D$ 为投射。令 $Y = X/H$, $q : X \to Y$ 为投射。证明若 $q \circ \eta \circ i = 0 : H \to H^D$ 则存在 Y 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}'$ 使得 $q^*\mathcal{L}' \cong \mathcal{L}$, 从而 $\phi_{\mathcal{L}} = \hat{q} \circ \phi_{\mathcal{L}'} \circ q$, 特别地若 $\ker(q \circ \eta) = H$ 则 $\phi_{\mathcal{L}'}$ 是主极化。(提示: 由 (2.1.2) 可知 $\mathcal{P}ic(\hat{X}/k)/G^D \cong \mathcal{P}ic(\hat{X}/k)$。令 $V \subset \mathcal{P}ic(\hat{X}/k)$ 为 $\phi_{\mathcal{L}}$ 所对应的连通分支, $V' = \mathcal{P}ic(\phi_{\mathcal{L}})^{-1}(V) \subset \mathcal{P}ic(\hat{X}/k)$, 则有 $G \cong G^D$ 在 V' 上的诱导作用而 $V'/G \cong V$。令 $W = \mathcal{P}ic(q)^{-1}(V) \subset \mathcal{P}ic(Y/k)$, 则有 H^D 在 W 上的诱导作用且 $W/H^D \cong V$。由所设 $H \subset \ker(i^D)$ 在 W 上的诱导作用平凡, 故投射 $V' \to W$ 经过 $V'/H \subset \mathcal{P}ic(\hat{Y}/k)$。任取 W 中的一个闭点所对应的 Y 上的可逆层 $\mathcal{L}'$, 验证 $\phi_{\mathcal{L}} = \hat{q} \circ \phi_{\mathcal{L}'} \circ q$。)

第 3 节　l-进表示初步

1. l-进表示

复数域上的一个阿贝尔簇是一个复环面 $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$, 其中 $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ 是一个秩为 $2g$ 的离散子群, 称为一个格 (详见下面第 5 节)。对 X 的研究经常可以归结到对格 Λ 的研究, 例如有限子群、同态等都可以很直接很简单地得到。但是对于特征 $p > 0$ 的域上的阿贝尔簇, 没有格这样一个工具可以使用, 这使得问题远比特征零的情形困难得多。对于某些问题, 如自同态环和同态模的结构, 伽罗瓦群的作用, 有理点, 极化等, l-进表示

是一个可以部分替代格的研究工具。

设 X 为代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇, l 为素数且 $l \neq \mathrm{ch}(k)$, 则由 (1.2.14) 可知

$$X[l^m] \cong (\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})^{2g} \quad (\forall m \geqslant 0) \tag{1}$$

(为离散群概形)。由于 l_X 是满同态 (同源), 易见 l_X 诱导满同态

$$l\cdot : X[l^{m+1}] \twoheadrightarrow X[l^m] \quad (\forall m \geqslant 0) \tag{2}$$

定义

$$T_l(X) = \varprojlim_m X[l^m] \tag{3}$$

它显然具有自由 $\mathbb{Z}_l$-模结构 ($T_l(X) \cong \mathbb{Z}_l^{2g}$), 称为 X 的泰特群或泰特模。注意由 $T_l(X)$ 至少可以知道 $\dim(X)$。

以下总是用 l 记一个不等于基域特征的素数。

设 G 是一个群, Φ 是 G 在 X 上的一个同构表示 (即一个群同态 $G \to \mathrm{Aut}_k(X)$, 将每个 $g \in G$ 映到 X 作为群概形的自同构), 则显然任意 $g \in G$ 诱导 $T_l(X)$ 的一个 $\mathbb{Z}_l$-线性自同构, 这就给出 G 在 $T_l(X) \cong \mathbb{Z}_l^{2g}$ 上的一个 $\mathbb{Z}_l$-线性作用, 等价于一个同态 $G \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_l)$。这就是 Φ 诱导的群 G 的 l-进表示。由定义易见有典范同构

$$T_l(X)/l^m T_l(X) \cong X[l^m] \quad (\forall m \geqslant 0) \tag{4}$$

由于 $\bigcup_m X[l^m]$ 在 X 中察理斯基稠密 (习题 1.3), 若 $\gamma \in G$ 在 $T_l(X)$ 上的作用等于 $\mathrm{id}_{T_l(X)}$, 则 $\Phi(\gamma) = \mathrm{id}_X$ (因为 $\Phi(\gamma) - \mathrm{id}_X$ 在稠密子集 $\bigcup_m X[l^m]$ 上处处等于 0)。因此, Φ 是忠实表示当且仅当 Φ 诱导的 l-进表示是忠实的。

其他代数对象 (如环) 在 X 上的作用也可能诱导在 $T_l(X)$ 上的表示, 统称为 l-进表示。

设 $f: X \to Y$ 是代数闭域 k 上的阿贝尔簇的同态, 则显然 f 诱导同态

$$f[l^m] : X[l^m] \to Y[l^m] \quad (\forall m \geqslant 0) \tag{5}$$

且与 $l\cdot$ 相容 (即对任意 m 有 $l\cdot \circ f[l^{m+1}] = f[l^m] \circ l\cdot$), 故诱导一个典范 $\mathbb{Z}_l$-模同态

$$T_l(f) = \varprojlim_m f[l^m] : T_l(X) \to T_l(Y) \tag{6}$$

由于 $\bigcup_m X[l^m]$ 在 X 中察理斯基稠密 (习题 1.3), 若 $f \neq 0 \in \mathrm{End}_k(X)$, 则存在 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $f[l^m] \neq 0$, 从而有 $T_l(f) \neq 0$。这给出加法群的典范单同态

$$\mathrm{Hom}_k(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y)) \tag{7}$$

注意若 X, Y 的维数分别为 g_X, g_Y, 则 (7) 的右边同构于 $\mathbb{Z}_l$ 上的所有 $2g_X \times 2g_Y$ 矩阵组成的加法群。

特别地取 $X = Y$ 并令 $g = g_X$, 则 (7) 给出环 $\mathrm{End}_k(X)$ 在 $T_l(X)$ 上的一个 $2g$ 维 $\mathbb{Z}_l$-线性表示, 即 $\mathrm{End}_k(X)$ 的 l-进表示, 注意这个表示是忠实的 (即 (7) 是单射)。而 $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ 可以看作右 $\mathrm{End}_k(X)$-模和左 $\mathrm{End}_k(Y)$-模, 所以 (7) 也可以看作模的 l-进表示。

若 X 定义在子域 $k_0 \subset k$ 上 (即存在 k_0-阿贝尔簇 X_0 使得 $X \cong X_0 \otimes_{k_0} k$) 而 k 是 k_0 的代数扩张, 则易见有 $G = \mathrm{Gal}(k/k_0)$ 在 $T_l(X)$ 和 $T_l(X) \otimes \mathbb{Q}$ 上的典范诱导作用; 此时若 $f \in \mathrm{End}_k(X)$是定义在 k_0 上的 (即存在 $f_0 \in \mathrm{End}_{k_0}(X_0)$ 使得 $f = f_0 \otimes_{k_0} \mathrm{id}_k$), 则 $T_l(f)$ 与 G 的诱导作用交换 (参看 V.4.3)。这就是 l-进伽罗瓦表示的概念。

为方便起见我们用下面的记号: 设 S 为连通诺特概形,$G \to S$ 为有限平坦交换群概形, p 为素数使得 $n = \deg(G/S)$ 有分解 $n = p^r m$ $(p \nmid m)$, 则 $G \cong G[p^r] \times_S G[m]$ (习题 Ⅱ.1.4), 记 $G_{(p)} = G[p^r]$ (G 的“p-部分”)。

引理 1. 设 $f : X \to Y$ 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇的同源, 则对任意素数 $l \neq \mathrm{ch}(k)$ 有典范同构

$$\ker(f)_{(l)} \cong \mathrm{coker}(T_l(f)) \tag{8}$$

证. 取最小的整数 r 使得 $\ker(f)_{(l)} = \ker(f)[l^r] = \ker(f) \cap X[l^r]$。令 $g = \dim(X) = \dim(Y)$。对任意非负整数 n 简记 $f_n = f[l^n]$, 注意 $X[l^n] \cong Y[l^n] \cong (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^{2g}$, 可见 $\ker(f_n)$ 与 $\mathrm{coker}(f_n)$ 有相同的阶 (即在 k 上的次数)。易见对 $n \geqslant r$ 有交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X[l^n] & \longrightarrow & X[l^{n+r}] & \xrightarrow{l^n \cdot} & X[l^r] & \to & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+r} & & \downarrow f_r & & \\ 0 & \to & Y[l^n] & \longrightarrow & Y[l^{n+r}] & \xrightarrow{l^n \cdot} & Y[l^r] & \to & 0 \end{array} \tag{9}$$

由 $\ker(f_n) = \ker(f_{n+r}) = \ker(f_r)$ 可见 (9) 诱导的 $\ker(f_n) \to \ker(f_{n+r})$ 是同构; 而由 $\mathrm{coker}(f_{n+r})$ 和 $\mathrm{coker}(f_r)$ 的阶都等于 $\ker(f_r)$ 的阶可见 (9) 诱导的满同态 $\mathrm{coker}(f_{n+r}) \to \mathrm{coker}(f_r)$ 是同构, 故蛇形引理给出的典范同态 $\delta_n : \ker(f_r) \to \mathrm{coker}(f_n)$ 是同构。令 $q_{n+1} : \mathrm{coker}(f_{n+1}) \to \mathrm{coker}(f_n)$ 为 $l\cdot : Y[l^{n+1}] \to Y[l^n]$ 诱导的满同态, 则由 δ_n 的自然性可见 $q_{n+1} \circ \delta_{n+1} = \delta_n$, 故有典范同构

$$\ker(f)_{(l)} = \ker(f)[l^r] \cong \varprojlim_n \mathrm{coker}(f_n) \tag{10}$$

由交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to \ker(f)[l^r] & \longrightarrow & X[l^{n+1}] & \xrightarrow{f_{n+1}} & Y[l^{n+1}] & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f_{n+1}) \to 0 \\
\downarrow l\cdot & & \downarrow l\cdot & & \downarrow l\cdot & & \downarrow q_{n+1} \\
0 \to \ker(f)[l^r] & \longrightarrow & X[l^n] & \xrightarrow{f_n} & Y[l^n] & \longrightarrow & \mathrm{coker}(f_n) \to 0
\end{array} \tag{11}$$

取逆极限得典范正合列

$$0 \to T_l(X) \to T_l(Y) \to \varprojlim_n \mathrm{coker}(f_n) \to 0 \tag{12}$$

由 (10) 和 (12) 即得典范同构 (8)。证毕。

注意若 $g : Y \to Z$ 是另一个同源, 则诱导正合列

$$0 \to \mathrm{coker}(T_l(f)) \to \mathrm{coker}(T_l(g \circ f)) \to \mathrm{coker}(T_l(g)) \to 0 \tag{13}$$

与正合列

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g \circ f) \to \ker(g) \to 0 \tag{14}$$

一致。

2. l-进表示与同态模

由命题 1.1.iii) 可知对任意非零整数 n 及任意 $f \neq 0 \in \mathrm{Hom}_k(X, Y)$ 有 $nf \neq 0$, 换言之 $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ 是无挠 (即平坦) $\mathbb{Z}$-模。

命题 1. 设 X, Y 为域 k 上的阿贝尔簇, 则 $\mathrm{Hom}_k(X,Y)$ 为有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模, 其秩不大于 $4\dim(X)\dim(Y)$。此外, (1.7) 诱导的典范同态

$$\mathrm{Hom}_k(X,Y)\otimes\mathbb{Z}_l\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X),T_l(Y)) \tag{1}$$

是单射。

证. 首先, 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则显然 $\mathrm{Hom}_k(X,Y)$ 为 $\mathrm{Hom}_{\bar{k}}(X\otimes_k\bar{k}, Y\otimes_k\bar{k})$ 的 $\mathbb{Z}$-子模, 故不妨设 k 是代数闭的。其次, 由推论 2.1 有单阿贝尔簇 $X_1,...,X_r$ 及 $Y_1,...,Y_s$ 使得存在同源

$$X_1\times_k\times\cdots\times_k X_r\to X,\quad Y\to Y_1\times_k\times\cdots\times_k Y_s \tag{2}$$

这就给出 $\mathbb{Z}$-模单同态

$$\mathrm{Hom}_k(X,Y)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_k(X_1\times_k\times\cdots\times_k X_r, Y_1\times_k\times\cdots\times_k Y_s) \tag{3}$$

右边可以看作由所有矩阵 (f_{ij}) $(f_{ij}\in\mathrm{Hom}_k(X_i,Y_j), 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant s)$ 组成的 $\mathbb{Z}$-模, 这就约化为 X 和 Y 是单阿贝尔簇的情形。再次, 若 X 和 Y 是单的, 则一个同态 $f: X\to Y$ 或者是零同态, 或者是满同态, 即同源。这样我们只需考虑 X 与 Y 同源等价的情形, 此时任取一个同源 $Y\to X$ 就可将 $\mathrm{Hom}_k(X,Y)$ 嵌入为 $\mathrm{End}_k(X)$ 的 $\mathbb{Z}$-子模, 这就又化为 $X=Y$ 的情形。

注意 $\mathrm{End}_k(X)$ 中的非零元都是同源, 故有非零次数。记 $\mathrm{End}^0(X)=\mathrm{End}_k(X)\otimes\mathbb{Q}$, 为 $\mathbb{Q}$-代数。对任一 $\mathbb{Z}$-子模 $M\subset\mathrm{End}_k(X)$ 简记 $\mathbb{Q}M$ 为 M 在 $\mathrm{End}^0(X)$ 中生成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间。若 $M\subset\mathrm{End}_k(X)$ 为有限生成的 $\mathbb{Z}$-子模, 任取 M 的一组自由生成元, 则由推论 2.2 可见 $\deg: M\to\mathbb{Z}$ 是 (作为生成元的 $\mathbb{Z}$-线性组合的) 系数的多项式函数, 它可以扩张为一个函数 $\deg:\mathbb{Q}M\to\mathbb{Q}$。由此可见 $\mathbb{Q}M\cap\mathrm{End}_k(X)\subset\mathrm{End}^0(X)$ 也是有限生成的, 这是因为 $\mathbb{Q}M\cap\mathrm{End}_k(X)$ 与 $\mathbb{Q}M$ 中的开集 $\{f\in\mathbb{Q}M|\deg(f)<1\}$ 只有 1 个交点 0, 故为 $\mathbb{Q}M$ 的离散加法子群, 而 m 维实线性空间中的离散加法子群是秩 $\leqslant m$ 的自由阿贝尔群。

令 $g=\dim(X)$。由上所述 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X))$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}_l$-模, 且有典范单同态 $\mathrm{End}_k(X)\hookrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X))$。我们下面证明对任意有限生成的 $\mathbb{Z}$-子模 $M\subset\mathrm{End}_k(X)$, 诱导同态

$$M\otimes\mathbb{Z}_l\to\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X)) \tag{4}$$

是单射。由上所述不妨设

$$M = \mathbb{Q}M \cap \mathrm{End}_k(X) \subset \mathrm{End}^0(X) \tag{5}$$

任取 M 的一组自由生成元 $f_1, ..., f_r$。用反证法，设 (4) 不是单射，则有不全为 0 的 $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}_l$ 使得

$$n_1 T_l(f_1) + \cdots + n_r T_l(f_r) = 0 \tag{6}$$

由 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X))$ 的无挠性不妨设至少有一个 $n_j \not\equiv 0 \pmod{l}$，对每个 i 取 $m_i \in \mathbb{Z}$ 使得 $m_i \equiv n_i \pmod{l}$，则有一个 $m_j \not\equiv 0 \pmod{l}$。由 (6) 可见 $f = m_1 f_1 + \cdots + m_r f_r \in \mathrm{End}_k(X)$ 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X))$ 中的像

$$T_l(f) = (m_1 - n_1)T_l(f_1) + \cdots + (m_r - n_r)T_l(f_r) \in l\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X)) \tag{7}$$

故 $\mathrm{coker}(l\cdot) \hookrightarrow \mathrm{coker}(T_l(f))$，从而由引理 1 可见

$$X[l] \subset \ker(f)_{(l)} \cong \mathrm{coker}(T_l(f)) \tag{8}$$

这说明 f 经过 l_X，即存在 $f' \in \mathrm{End}_k(X)$ 使得 $f = lf'$。但由 (5) 有 $f' \in M$，与存在 $m_j \not\equiv 0 \pmod{l}$ 矛盾。

这说明 M 的秩不大于 $4g^2$。取 $M \subset \mathrm{End}_k(X)$ 为秩最大且满足 (5) 的一个 $\mathbb{Z}$-子模，则有 $\mathbb{Q}M = \mathrm{End}^0(X)$，从而由 (5) 有 $M = \mathrm{End}_k(X)$。故 $\mathrm{End}_k(X)$ 是秩不大于 $4g^2$ 的自由阿贝尔群。

最后，回到前面的一般情形，即有同源 (2)，注意 (3) 的两边有相同的秩。对任意 $i \leqslant r$, $j \leqslant s$，若 $X_i \sim Y_j$，则由上所述有

$$\mathrm{rank}(\mathrm{Hom}_k(X_i, Y_j)) = \mathrm{rank}(\mathrm{End}_k(X_i)) \leqslant 4\dim(X_i)^2 = 4\dim(X_i)\dim(Y_j) \tag{9}$$

而若 $X_i \not\sim Y_j$ 则 $\mathrm{Hom}_k(X_i, Y_j) = 0$，仍有 $\mathrm{rank}(\mathrm{Hom}_k(X_i, Y_j)) \leqslant 4\dim(X_i)\dim(Y_j)$，故有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\mathrm{Hom}_k(X, Y)) &= \sum_{i,j} \mathrm{rank}(\mathrm{Hom}_k(X_i, Y_j)) \\ &\leqslant \sum_{i,j} 4\dim(X_i)\dim(Y_j) \\ &= 4(\sum_i \dim(X_i))(\sum_j \dim(Y_j)) = 4\dim(X)\dim(Y)\end{aligned} \tag{10}$$

此外由上所述还可见每个典范同态 $\mathrm{End}_k(X_i)\otimes\mathbb{Z}_l\to\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(X_i))$ 是单射，故 (1) 是单射。证毕。

注意在 (10) 中等号成立当且仅当所有 X_i, Y_j 都同源等价且 (9) 中等号成立。这种情况是可能发生的，但在绝大多数情形 (例如 $\mathrm{ch}(k)=0$)，$\mathrm{Hom}_k(X,Y)$ 的秩严格小于 $4\dim(X)\dim(Y)$。

记 $\mathrm{Hom}^0(X,Y)=\mathrm{Hom}_k(X,Y)\otimes\mathbb{Q}$，$\mathrm{End}^0(X)=\mathrm{End}_k(X)\otimes\mathbb{Q}$ (它可以理解为 X 的同源等价类的自同态环)，则可将 $\mathrm{End}_k(X)$ 看作 $\mathrm{End}^0(X)$ 的子环，而将 $\mathrm{Hom}_k(X,Y)$ 看作 $\mathrm{Hom}^0(X,Y)$ 的子模。易见 $\mathrm{End}_k(X)$ 的 l-进表示诱导 $\mathrm{End}^0(X)$ 在 $\mathbb{Q}_l$-线性空间 $T_l(X)\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}_l^{2g}$ 上的线性表示。若 X 是单的，则任意非零同态 $f:X\to X$ 是同源，故 f 在 $\mathrm{End}^0(X)$ 中的像是同构，这说明 $\mathrm{End}^0(X)$ 是体 (即任意非零元是可逆元)。

任意 $f\in\mathrm{End}^0(X)$ 在有限维 $\mathbb{Q}$-线性空间 $V=\mathrm{End}^0(X)$ 上的左乘作用为 $\mathbb{Q}$-线性映射，其特征多项式 $\chi_f\in\mathbb{Q}[x]$，且易见若 $f\in\mathrm{End}_k(X)$ 则 $\chi_f\in\mathbb{Z}[x]$。由哈密顿-凯莱定理有 $\chi_f(f)=0$，从而 f 的最小多项式 (即次数最低的首一多项式使得 $\mu_f(f)=0$) $\mu_f\in\mathbb{Q}[x]$ (习题 1)，且若 $f\in\mathrm{End}_k(X)$ 则 $\mu_f\in\mathbb{Z}[x]$。若 X 是单的，则 μ_f 是不可约的，因为 $\mathrm{End}^0(X)$ 没有零因子。总之有

推论 1. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇，则任意 $f\in\mathrm{End}^0(X)$ 的最小多项式 $\mu_f\in\mathbb{Q}[x]$，且当 $f\in\mathrm{End}_k(X)$ 时 $\mu_f\in\mathbb{Z}[x]$。此外，当 X 是单的而 $f\neq 0$ 时 μ_f 不可约。

当 X 是单的而 $\mathrm{End}_k(X)$ 是交换环时，由命题 1 可见 $\mathrm{End}^0(X)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的有限域扩张，而由推论 1 可见 $\mathrm{End}_k(X)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是整的。

3. Rosati 对合与极化的表示

设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇，$\mathcal{L}$ 为 X 上的可逆层。命题 2.6 说明若将 X 与 $\hat{\hat{X}}$ 通过 μ_X 等同起来，则有 $\hat{\phi}_L=\phi_L$。记 $I_x=T_x-\mathrm{id}_X$ (即 $y\mapsto x$)。用第 1 节的记号，由推论 1.2.iii) 用归纳法不难推出，对任意

$\phi_1, ..., \phi_r \in \mathrm{Mor}_k(X, X)$ $(r > 2)$ 有

$$(\phi_1 + \cdots + \phi_r)^* L = \sum_{i<j} (\phi_i + \phi_j)^* L - (r-2) \sum_i \phi_i^* L \tag{1}$$

由此可得对任意 $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_k(X)$ 有

$$\begin{aligned} T_x^*(\alpha+\beta)^* L =& ((\alpha+\beta) \circ T_x)^* L = (\alpha + \beta + I_{\alpha(x)} + I_{\beta(x)})^* L \\ =& (\alpha+\beta)^* L + (\alpha + I_{\alpha(x)})^* L + (\beta + I_{\beta(x)})^* L \\ & + (\alpha + I_{\beta(x)})^* L + (\beta + I_{\alpha(x)})^* L - 2\alpha^* L - 2\beta^* L \end{aligned} \tag{2}$$

仍如第 1 节那样记 $L_{\alpha,\beta} = (\alpha+\beta)^* L - \alpha^* L - \beta^* L$, 注意 $\alpha + I_{\alpha(x)} = \alpha \circ T_x$, $\beta + I_{\beta(x)} = \beta \circ T_x$, $\alpha + I_{\beta(x)} = T_{\beta(x)} \circ \alpha$, $\beta + I_{\alpha(x)} = T_{\alpha(x)} \circ \beta$, 我们有

$$\begin{aligned} & \phi_{L_{\alpha,\beta}}(x) = T_x^*((\alpha+\beta)^* L - \alpha^* L - \beta^* L) - ((\alpha+\beta)^* L - \alpha^* L - \beta^* L) \\ =& \alpha^* T_{\beta(x)}^* L + \beta^* T_{\alpha(x)}^* L - \alpha^* L - \beta^* L \\ =& \alpha^* (T_{\beta(x)}^* L - L) + \beta^* (T_{\alpha(x)}^* L - L) \end{aligned} \tag{3}$$

由此得

$$\phi_{L_{\alpha,\beta}} = \hat{\alpha} \circ \phi_L \circ \beta + \hat{\beta} \circ \phi_L \circ \alpha \tag{4}$$

若 $\mathcal{L}$ 是丰富的, 则 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为同源, 故可定义 $\phi_{\mathcal{L}}^{-1} \in \mathrm{Hom}^0(\hat{X}, X)$。对任意可逆层 $\mathcal{L}'$, 记 $\sigma_{L'} = \phi_L^{-1} \circ \phi_{L'} \in \mathrm{End}^0(X)$。在 $\mathrm{End}^0(X)$ 中用 $\phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta$ 和 id_X 分别代替 (4) 中的 α 和 β, 得

$$\phi_{L_{\phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta, \mathrm{id}_X}} = \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta + \hat{\beta} \circ \phi_{L'} \circ \alpha \tag{5}$$

再和 (4) 比较得

$$\phi_{L_{\phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta, \mathrm{id}_X}} = \phi_{L'_{\alpha,\beta}} \tag{6}$$

简记 L_{ϕ,id_X} 为 L_ϕ, 由 (6), 命题 2.4.iv) 和推论 2.2.iv) 有

命题 2. 设 X 为阿贝尔簇, $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_k(X)$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ 为 X 上的可逆层, 其中 $\mathcal{L}$ 为丰富的, 则 $L_{\phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta}$ 和 $L'_{\alpha,\beta}$ 数值等价, 即 $L_{\phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_{L'} \circ \beta} - L_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Pic}^0(X)$。

固定一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 在 $\mathrm{End}^0(X)$ 中令

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_L := \phi_L^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_L \tag{7}$$

则有

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\circ\beta}=\bar{\beta}\circ\bar{\alpha},\quad \bar{\bar{\alpha}}=\alpha,\quad \bar{1}_X=1_X \tag{8}$$

即 $\alpha\mapsto\bar{\alpha}$ 为反自同构 (且其平方为单位自同构), 称为 ($\mathcal{L}$ 所给出的) *Rosati 对合*。

仍令 $g=\dim(X)$。对任意 $\alpha\in\mathrm{End}_k(X)$, 由命题 1.1.iv) 可知 $\deg(\alpha+n_X)$ 为 n 的 $2g$ 次多项式, 定义 α 的 *迹*为 n 的多项式 $\deg(\alpha+n_X)$ 中 n^{2g-1} 的系数, 记为 $\mathrm{tr}(\alpha)$。若取丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $\iota^*\mathcal{L}\cong\mathcal{L}$, 则由 (1) 有

$$(\alpha+n_X)^*L=n^2L+nL_\alpha+\alpha^*L \tag{9}$$

从而由命题 I.4.7 有

$$\deg(\alpha+n_X)[L\overset{g}{\cdots}L]=\sum_{i=0}^{2g}c_in^i \tag{10}$$

其中

$$c_0=\deg(\alpha)[L\overset{g}{\cdots}L],\quad c_{2g-1}=g[L\overset{g-1}{\cdots}L\cdot L_\alpha],\quad c_{2g}=[L\overset{g}{\cdots}L] \tag{11}$$

由此得

$$\mathrm{tr}(\alpha)=\frac{c_{2g-1}}{c_{2g}}=\frac{g[L\overset{g-1}{\cdots}L\cdot L_\alpha]}{[L\overset{g}{\cdots}L]} \tag{12}$$

取定 $\mathcal{L}$, 对任意 $\alpha,\beta\in\mathrm{End}_k(X)$ 定义

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\mathrm{tr}(\bar{\alpha}\circ\beta) \tag{13}$$

则显然 $\langle,\rangle$ 是一个 $\mathbb{Z}$-双线性型, 可将其扩张为 $\mathrm{End}^0(X)$ 上的 $\mathbb{Q}$-双线性型 (仍记为 $\langle,\rangle$)。由 (12) 和命题 2 可见对任意 $\alpha,\beta\in\mathrm{End}_k(X)$ 有

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{g[L\overset{g-1}{\cdots}L\cdot L_{\alpha,\beta}]}{[L\overset{g}{\cdots}L]} \tag{14}$$

故 $\langle,\rangle$ 是对称的。此外由命题 1.1.ii) 有 $L_{\alpha,\alpha}=2\alpha^*L$, 若 $\alpha\neq0$ 则 α^*L 为非零有效除子的可逆层 (命题 2.7), 故 $\langle\alpha,\alpha\rangle>0$, 换言之 $\langle,\rangle$ 是正定的。由 (14) 还可见 $\langle,\rangle$ 由 $\mathcal{L}$ 的数值类决定, 故由推论 2.2.ii) 可见即使 $\mathcal{L}$ 不满足 $\iota^*\mathcal{L}\cong\mathcal{L}$, $\langle,\rangle$ 仍是正定对称的。

对 X 上的任一可逆层 $\mathcal{L}'$ 定义

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{L'}=\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathcal{L}'}:=\langle\sigma_{L'}\circ\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\sigma_{L'}\circ\beta\rangle=\mathrm{tr}(\bar{\alpha}\circ\sigma_{L'}\circ\beta) \tag{15}$$

为 $\mathrm{End}^0(X)$ 上的对称二次型。注意 $\langle,\rangle_L=\langle,\rangle$。由命题 2, 命题 1.1.ii), 推论 2.2.ii) 和 (14) 可见 $\langle,\rangle_{L'}$ 当 $\mathcal{L}'$ 是有效除子的可逆层时为半正定的, 且当 $\mathcal{L}'$ 丰富时为正定的。总之有

定理 1. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, 取定 X 上的一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 则 (7) 给出有限秩 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathrm{End}^0(X)=\mathrm{End}_k(X)\otimes\mathbb{Q}$ 的一个 Rosati 对合, 即满足 (8) 的反自同构 $\alpha\mapsto\bar{\alpha}$ (其平方为单位自同构), 而 (13) 定义 $\mathrm{End}^0(X)$ 上的一个正定对称二次型。对任意可逆层 $\mathcal{L}'$, (15) 定义 $\mathrm{End}^0(X)$ 上的一个对称二次型 $\langle,\rangle_{L'}$, 它唯一决定 $\mathcal{L}'$ 的数值类, 且当 $\mathcal{L}'$ 是有效除子的可逆层时为半正定的, 当 $\mathcal{L}'$ 丰富时为正定的。

定理 1 将 $\mathrm{End}^0(X)$ 的环结构的研究转化为具有对合与正定二次型的 $\mathbb{Q}$-代数的研究。由命题 1 中的讨论还可将此进一步约化为 X 是单阿贝尔簇的情形。

若 X 是单的, 则 $\mathrm{End}^0(X)$ 为可除代数, 此时对 $\mathrm{End}^0(X)$ 的分类归结为对下述可除 $\mathbb{Q}$-代数 D 的分类: D 有一个对合 $\alpha\mapsto\bar{\alpha}$ 使得 $\langle\alpha,\beta\rangle=\mathrm{tr}_{D/\mathbb{Q}}(\bar{\alpha}\circ\beta)$ 为正定对称二次型。分类的结果为 (见 [M3, p.201]): 令 K 为 D 的中心, $K_0\subset K$ 为在对合下不变的元组成的子域, 则 D 有四种类型:

(Ⅰ) $D=K=K_0$ 为全实域而对合平凡;

(Ⅱ) $K=K_0$ 为全实域, D 为 K 上的四元数代数, 在每个阿基米德位均不分歧;

(Ⅲ) $K=K_0$ 为全实域, D 为 K 上的四元数代数, 在每个阿基米德位均分歧;

(Ⅳ) K_0 为全实域, $K\supset K_0$ 为全虚二次扩张, 此时 D 还满足其他若干条件 (此处从略), 在每个阿基米德位均不分歧。

上列每个代数均同构于某个 $\mathrm{End}^0(X)$ (参看 [O2])。

注 1. 在一般情形, $\mathrm{End}(X)$ 的分类要复杂得多, 为此须注意以下几点:

i) 由推论 2.1 可知一个域 k 上的阿贝尔簇 X 同源于若干单 k-阿贝尔簇的直积, 换言之形如 $(X_1 \times_k \cdots \times_k X_r)/H$, 其中 $X_1, ..., X_r$ 为 k 上的单阿贝尔簇, $H \subset X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ 为有限子群概形。例如设 $X = Y^r$, 其中 Y 是单阿贝尔簇, 则显然 $\mathrm{End}(X) \cong M_r(\mathrm{End}(Y))$; 对一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 记 $a \mapsto \bar{a}$ 为 ϕ_L 给出的 $\mathrm{End}(Y)$ 的 Rosati 对合, 则 $\phi_L \times_k \cdots \times_k \phi_L$ 给出 $\mathrm{End}(X)$ 中的一个 Rosati 对合 $A \mapsto {}^t\bar{A}$。

ii) 一般地有 $X = (X_1^{n_1} \times_k \cdots \times_k X_r^{n_r})/H$, 其中 $X_1, ..., X_r$ 为互不同源等价的单阿贝尔簇 (从而对 $i \neq j$ 有 $Hom(X_i, X_j) = 0$) 而 $H \subset X_1^{n_1} \times_k \cdots \times_k X_r^{n_r}$ 为有限子群概形。我们有 $\mathrm{End}^0(X) \cong M_{n_1}(\mathrm{End}^0(X_1)) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathrm{End}^0(X_r))$, 仿照 i) 的方法可给出它的一个 Rosati 对合。而 $\mathrm{End}(X)$ 是 $\mathrm{End}^0(X)$ 中的一个 order 。

iii) 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则 $\mathrm{End}^0(X)$ 可以看作 $\mathrm{End}^0(X \otimes_k \bar{k})$ 的子代数, 可能是真子代数 (对 CM 情形可参看 [LO, A.3])。

设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇。由命题 2.4.iv) 和推论 2.2.iv) 可见 $\mathcal{L}' \mapsto \phi_{\mathcal{L}'}$ 给出一个典范的加法群单同态

$$\mathrm{NS}(X) \hookrightarrow Hom_k(X, \hat{X}) \tag{16}$$

取定一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 将 $\phi_{\mathcal{L}}^{-1}$ 与 (16) 合成就得到一个单同态

$$\mathrm{NS}(X) \hookrightarrow \mathrm{End}^0(X) \tag{17}$$

记 Σ 为 (17) 的像, B 为 $\mathrm{End}^0(X)$ 上的对称二次型组成的 $\mathbb{Q}$-线性空间, 则 $\mathcal{L}' \to \langle , \rangle_{L'}$ 给出一个加法群单同态 $\mathrm{NS}(X) \to B$, 从而给出加法群单同态

$$\Phi : \Sigma \cong \mathrm{NS}(X) \to B \tag{18}$$

由定理 1 可见 (18) 将 $\mathrm{NS}(X)$ 中的丰富层的数值类映到正定二次型。注意 $\sigma_{L'} = \phi_L^{-1} \circ \phi_{L'}$ 与 $\phi_{L'}$ (作为 $\mathrm{End}^0(X)$ 中的元) 一一对应, 而由命题 2.4.iv) 可见 $\phi_{L'}$ 由 $\mathcal{L}'$ 在 $\mathrm{NS}(X)$ 中的像决定, 故由其在 B 中的像决定。总之有

推论 2. 设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇。

i) 存在典范的加法群单同态 (16), 故 $\mathrm{NS}(X)$ 是有限生成的自由阿贝尔群, 其秩不超过 $\mathrm{End}_k(X)$ 的秩 (故 $\leqslant 4\dim(X)^2$)。

ii) 固定 X 上的一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 则 (16) 与 $\phi_{\mathcal{L}}^{-1}$ 的合成给出一个单同态 (17)。令 Σ 为 (17) 的像, B 为 $\mathrm{End}^0(X)$ 的所有对称 $\mathbb{Q}$-二次型组成的 $\mathbb{Q}$-线性空间。则 $\mathcal{L}' \to \langle,\rangle_{L'}$ 给出一个加法群单同态 $\mathrm{NS}(X) \to B$, 从而给出一个单同态 (18)。

iii) 令 Π 为 X 的所有极化组成的加法半群, 看作 $Hom_k(X,\hat{X})$ 的子半群。则 (16) 和 (18) 给出半群单同态 $\Pi \to B$, 其像由正定二次型组成。

例 1. 设 E 为代数闭域 k 上的椭圆曲线, 则由上面的分类可见 $\mathrm{End}_k(E)$ 的秩只能是 1, 2 或 4。在第 1 种情形 $\mathrm{End}_k(E) \cong \mathbb{Z}$; 在第 2 种情形 $\mathrm{End}^0(E)$ 是虚二次域; 在第 3 种情形 $\mathrm{End}^0(E)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个四元数代数。在后两种情形称 E 是"有复乘的"或"CM 型的"。第 3 种情形当 $\mathrm{ch}(k)=0$ 时不存在, 而当 $\mathrm{ch}(k)>0$ 时第 3 种情形等价于 E 是超奇的。

习题

1. 设 f 是有限维 $\mathbb{Q}$-线性空间 V 的 $\mathbb{Q}$-线性自同态, 证明 f 的最小多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 中, 详言之存在首一多项式 $\phi \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $\phi(f)=0$, 且对任意域扩张 $K \supset \mathbb{Q}$ 及任意 $\psi \in K[x]$, 若 $\psi(f)=0$ 则 $\phi|\psi$。

2. 设 X 为代数闭域 k 上的单阿贝尔簇, 其 Rosati 对合由丰富层 $\mathcal{L}$ 给出, $Y = X^r$, 其 Rosati 对合由 $\mathcal{F} = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \overset{r}{\cdots} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_r^*\mathcal{L}$ 给出。令 $R = \mathrm{End}^0(X)$, 看作有对合的体。证明对 R 上的任意 r 阶可逆方阵 T, ${}^t\bar{T}T$ 给出的二次型对应于 Y 的极化。

第 4 节　阿尔巴内塞簇与曲线的雅可比簇

1. 阿尔巴内塞簇

对于一个代数闭域 k 上的代数簇 X, $\mathrm{Pic}(X/k)$ 可以看作 X 中余维

数为 1 的闭链 (cycle) 类群, 在 X 为曲线的情形, 它也是 0 维闭链类群。对任意非负整数 $n < \dim(X)$, 我们可以定义 X 的 n 维闭链类群: 令 G 为由所有 n 维闭子簇生成的自由阿贝尔群, 其元素称为 n 维闭链, 而任一 $n+1$ 维闭子簇 $V \subset X$ 的任意有理函数 $f \in K(V)^*$ 给出 G 的一个闭链, 称为一个主闭链, 令 $H \subset G$ 为所有主闭链生成的子群, 定义 n 维闭链类群为 G/H。我们知道 $\mathrm{Pic}(X/k)$ 具有典范的几何结构, 自然会问其他维闭链的类群是否也有典范的几何结构呢? 遗憾的是对一般的 X, 除 0 维闭链类群外答案都是否定的, 而对 0 维闭链类群也只有较弱结果。

定义 1. 设 X 为域 k 上的代数簇 (不必是拟射影的), 若存在 k 上的阿贝尔簇 A 及有理映射 $\mu_X : X \dashrightarrow A$, 具有如下泛性: 对任意 k-阿贝尔簇 A' 及任意有理映射 $\mu' : X \dashrightarrow A'$, 存在唯一 k-态射 $\phi : A \to A'$ 使得 $\mu' = \phi \circ \mu_X$, 则称 A (或 (A, μ_X)) 为 X 的**阿尔巴内塞簇** (*Albanese*), 记为 $Alb(X)$。

注意任意 k-态射 $\phi : A \to A'$ 为同态和平移的合成 (见推论 1.2)。

注 1. 在有些文献中阿尔巴内塞簇的定义有所不同, 例如可以将阿贝尔簇换为交换群簇, 不过对于常见的情形与上述定义是一致的。这里不拟涉及这个较复杂且有较强技术性的问题。

引理 1 (阿贝尔簇的极小性, Weil). 设 X 为域 k 上的紧致群簇, Y 为 k 上的光滑代数簇, 则从 Y 到 X 的任意 k-有理映射是 k-态射。

证. 情形 1: k 为代数闭域。不妨设 $Y = \mathrm{Spec} R$, 其中 R 为有限生成的 k-代数。令 $A = R \otimes_k R$。设 $\phi : Y \dashrightarrow X$ 为 k-有理映射, 将 ϕ 理解为从一个非空开子簇 $U \subset Y$ 到 X 的 k-态射。令 $\Phi : U \times_k U \to X$ 为态射 $(x, y) \mapsto \phi(y) - \phi(x)$, 看作从 $Y \times_k Y = \mathrm{Spec}(A)$ 到 X 的有理映射。我们先来证明, 对任意 $y \in Y$, ϕ 可以扩张到 y 当且仅当 Φ 可以扩张到 $\Delta(y)$ ($\Delta : Y \to Y \times_k Y$ 为对角态射)。必要性是显然的。反之若 Φ 在 (y, y) 的开邻域 $U' \subset Y \times_k Y$ 上有定义, 取闭点 $y' \in U$ 使得 $(y, y') \in U'$, 令 $\phi(y) = \phi(y') + \Phi(y, y')$ 即可将 ϕ 扩张到 y。

由于 X 是紧致的而 $Y \times_k Y$ 是正规的, Φ 在 A 的所有高度为 1 的素理

想上有 (唯一) 定义 (参看 [H, Theorem Ⅱ.4.7]), 同理 ϕ 在 R 的所有高度为 1 的素理想上有定义。任取 $0 \in X$ 的一个仿射开邻域 $U_0 = \mathrm{Spec}B \subset X$。设 $p \in \mathrm{Spec}R$, $P = \Delta(p) \in \mathrm{Spec}A$, 则 A_P 为 UFD, 故任意高度为 1 的素理想 $Q \subset A_P$ 为主理想 (参看 [M, Theorems 47, 48] 或 [L1, 习题 X.10])。设 $Q = (a)$, 任取 R_p 中包含 $\Delta^*(a)$ 的极小素理想 q, 则 $\mathrm{ht}(q) = 1$。令 $Q' = \Delta(q)$, 则 $Q' \supset Q$ 而 $\Phi(Q') = \phi(q) - \phi(q) = 0$, 故 $\Phi(Q) \in U_0$。由此得 $\Phi^*(B) \subset \bigcap_{\substack{Q \in \mathrm{Spec}(A_P) \\ \mathrm{ht}(Q)=1}} A_Q = A_P$ (参看 [M, Theorem 38] 或 [L1, 命题 14.2]), 即 Φ 可以扩张到 P。

情形 2: 一般情形。令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包,

$$\bar{\phi} = \phi \otimes_k \mathrm{id}_{\bar{k}} : \bar{Y} = Y \otimes_k \bar{k} \dashrightarrow \bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$$

则由情形 1 可知 $\bar{\phi}$ 定义在 $\bar{Y}$ 上。由于 Y 和 X 是有限型的, 可取 k 的有限正规扩张 $k' \subset \bar{k}$ 使得 $\phi' = \phi \otimes_k \mathrm{id}_{k'}$ 可定义为 k'-态射 $Y' = Y \otimes_k k' \to X' = X \otimes_k k'$。由引理 V.4.3, 不妨设存在有限 k-群概形 $G = \mathrm{Spec}L$ 使得 $\mathrm{Spec}(k')$ 为 G-挠子。记 $\rho_{X'}, \rho_{Y'}$ 分别为 G 在 X', Y' 上的诱导作用, 则它们与 ϕ' 在 $U' = U \otimes_k k'$ 上的限制相容。特别地, 令 $\xi \in X'$ 为 Y' 的一般点在 ϕ' 下的像, 则 $(\phi' \circ \rho_{Y'})^*$ 和 $(\rho_{X'} \circ (\mathrm{id}_G \times_k \phi'))^* : O_{X'} \to \phi'_* O_{Y'} \otimes_k L$ 在 ξ 上的纤维相等。由于 Y' 是整的, 可见 $(\phi' \circ \rho_{Y'})^* = (\rho_{X'} \circ (\mathrm{id}_G \times_k \phi'))^*$。故 $\phi' \circ \rho_{Y'} = \rho_{X'} \circ (\mathrm{id}_G \times_k \phi')$, 换言之 ϕ' 与 G 的作用相容。这样就有诱导态射 $X \cong X'/G \to Y'/G \cong Y$, 它是 ϕ 的扩张。证毕。

因此在定义 1 中, 若 X 是 k-光滑的, 则"有理映射"可以改为"态射"。

2. 曲线的雅可比簇

我们先来考虑 $\dim(X) = 1$ 的情形。设 C 为代数闭域 k 上亏格 g 的非奇异完备代数曲线, 则由黎曼-罗赫定理, 对 C 上的任意可逆层 $\mathcal{L}$ 有 $h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) - g + 1$, 特别地若 $\deg(\mathcal{L}) = 0$ 则 $\chi_{\mathcal{L}} = \chi_{O_C}$, 故 $\deg : \mathcal{P}ic(C/k) \to \mathbb{Z}$ 的核是射影的, 从而 $\mathrm{NS}(C) \cong \mathbb{Z}$。令 $\mathcal{D}iv^d(C/k) \subset \mathcal{D}iv(C/k)$ 代表次数为 d 的有效除子而 $\mathcal{P}ic(C/k)^d \subset \mathcal{P}ic(C/k)$ 代表次数

为 d 的可逆层, 则 $\mathcal{P}ic(C/k)=\coprod_{d}\mathcal{P}ic(C/k)^d$ 而 $\mathcal{D}iv(C/k)=\coprod_{d\geqslant 0}\mathcal{D}iv^d(C/k)$。

令 $D_d\subset C\times_k\mathcal{D}iv^d(C/k)$ 为 $\mathcal{D}iv^d(C/k)$ 上的泛除子。若 $d=\deg(\mathcal{L})\geqslant g$, 则 C 中存在次数为 d 的有效除子 $D=P_1+...+P_d$ 使得 $O_C(D)\cong\mathcal{L}$, 其中 $P_1,...,P_d\in C_{\rm cl}$ 为互不相同的点 (参看 [H, Proposition Ⅳ.4.1]), 故存在稠密开子概形 $U\subset D_d$ 使得 $U\to\mathcal{D}iv^d(C/k)=Y$ 为平展覆盖, 且存在稠密开子概形 $U'\subset Y$ 使得 $D_d\times_Y U'$ 在 U' 上是有限平展的。由引理 I.1.6 及其证明可见可取有限覆盖 $V\to Y$ 使得 $D_d\times_Y V\times_Y U'$ 为 d 个 $V\times_Y U'$ 的拷贝的无交并, 且 V 是正规射影簇。这样 $D_d\times_Y V$ 的每个不可约分支的约化概形结构在 V 上是有限的且与 V 双有理等价, 从而同构于 V (因为 V 是正规的)。此外开子概形 $U\times_Y V\subset D_d\times_Y V$ 是 V 的平展覆盖。这样闭嵌入 $D_d\times_Y V\subset C\times_k V$ 给出 ${\rm pr}_2: C\times_k V\to V$ 的 d 个截口 $V\to C\times_k V$, 从而给出 d 个态射 $f_i:V\to C$ $(1\leqslant i\leqslant d)$。令 C^d 为 C 的 d 个拷贝在 k 上的积, $\Delta_i: C^d\to C\times_k C^d$ 为 $\Delta_i(P_1,...,P_d)=(P_i,P_1,...,P_d)$ $(1\leqslant i\leqslant d)$, 则 $D'=\Delta_1(C^d)+\cdots+\Delta_d(C^d)$ 为 $C\times_k C^d$ 中的 d 次 C^d-有效除子, 且 $D_d\times_Y V=({\rm id}_C\times_k(f_1,...,f_d))^{-1}(D')\subset C\times_k V$。由此可见 $V\to Y$ 经过 C^d, 故 Y 为整的且 $C^d\to Y$ 为满的, 从而 $\mathcal{P}ic(C/k)^d$ 也是整的, 故 $\mathcal{P}ic(C/k)^d\cong\mathcal{P}ic^0(C/k)$, 为阿贝尔簇。令 $C^{(d)}=C^d/\mathfrak{S}_d$, 其中 $\mathfrak{S}_d$ 的作用是置换 C^d 的因子, 注意 $\mathfrak{S}_d$ 的作用不改变除子 D', 故有诱导一个态射 $q: C^{(d)}\to Y$, 且易见 q 在一个非空开集上是一对一的, 从而是双有理的。由此可见 $\dim(Y)=d$。另一方面, 由黎曼-罗赫定理有 $h^0(D_d)=d-g+1$, 由定理 I.4.1 $Y\to\mathcal{P}ic(C/k)^d$ 为 $\mathbb{P}^{g-d}$-从, 故 $\dim(\mathcal{P}ic^0(C/k))=d-(d-g)=g$。此外, 我们有双有理满态射 $C^g/\mathfrak{S}_g\to\mathcal{D}iv^g(C/k)\to\mathcal{P}ic^0(C/k)$。此外还可见对 C 上足够一般的 g 次可逆层 $\mathcal{L}$ 恰存在一个有效除子 $D\subset C$ 使得 $O_C(D)\cong\mathcal{L}$, 从而由黎曼-罗赫定理有 $h^1(\mathcal{L})=0$。

记 $\nu: C^g/\mathfrak{S}_g\to\mathcal{D}iv^g(C/k)$ 为投射。取定一个闭点 $P\in C$, 令 $\eta:\mathcal{D}iv^g(C/k)\to\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 为态射 $\eta(P_1+\cdots+P_g)=O_C(P_1+\cdots+P_g-gP)$, 由上所述它是双有理的。若 $g>0$, 对任意闭点 $P_2,...,P_g$, 令 $\zeta_{P_2,...,P_g}: C\to C^g/\mathfrak{S}_g$ 为将 $P_1\in C_{\rm cl}$ 映到 $(P_1,P_2,...,P_g)$ 的等价类的态射。我们来证明 $\mu=\eta\circ\nu\circ\zeta_{P,...,P}$ 为闭嵌入。对任意闭点 $P_1\in C$, 由上所述不难证明可取互不相同的闭点 $P_2,...,P_g\neq P_1$, 使得 $\eta\circ\nu$ 在 $\eta(P_1+\cdots+P_g)$ 的

一个开邻域上是同构。而 $\zeta_{P_2,\dots,P_g}$ 在 P_1 附近为闭嵌入。令 τ 为 $\eta(P+P_2+\cdots+P_g)$ 给出的 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 的平移，则有 $\tau\circ\mu=\eta\circ\nu\circ\zeta_{P_2,\dots,P_g}$，由此可见 μ 在 P_1 附近为闭嵌入。这样我们可以将 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 看作"由 C 生成的阿贝尔簇"。

由上所述还可见对任意正整数 d, $\mathcal{P}ic^1(C/k)\xrightarrow{d\cdot}\mathcal{P}ic^d(C/k)$ 是满射，特别地对任一 g 次有效除子 D 存在闭点 $P\in C$ 使得 $gP\sim D$。由黎曼-罗赫定理可知对于足够一般的 g 次有效除子 D 有 $h^0(D)=1$，故对足够一般的 $P\in C_{\mathrm{cl}}$ 有 $h^0(gP)=1$。从而对于任意 $P_2,\dots,P_g\in C_{\mathrm{cl}}$ 存在唯一 $P_1\in C_{\mathrm{cl}}$ 使得 $P_1+P_2+\cdots P_g\sim gP$。令 $Z\subset\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 为 $\{P\}\times_k C^{g-1}$ 在投射 $C^g\to\mathcal{D}iv^g(C/k)\xrightarrow{\eta}\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 下的像，则 Z 是 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 的余维数 1 的闭子簇，故为有效除子。由上所述当 P 足够一般时 $Z\cap\mu(C)=\{P\}$，作为除子为 gP，从而 $\mu^*O_{\mathcal{P}ic^0(C/k)}(Z)\cong O_C(gP)$。

我们来证明对于上述代数闭域 k 上的非奇异完备曲线 C，$A=\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 连同 $\mu: C\to A$ 为 C 的阿尔巴内塞簇。设 A'为阿贝尔簇而 $\mu': C\dashrightarrow A'$ 为有理映射，令 $\psi: C^d\to A'$ 为 $\psi(P_1,\dots,P_g)=\mu'(P_1)+\dots+\mu'(P_g)$，则因 A' 是交换代数群，ψ 诱导 $C^d/\mathfrak{S}_g\to A'$，但 $C^d/\mathfrak{S}_g$ 与 A 双有理等价，而由引理 1 可知从 A 到 A' 的任意有理映射为态射，故存在态射 $\phi: A\to A'$ 使得 $\mu'=\phi\circ\mu$（作为有理映射）；ϕ 的唯一性是显然的，因为 A 由 C 生成。

特别地，若 $g=1$，则 μ 为同构。

若 $g=0$，即 $C\cong\mathbb{P}^1_k$，则也可以证明 $Alb(C)\cong\mathcal{P}ic^0(C/k)\cong\mathrm{Spec}k$：设 A' 为阿贝尔簇而 $\mu': C\dashrightarrow A'$ 为有理映射，则由引理 1 可知 μ' 为态射。对任意 $n\geqslant 0$, μ' 诱导典范 O_C-模层同态 $\mu'^*P^n_{A'/k}\to P^n_{C/k}$（见 I.2.1），由命题 Ⅲ.1.2 可知 $\mu'^*P^n_{A'/k}$ 同构于一些 O_C 的拷贝的直和，而另一方面易见所有投射 $P^n_{C/k}\to P^m_{C/k}$ 的核 $(0\leqslant m\leqslant n)$ 给出 $P^n_{C/k}$ 的一个过滤，其因子为 $(\Omega^1_{C/k})^{\otimes_{O_C} m}\cong O_C(-2m)$ $(0\leqslant m\leqslant n)$，由此可知 $H^0(C,P^n_{C/k})\cong k$，从而 μ'^* 将 $\ker(P^n_{A'/k}\to P^0_{A'/k})$ 映到 0，换言之 μ'^* 经过 k，故 $\mu'(C)$ 为一个 k-点。

上面各结论对任意域 k 上的光滑完备曲线 C 也成立，只是需要 C 上有一个 k-点 P 以保证 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 为精细模空间及建立 μ。总之有

命题 1. 设 C 为域 k 上亏格为 g 的光滑完备曲线且有一个 k-点。

i) C 中任一有效除子的希尔伯特多项式由其次数决定。对任意整数 d, 所有 d 次有效除子的模空间 $\mathcal{D}iv^d(C/k)$ 和 d 次可逆层的模空间 $\mathcal{P}ic(C/k)^d$ 都是射影簇, 而 $\mathcal{D}iv(C/k) = \coprod_{d\geqslant 0} \mathcal{D}iv^d(C/k)$, $\mathcal{P}ic(C/k) = \coprod_{d} \mathcal{P}ic(C/k)^d$。此外每个 $\mathcal{P}ic(C/k)^d \cong \mathcal{P}ic(C/k)^0$, 而 $\mathcal{P}ic(C/k)^0$ 为 k 上的 g 维阿贝尔簇。

ii) 从 C^g 到 $\mathcal{D}iv^g(C/k)$ 的态射 $(P_1,...,P_g) \mapsto P_1 + \cdots + p_g$ 所诱导的态射 $\nu : C^g/\mathfrak{S}_g \to \mathcal{D}iv^g(C/k)$ 为双有理满态射, 而典范态射 $\eta : \mathcal{D}iv^g(C/k) \to \mathcal{P}ic^g(C/k) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}ic^0(C/k)$ 也是双有理满态射。

iii) 存在群概形的正合列

$$0 \to \mathcal{P}ic^0(C/k) \to \mathcal{P}ic(C/k) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

其中 $\mathbb{Z}$ 视作 k 上的离散群概形。

iv) 若 $g > 0$, 对任意 k-点 $P_2,...,P_g$, 令 $\zeta_{P_2,...,P_g} : C \to C^g/\mathfrak{S}_g$ 为将 $P_1 \in C$ 映到 $(P_1, P_2, ..., P_g)$ 的等价类的态射。则 $\mu = \eta \circ \nu \circ \zeta_{P_2,...,P_g}$ 为闭嵌入, 而 $(\mathcal{P}ic^0(C/k), \mu)$ 为 C 的阿尔巴内塞簇。特别地当 $g = 1$ 时 μ 为同构; 而当 $g = 0$ 时 $Alb(C) = 0$。

v) 对足够一般的 k-点 $P \in C$, 令 $Z \subset \mathcal{P}ic^0(C/k)$ 为 $\{P\} \times_k C^{g-1}$ 在投射 $C^g \to \mathcal{D}iv^g(C/k) \xrightarrow{\eta} \mathcal{P}ic^g(C/k)$ 下的像, 则 Z 是 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 中的有效除子且 $Z \cap \mu(C) = \{P\}$, 作为除子为 gP。令 $\mathcal{L} = O_{\mathcal{P}ic^0(C/k)}(Z)$, 则有 $\mu^*\mathcal{L}(-(g-1)P) \cong O_C(P)$。

我们将 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 称作 C 的**雅可比簇** (Jacobian), 记为 $Jac(C)$。注意 $\mathcal{P}ic(C/k)$ 的每个连通分支作为代数簇都同构于 $Jac(C)$。

注 2. 设 C 为代数闭域 k 上的完备光滑曲线, 记 $\mathrm{Div}(C) = \mathcal{D}iv(C/k)(k)$, $\mathrm{Pic}(C) = \mathcal{P}ic(C/k)(k)$, 即有效除子半群与除子类群 (皮卡群)。对任意闭点 $P \in C$, $C - \{P\}$ 是仿射的, 故可令 $C - \{P\} = \mathrm{Spec}R$。定义 $\phi : \mathrm{Div}(C - \{P\}) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ 为 $\phi(D) = O_C(D - \deg(D)P)$, 则易见 ϕ 诱导同构 $\mathrm{Pic}(C - \{P\}) \to \mathrm{Pic}^0(C)$。而 $\mathrm{Pic}(C - \{P\})$ 同构于 R 上的秩 1 局部自由模的同构类群, 或 R 的非零理想类群。对任意 $n > 0$, 有秩 n 局部

自由 R-模同构类与 $\mathrm{Pic}(C-\{P\})$ 的典范一一对应。总之 $Jac(C)$ (或其 k-点的集合) 有下面几个意义:

i) C 上 0 次除子的线性等价类群;

ii) C 上的 0 次可逆层 (或 0 次直线从) 的同构类群;

iii) $Alb(C)$;

iv) $Alb(C')$, 其中 C' 为 k-曲线 (不必是光滑的或完备的) 使得 $k(C')\cong k(C)$;

v) $C-\{P\}$ 的除子类群;

vi) $C-\{P\}$ 的可逆层同构类群;

vii) R 的非零理想类群;

viii) R 上的秩 1 局部自由模的同构类群;

ix) R 上的秩 n 局部自由模的同构类的代表集 $(n>0)$

其中 $P\in C$ 为任意闭点而 $C-\{P\}\cong \mathrm{Spec}R$。

推论 1. 域上的紧致群簇为阿贝尔簇。

证. 设 X 是域 k 上的紧致群簇, 不妨设 k 是代数闭域。由刚性引理 (引理 1.1) 不难得到 X 是交换群簇 (参看推论 1.2.i) 的证明)。

任取 X 中的完备曲线 C' (不必是光滑的), 令 C 为 C' 的正规化。则有双有理满态射 $C^g/\mathfrak{S}_n\to Jac(C)$ (g 为 C 的亏格), 而由 X 的交换性有诱导态射 $C^g/\mathfrak{S}_n\to X$, 从而有诱导有理映射 $\phi: Jac(C)\dashrightarrow X$。由引理 1 可知 ϕ 是态射, 再由推论 1.2.ii) 不妨设 ϕ 是同态。由 C 的任意性, 取 X 中的有限多条曲线就可得到一个阿贝尔簇 A 及一个满同态 $\psi: A\to X$, 从而由命题 VI.1.6 有 $X\cong A/\ker(\psi)$。再由引理 V.2.1 可见 X 是射影的。证毕。

3. 阿尔巴内塞簇的存在性

定理 1. 设 X 为域 k 上的代数簇 (不必是拟射影的), 则 $Alb(X)$ 存在。

证. 我们对 $\dim(X)$ 用归纳法, 不妨设 $\dim(X)>0$。任意取定非空光滑

开子簇 $U \subset X$。对任意阿贝尔簇 A, 由引理 1 可知一个有理映射 $\mu: X \dashrightarrow A$ 等价于一个 U 到 A 的态射 (为简明起见仍记为 μ)。记 A_μ 为 A 中 $\mu(U)$ 生成的阿贝尔子簇。首先我们证明存在 N 使得对任意 A, μ 有 $\dim(A_\mu) < N$。不难取一个局部有限有理映射 $X' \dashrightarrow X$ 使得 X' 可以分解为光滑完备曲线从 $p: X' \to Y$, 其中 Y 为光滑的。由归纳法假设 $Alb(Y)$ 存在。令 g 为 p 的纤维亏格, $d_0 = \dim(Alb(Y))$。给定 A, μ, 任取闭点 $y \in Y$, 令 $k' = \kappa(y)$, $C = p^{-1}(y)$, 则 (由阿贝尔簇的极小性) μ 诱导态射 $C \to A \otimes_k k'$, 从而诱导态射 $Jac(C) \to A \otimes_k k'$。令 $A' = \operatorname{coker}(Jac(C) \to A \otimes_k k')$, 则诱导态射 $q: X' \to A'$ 将 p 的纤维 C 映到一个点, 故由引理 1.1 有态射 $\mu': Y \to A'$ 使得 $q = \mu' \circ p$。注意 μ' 经过 $Alb(Y) \otimes_k k'$, 而由引理 Ⅱ.1.5 可见 $A_0 = \operatorname{im}(Alb(Y) \otimes_k k' \to A')$ 具有 k'-阿贝尔簇结构, 其维数不大于 d_0。令 A_1 为 A_0 在 $A \otimes_k k'$ 中的原象, 则 A_1 具有阿贝尔簇结构且维数 $\leqslant d_0 + g$, 而 $\operatorname{im}(X' \to A) \subset A_1$, 从而 $\dim(A_\mu) \leqslant d_0 + g$。记 d 为 A_μ 的最大可能维数。

对任意阿贝尔簇 A 及任意 $\mu: U \to A$, 定义 $\mu_n: U^n \to A$ 为 $\mu_n(x_1, ..., x_n) = \mu(x_1) + ... + \mu(x_n)$。若 $\dim(\operatorname{im}(\mu_n)) = \dim(\operatorname{im}(\mu_{n+1}))$, 则易见 $\operatorname{im}(\mu_{n+1}) \subset \overline{\operatorname{im}(\mu_n)} =: A'$, 而 A' 为 A 的阿贝尔子簇, 由于 $\mu(U)$ 生成 A_μ 有 $A' = A_\mu$, 故诱导态射 $U^n \to A_\mu$ (滥用记号仍记为 μ_n) 为支配的, 从而 μ_d 为支配的。记 $K = k(X^d)$, 即 X^d 的有理函数域。取 A, μ 使得 $\dim(A_\mu) = d$, 并令 K_μ 为 $\operatorname{im}(\mu_d)$ 的函数域, 则 K_μ 可以看作 K 的子域。若 A' 为另一个阿贝尔簇而 $\mu': U \to A'$ 为态射, 则 $\mu'' = (\mu, \mu'): U \to A'' = A \times_k A'$ 给出一个有限扩张 $K_{\mu''} \supset K_\mu$。令 $K_0 \subset K$ 为 K_μ 在 K 中的代数闭包, 则有 $K_{\mu''} \subset K_0$, 且由引理 I.1.8 可知 K_0 是 K_μ 的有限扩域。取适当的 A'', μ'' 代替 A, μ 可使 K_μ 最大, 且不妨设 $A = A_\mu$, 从而 $K_\mu \cong k(A)$。我们来证明 (A, μ) 为 X 的阿尔巴内塞簇。

对任意阿贝尔簇 A' 及任意 $\mu': U \to A'$, 由上所述有 $K(A'_{\mu'}) \cong K_{\mu'} \subset K_\mu \cong k(A)$, 这诱导有理映射 $\phi: A \dashrightarrow A'_{\mu'} \to A'$, 由引理 1 可见 ϕ 实际上是态射。由定义有 $\phi \circ \mu_d = \mu'_d$, 故 $\phi \circ \mu = \mu'$。注意 ϕ 由 $K_{\mu'} \hookrightarrow K_\mu$ 唯一决定。证毕。

命题 2. 设 X 为域 k 上的射影簇, 使得 $\mathcal{P}ic^\tau(X/k)$ 的约化结构 $A =$

$\mathcal{P}ic^0(X/k)$ 为阿贝尔簇 (例如 k 为完全域而 X 在 k 上光滑), 则有

$$Alb(X) \cong \hat{A} = \widehat{\mathcal{P}ic^0(X/k)} \tag{1}$$

而泛态射 $\mu_X : X \to \hat{A}$ 由 $\mathcal{P}_{X/k}$ 和 $\mathcal{P}_{A/k}$ 诱导。

证. 按命题 2.6 将 $\hat{\hat{A}}$ 与 A 等同起来。记 $\mathcal{P}'_{X/k}$ 为 X 的庞加莱层在 $X \times_k A$ 上的限制, 且记 $\mathcal{P}^0_{\hat{A}/k}$ 为 $\hat{A}$ 的庞加莱层在 $\hat{A} \times_k A$ 上的限制。由庞加莱层的泛性有唯一 k-态射 $\mu_X : X \to \hat{A}$ 使得

$$(\mu_X \times_k \mathrm{id}_A)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \cong \mathcal{P}'_{X/k} \tag{2}$$

设 B 为阿贝尔簇而 $f : X \to B$ 为 k-态射, 则 f 诱导同态 $f^* : \hat{B} = \mathcal{P}ic^0(B/k) \to \mathcal{P}ic^\tau(X/k)$。由于 $\hat{B}$ 是阿贝尔簇且 $\hat{\hat{B}} \cong B$ (命题 2.6), f^* 的像在 A 中, 从而诱导阿贝尔簇的同态 $g : \hat{B} \to A$ 使得

$$(\mathrm{id}_X \times_k g)^* \mathcal{P}'_{X/k} \cong (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* \mathcal{P}^0_{B/k} \tag{3}$$

而 g 诱导阿贝尔簇的同态 $\hat{g} : \hat{A} \to \hat{\hat{B}} \cong B$ 使得

$$(\mathrm{id}_{\hat{A}} \times_k g)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \cong (\hat{g} \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* \mathcal{P}^0_{B/k} \tag{4}$$

由 (2), (3) 和 (4) 得

$$\begin{aligned}
(\hat{g} \circ \mu_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* \mathcal{P}^0_{B/k} &\cong (\mu_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* (\hat{g} \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* \mathcal{P}^0_{B/k} \\
&\cong (\mu_X \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* (\mathrm{id}_{\hat{A}} \times_k g)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \\
&\cong (\mu_X \times_k \mathrm{id}_g)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \\
&\cong (\mathrm{id}_X \times_k g)^* (\mu_X \times_k \mathrm{id}_A)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \\
&\cong (\mathrm{id}_X \times_k g)^* \mathcal{P}'_{X/k} \\
&\cong (f \times_k \mathrm{id}_{\hat{B}})^* \mathcal{P}^0_{B/k}
\end{aligned} \tag{5}$$

故由庞加莱层的泛性有 $f = \hat{g} \circ \mu_X$, 且 $\hat{g}$ 由 g 唯一决定。证毕。

由命题 2 和命题 2.3 立见若 X, Y 为域 k 上的光滑射影簇则

$$Alb(X \times_k Y) \cong Alb(X) \times_k Alb(Y) \tag{6}$$

事实上 (6) 对任意有光滑 k-点的代数簇 X, Y 都成立: 记 $Z = X \times_k Y$, 由定理 1 存在 $Alb(X)$, $Alb(Y)$ 和 $Alb(Z)$, 分别记 $\mu_X : X \dashrightarrow Alb(X)$, $\mu_Y : Y \dashrightarrow Alb(Y)$ 和 $\mu_Z : Z \dashrightarrow Alb(Z)$ 为典范有理映射。令 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ 为光滑 k-点, 不妨设 $\mu_X(x_0) = 0_{Alb(X)}$, $\mu_Y(y_0) = 0_{Alb(Y)}$, $\mu_Z((x_0, y_0)) = 0_{Alb(Z)}$, 则 $\mu_X \times_k \mu_Y : Z \dashrightarrow Alb(X) \times_k Alb(Y)$ 诱导同态 $f : Alb(Z) \to Alb(X) \times_k Alb(Y)$, 而 $X \cong X \times_k \{y_0\} \to Z$ 诱导同态 $g_1 : Alb(X) \to Alb(Z)$, $Y \cong \{x_0\} \times_k Y \to Z$ 诱导同态 $g_2 : Alb(Y) \to Alb(Z)$, 易见 $f \circ (g_1 + g_2) = \mathrm{id}_{Alb(X) \times_k Alb(Y)}$, 而由 $Alb(Z)$ 的泛性有 $(g_1 + g_2) \circ f \circ \mu_Z = \mu_Z$, 从而 $(g_1 + g_2) \circ f = \mathrm{id}_{Alb(Z)}$。总之有

推论 2. 设 X, Y 为域 k 上的代数簇且都有光滑 k-点, 则 (6) 成立, 且当 X, Y 为光滑射影簇时 (6) 与命题 2.3 给出的同构的对偶一致。

推论 3 (托莱里定理 (*Torelli's theorem*)). 设 C 为代数闭域 k 上的光滑完备曲线。对于足够一般的点 $P \in C_{\mathrm{cl}}$, 令 $\mathcal{L} = O_{\mathcal{P}ic^0(C/k)}(Z)$, 其中 Z 为命题 1 中的除子, 则 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为 $\mathcal{P}ic^0(C/k)$ 的主极化, 且 $(\mathcal{P}ic^0(C/k), \phi_{\mathcal{L}})$ 在同构之下唯一决定 C。

证. 记 $A = \mathcal{P}ic^0(C/k)$, $\mu : C \to A$ 为命题 1.iv) 中的态射, $\mu' : C \to \hat{A}$ 为命题 2 所给出的态射。由命题 1.v), 对足够一般的 P 有 $\mu^*\mathcal{L}(-(g-1)P) \cong O_C(P)$。令 $\mu_1 : C \to \mathcal{P}ic^1(C/k)$ 为 μ 与 $O_C(P) \in \mathcal{P}ic^1(C/k)$ 所给出的平移的合成, 则由命题 1.ii) 可见对几乎所有的闭点 $Q \in C$, $\mathcal{P}_{C/k}$ 在 $\mu_1(Q)$ 上的纤维同构于 $O_C(Q)$。故有 $\mu' = \phi_{\mathcal{L}} \circ \mu_1$。但由命题 2 $(\hat{A}, \mu')$ 也是 C 的阿尔巴内塞簇, 故 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为同构, 即为主极化。

注意 $h^0(\mathcal{L}) > 0$, 由推论 2.2.vii) 可见 $\chi(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L})$, 从而由推论 2.2.vi) 可见 $h^0(\mathcal{L}) = 1$, 故 Z 由 $\mathcal{L}$ 唯一决定。由 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是同源可见 A 上的任一具有数值类 $[\mathcal{L}]$ 的可逆层同构于某个 $T_x^*\mathcal{L}$ (对某个 $x \in C_{\mathrm{cl}}$), 故由 $\phi_{\mathcal{L}}$ 可以得到某个 $Z' = T_x(Z) \subset A$。以下我们来说明 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ 在同构之下唯一决定 C。当 $g = 0$ 时 $C \cong \mathbb{P}^1_k$, 当 $g = 1$ 时 $C \cong A$, 故以下只需考虑 $g > 1$ 的情形。

令态射 $f : Z'^{g-1} \to A^{g-1}$ 为 $(z_1, ..., z_{g-1}) \mapsto (z_1, z_1 + z_2, ..., z_1 + z_{g-1})$。将 C 看作 A 的子簇。由 Z 的定义可见有双有理满态射 $f' : C^{g-1} \to Z'$。记 $X = C^{(g-1)^2} \cong (C^{g-1})^{g-1}$, 其点记为 $(y_1, ..., y_{g-1})$ $(y_1, ..., y_{g-1} \in$

C^{g-1})。令 $F: X \to A^{g-1}$ 为态射

$$(y_1, ..., y_{g-1}) \mapsto (f'(y_1), f'(y_1) + f'(y_2), ..., f'(y_1) + f'(y_{g-1})) \qquad (7)$$

则易见 $F = f \circ f'^{g-1}$。由命题 1.ii) 可见 $\mathrm{pr}_{2...(g-1)} \circ F : X \to A^{g-2}$ 是满态射，且存在稠密开子集 $U \subset A^{g-2}$ 使得 X 在任一闭点 $u \in U$ 上的纤维同构于 C。再由 $\mu : C \to A$ 是闭嵌入可见 $\mathrm{im}(f)$ 在 u 上的纤维同构于 C。因此由 f 就可以在同构之下决定 C。证毕。

习题

1. 设 X 为完全域 k 上的代数簇。证明对 k 的任意扩域 k' 有 $Alb(X \otimes_k k') \cong Alb(X) \otimes_k k'$。

2. 设 X 为完全域 k 上的代数簇 (不必是拟射影的)，证明 $Alb(X)$ 具有如下 (有理意义的) 泛性：对任意 k-代数簇 S 上的任意阿贝尔概形 A' 及任意 S-态射 $\mu' : X \times_k S \to A'$，存在射影双有理态射 $S' \to S$ 及唯一 S'-阿贝尔概形同态 $\phi : Alb(X) \times_k S' \to A' \times_S S'$ 使得 $\mu' \times_S \mathrm{id}_{S'} = \phi \circ (\mu \times_k \mathrm{id}_{S'}) : X \times_k S' \to A' \times_S S'$。

3. 设 X 为诺特概形 S 上的阿贝尔概形，$Y \to S$ 为具有几何整纤维的光滑概形，$U \subset Y$ 为 S-忠实平坦开子概形。证明任一 S-态射 $U \to X$ 可唯一扩张为 Y 到 X 的 S-态射。

4. 设 X 为诺特概形 S 上的具有几何整纤维的平坦紧群概形。证明 X 为 S-阿贝尔概形。(提示：仿照推论 1 的证明方法并取有限平坦基变换。)

第 5 节　附录：复阿贝尔簇的解析理论概要

1. 复环面

设 $V = \mathbb{C}^g$，$\Lambda \subset V$ 为秩为 $2g$ 的 (有限生成的自由) 阿贝尔子群，则 Λ 是离散子群当且仅当 $\Lambda \otimes \mathbb{R} = V$ (即 Λ 包含 V 作为实向量空间的一组基)，此时我们称 Λ 为 V 中的一个格。

设 $\Lambda \subset V$ 为格, 则 V 的加法李群结构诱导 $X = V/\Lambda$ 的一个紧致连通交换复李群结构, 我们称 X 为 (g 维) 复环面。由李群论可知 $Lie(X)$ 为 g 维交换复李代数, 且 X 的切从 T_X 平凡, 即 $T_X \cong X \times Lie(X)$。注意由于 X 紧致, $Lie(X)$ 就是 X 的所有向量场组成的李代数。

作为群, X 是可除群, 且易见 $X[n] = \ker(n_X) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, 其中 $n_X : X \to X$ 为同态 $x \mapsto nx$。作为实流形, X 同构于 $2g$ 个圆周 S^1 的直积。但应注意, 尽管 $Lie(X)$, $\lim\limits_{\overrightarrow{n}} X[n]$ 和 X 作为实流形均可分解为直积, X 本身一般却连非平凡子复环面都没有。

例 1. 设 $g = 2$。通过复线性变换, 可设 Λ 有生成元 (1,0), (0,1), $\tau_1 = (\tau_{11}, \tau_{12})$, $\tau_2 = (\tau_{21}, \tau_{22})$。记 $\tau = (\tau_{ij})$。一个 X 的 1 维子复环面等价于 V 的一个 1 维复线性子空间 W, 它包含 Λ 的一个秩为 2 的子群。取 $W \cap \Lambda$ 的一组生成元 v_1, v_2, 其中 $v_i = a_{i1}(1,0) + a_{i2}(0,1) + a_{i3}\tau_1 + a_{i4}\tau_2$ ($a_{ij} \in \mathbb{Z}$), 则存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得 $v_2 = cv_1$。由此得到

$$\begin{aligned} &(a_{11} + a_{13}\tau_{11} + a_{14}\tau_{21})(a_{22} + a_{23}\tau_{12} + a_{24}\tau_{22}) \\ =\; &(a_{21} + a_{23}\tau_{11} + a_{24}\tau_{21})(a_{12} + a_{13}\tau_{12} + a_{14}\tau_{22}) \end{aligned} \tag{1}$$

若 τ 足够一般, 则 $1, \tau_{ij}, \tau_{ij}\tau_{kl}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, 此时由 (1) 可见 v_1, v_2 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关, 与所设矛盾, 换言之此时 X 没有 1 维子复环面。

若 X 没有非平凡子复环面, 则称 X 为单的。

我们知道 (见 [L-5]) 任一切从平凡的紧致复流形 X 必为形如 G/H 的齐性空间, 其中 G 为复李群而 $H \subset G$ 为离散子群, 且此时 $Lie(G)$ 同构于 X 的所有向量场组成的李代数。

引理 1. 设 X 为紧致连通复流形, 具有平凡切从, 则下列条件等价:

i) X 具有李群结构;

ii) X 的所有向量场组成的李代数是交换的;

iii) X 为复环面。

证. i)⇒ii): 我们只需证明任一紧致连通复李群 X 必为交换群 (因为 X 上的向量场组成的李代数同构于 $Lie(X)$)。考虑映射 $\phi : X \times X \to X$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, 显然 ϕ 是解析映射, 且当 g, h 中有一个等于 e 时

$\phi(g,h)=e$。取 e 的一个开邻域 $U\subset X$ 使得 U 上有局部坐标 $x_1,...,x_n$。令 $V=X\times X-\phi^{-1}(U)$, 则 V 为 $X\times X$ 中的闭集, 故为紧致集, 从而 $\mathrm{pr}_1:X\times X\to X$ 将 V 映到 X 的一个闭子集。注意 $\mathrm{pr}_1^{-1}(e)\subset\phi^{-1}(U)$, 可见 $U'=X-\mathrm{pr}_1(V)$ 为 X 的非空开子集 (因为 $e\in U'$)。对任意 $g\in U'$, $\mathrm{pr}_1^{-1}(g)=\{g\}\times X\subset\phi^{-1}(U)$, 故对任意 i $(1\leqslant i\leqslant n)$, $\phi^{-1}(U)$ 上的解析函数 $\phi^*(x_i)$ 在 $\{g\}\times X$ 上的限制为常数 (因为 $\{g\}\times X$ 是紧致连通复流形), 这说明 $\phi(\{g\}\times X)$ 为一个点, 再注意 $\phi(g,e)=e$ 可见 $\phi(\{g\}\times X)=e$, 即 g 在 X 的中心中。由于 X 由 U' 生成, 可见 X 是交换的。

ii)⇒iii): 令 Θ_X 为 X 的所有向量场组成的李代数, 则 Θ_X 可以看作一个加法复交换连通李群, 记为 G。由于 Θ_X 是交换李代数, 指数映射 $\exp:\Theta_X\to Aut(X)$ 为李群同态 (参看 [L-5])。而由于 X 的切从平凡, G 在 X 上的作用是可迁的。任取 $x\in X$, 则 x 的安定子群 $H\subset G$ 为离散子群且 $X\cong G/H$。由于 X 是紧致的, 由上所述 H 必为 G 中的一个格, 从而 X 是复环面。

iii)⇒i) 平凡。证毕。

对于一个复环面 $X=V/\Lambda$, 上面我们看到典范同构 $Lie(X)\cong V$。此外可以将 V 看作 X 的万有覆叠空间, 这样就不难看到典范同构 $\Lambda\cong\pi_1(X)\cong H_1(X,\mathbb{Z})$, 其中 H_1 为拓扑空间的奇异同调。我们注意 $H^0(S^1,\mathbb{Z})\cong H^1(S^1,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ (这里 H^i 为拓扑空间的奇异上同调, 由德拉姆定理可知它与德拉姆上同调一致), 由 $X\cong(S_1)^{2g}$ 应用居内特公式可得 $H^i(X,\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z})^{\binom{2g}{i}}$ 对所有非负整数 i 成立。特别地, 可以将 $H^1(X,\mathbb{Z})$ 与 $\Lambda^\vee=Hom(\Lambda,\mathbb{Z})$ 等同起来。由此得

引理 2. 对于一个复环面 $X=V/\Lambda$ 有典范同构

$$H^i(X,\mathbb{Z})\cong\wedge^i\Lambda^\vee\quad(i\in\mathbb{N})\tag{2}$$

其中右边可以看作所有 Λ 上的整值交错 i-形式的加法群。

2. 直线丛

设 X 为紧致连通复空间, 则 X 上层的上同调可由切赫上同调给出。故 $H^1(X,O_X^*)$ 的元可由 2-上链给出, 即对 X 的一个开覆盖 $\{U_i|1\leqslant$

$i \leqslant r\}$, 在每个 $U_i \cap U_j$ 上给出一个函数 $f_{ij} \in O_X^*(U_i \cap U_j)$, 使得对任意 $i, j, k \leqslant r$, 在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上有 $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$。这等价于 X 上的一个直线从。故 $H^1(X, O_X^*)$ 同构于 X 上的直线从组成的群, 即皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$。

由正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_X \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}\cdot} O_X \xrightarrow{\exp} O_X^* \to \{1\} \tag{1}$$

(其中 $\mathbb{Z}_X$ 为整常数层) 及 $H^0(X, O_X) = \mathbb{C}$ 得长正合列

$$0 \to H^1(X, \mathbb{Z}_X) \to H^1(X, O_X) \to H^1(X, O_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}_X) \tag{2}$$

注意 $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ 和 $H^2(X, \mathbb{Z}_X)$ 为有限生成的阿贝尔群。对任意直线从 $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $c_1(L)$ 称为 L 的 1 级陈类。我们注意 $V = H^1(X, O_X)$ 为有限维复线性空间, 而在很多情形, $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ 在 $H^1(X, O_X)$ 中的象 Λ 为离散子群, 从而 V 在 $H^1(X, O_X^*) = \mathrm{Pic}(X)$ 中的象 $\mathrm{Pic}^0(X) \cong V/\Lambda$, 这自然地给出 $\mathrm{Pic}(X)$ 的李群结构, 而 $\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ 为有限生成的离散阿贝尔群 (实际上, 此时 $\mathrm{Pic}(X)$ 可以定义为一个精细模空间, 即代表 Pic 函子)。在 X 光滑 (即为流形) 的情形, 由拓扑学可知 $\Lambda \otimes \mathbb{R} = V$, 故 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 为复环面。若 X 不光滑, 则 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 不一定是复环面, 例如复射影平面中的奇异曲线 $Y^2Z = X^3$ 和 $Y^2Z = X^2(X - Z)$ 的皮卡群都同构于 $\mathbb{G}_{m/\mathbb{C}}$ (非零复数的乘法群)。

设 X 为复环面 V/Λ, $\pi : V \to X$ 为投射, 则有范畴等价

$$\{X \text{ 上的阿贝尔群层}\} \leftrightarrow \{V \text{ 上的阿贝尔群层, 带有 } \Lambda \text{ 的作用, 与 } \Lambda \text{ 在 } V \text{ 上的作用相容}\}$$

其中 X 上的层 $\mathcal{F}$ 对应于 V 上的层 $\pi^*\mathcal{F}$, 而右边的一个对象 $\mathcal{G}$ 对应于 X 上的层 $\mathcal{G}/\Lambda$。故对 X 上的任意阿贝尔群层 $\mathcal{F}$ 有谱序列 (参看一般的同调代数教科书, 如 [L1, 定理 XIII.4.1])

$$E_2^{p,q} = H^p(\Lambda, H^q(V, \pi^*\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \tag{3}$$

(这里 $H^n(\Lambda, \cdot)$ 为群的上同调, 其定义可参看有关的同调代数教科书, 在 [L-2] 中还有一个变化了的定义)。特别地, 若取 $\mathcal{F} = O_X^*$, 则 $\pi^*\mathcal{F} = O_V^*$, 记 $\Xi = H^0(V, O_V)$, 即 V 上的全纯函数的加法群, 不难验证 $H^0(V, O_V^*) =$

Ξ^*, 即 V 上处处非零的全纯函数乘法群。事实上, 对任意 $f \in H^0(V, O_V^*)$ 存在 $h \in \Xi$ 使得 $f = e^h$ (若令 $z_1, ..., z_g$ 为 V 的坐标, 则有全纯函数 $\int_0^{z_1} \frac{\partial f/\partial z_1}{f}|_{t,z_2,...,z_g} dt$, 它与 h 的差为 $z_2, ..., z_n$ 的函数, 由此不难归纳地得到 h)。另一方面, 对任意 $q > 0$ 有 $H^q(V, O_V^*) = \{1\}$ (证明不很平凡, 参看例如 [GH, p.47]), 故有典范同构

$$H^n(X, O_X^*) \cong H^n(\Lambda, \Xi^*) \tag{4}$$

类似地, 对任意 $q > 0$ 有 $H^q(V, O_V) = 0$ (参看例如 [GH, p.46]), $H^q(V, \mathbb{Z}) = 0$ (因为 V 同伦于一个点), 故有

$$H^n(X, O_X) \cong H^n(\Lambda, \Xi) \tag{5}$$

以及

$$H^n(X, \mathbb{Z}) \cong H^n(\Lambda, \mathbb{Z}) \tag{6}$$

且 (1) 给出的长正合列也可以由这些群的同调给出。

我们下面具体地看一下这些同构, 特别是在 $n = 1, 2$ 时的情形。

设 $L \in \mathrm{Pic}(X)$, 则 L 所对应的 $H^1(\Lambda, \Xi^*)$ 的元可以这样给出: 任取 V 上直线从的同构 $\phi : \pi^*L \to \mathbb{C} \times V$, 则 Λ 在 $\mathbb{C} \times V$ 的作用为对任意 $\lambda \in \Lambda$ 给出一个 $\mathbb{C} \times V$ 的自同构

$$\lambda(a, v) = (e_\lambda(v)a, v + \lambda) \tag{7}$$

其中 $e_\lambda \in \Xi^*$, 而对任意 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ 有 $(\lambda + \lambda')(a, v) = \lambda(\lambda'(a, v))$, 即

$$e_{\lambda+\lambda'}(v) = e_\lambda(v + \lambda')e_{\lambda'}(v) \tag{8}$$

这就是 $H^1(\Lambda, \Xi^*)$ 中的上链条件。若将 ϕ 换为 $\phi \circ (f\cdot)$ $(f \in \Xi^*)$, 则 $e_\lambda(v)$ 换为 $e_\lambda(v)f(v + \lambda)f(v)^{-1}$, 与 $e_\lambda(v)$ 相差一个上边缘, 这就给出 $\mathrm{Pic}(X) \to H^1(\Lambda, \Xi^*)$。而 $c_1(L) \in H^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ 可以如下给出: 对每个 $\lambda \in \Lambda$ 取 $h_\lambda \in \Xi$ 使得 $e^{h_\lambda} = e_\lambda$, h_λ 的取法可相差一个 $2\pi\sqrt{-1}$ 的整数倍, 从而对任意 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, 上边缘

$$h_{\lambda,\lambda'} = h_{\lambda'}(v + \lambda) - h_{\lambda+\lambda'}(v) + h_\lambda(v) \tag{9}$$

的值为 $2\pi\sqrt{-1}$ 的整数倍 (因为 $e^{h_{\lambda,\lambda'}}=1$), 与 v 无关, 所有 $F(\lambda,\lambda')=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}h_{\lambda,\lambda'}$ 组成一个 2-上链 (即 $Z^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ 中的元), 它给出 $c_1(L)\in H^2(\Lambda,\mathbb{Z})$。

我们下面要用到关于复流形 X 的 Dolbeault 定理: $H^q(X,\Omega_X^p)\cong H_{\bar\partial}^{p,q}(X)$ (参看 [GH, p.45])。对 $X=V/\Lambda$ 的情形有

$$Hom(\Lambda,\mathbb{C})\cong Hom(\Lambda,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}\cong H^1(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}\cong H^1(X,\mathbb{C}) \tag{10}$$

令 $T=Hom_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$, $\bar T=Hom_{\mathbb{C}\text{-anti}}(V,\mathbb{C})$, 则有

$$Hom(\Lambda,\mathbb{C})\cong Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda\otimes\mathbb{R},\mathbb{C})\cong Hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})\cong T\oplus\bar T \tag{11}$$

其中 $T\cong H^0(X,\Omega_X^1)$ 而 $\bar T\cong H^1(X,O_X)$。由引理 2 得

$$H^2(X,\mathbb{C})\cong\wedge_{\mathbb{C}}^2(T\oplus\bar T)\cong\wedge_{\mathbb{C}}^2T\oplus T\otimes_{\mathbb{C}}\bar T\oplus\wedge_{\mathbb{C}}^2\bar T \tag{12}$$

其中 $\wedge_{\mathbb{C}}^2\bar T\cong H^2(X,O_X)$。

由 (1) 给出的长正合列可知

$$\mathrm{im}(c_1)=\ker(H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,O_X))=\ker(H^2(\Lambda,\mathbb{Z})\to\wedge_{\mathbb{C}}^2\bar T) \tag{13}$$

注意 $H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,O_X)$ 经过 $H^2(X,\mathbb{C})$, 而 $H^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ 的元都是实的, 故由 (12) 可见一个 $H^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ 的元在 (13) 右边当且仅当它在 $T\otimes_{\mathbb{C}}\bar T$ 中, 即

$$\mathrm{im}(c_1)=H^2(\Lambda,\mathbb{Z})\cap(T\otimes_{\mathbb{C}}\bar T) \tag{14}$$

不难看出对任意 $E\in H^2(X,\mathbb{C})$, $E\in T\otimes_{\mathbb{C}}\bar T$ 当且仅当对任意 $x,y\in V$ 有

$$E(\sqrt{-1}x,\sqrt{-1}y)=E(x,y) \tag{15}$$

而这又等价于 $E(x,\sqrt{-1}y)$ 是 (实) 对称二次型。

由上面给出的 2-上链 $F(\lambda,\lambda')=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}h_{\lambda,\lambda'}$ $(\forall\lambda,\lambda'\in\Lambda)$ 可以得到一个反对称二次型: 令

$$\begin{aligned}E(\lambda,\lambda')&=(F(\lambda,\lambda')-F(\lambda',\lambda))\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(h_{\lambda'}(v+\lambda)+h_\lambda(v)-h_\lambda(v+\lambda')-h_{\lambda'}(v))\end{aligned} \tag{16}$$

注意 F 满足上链条件

$$F(\lambda_2,\lambda_3)-F(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3)+F(\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3)-F(\lambda_1,\lambda_2)=0 \tag{17}$$

将 (17) 记为 (C_{123}), 则由 $(\mathrm{C}_{123})+(\mathrm{C}_{312})-(\mathrm{C}_{132})$ 得 $E(\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2)=E(\lambda_3,\lambda_1)+E(\lambda_3,\lambda_2)$, 由此可见 E 为反对称双线性的。这样就给出一个映射 $H^2(X,\mathbb{Z})\to Hom(\wedge^2\Lambda,\mathbb{Z})$, 它实际上就是 (1.2) 在 $i=2$ 时给出的同构。综上所述得

命题 1. 设复环面 $X=V/\Lambda$, 则有一一对应

$$\mathrm{im}(c_1)\leftrightarrow\{E\in Hom(\wedge^2\Lambda,\mathbb{Z})|E\otimes\mathbb{R}\text{ 满足 (15)}\} \tag{18}$$

注 1. 不难验证存在一一对应

$$\begin{gathered}\{V\text{ 上的埃尔米特型}\}\leftrightarrow\{V\text{ 上满足 (15) 的实反对称型}\}\\ H\mapsto \mathrm{Im}H\\ E(\sqrt{-1}x,y)+\sqrt{-1}E(x,y)\leftarrow\!\shortmid E\end{gathered}$$

(比较 [LO, §8.1])。故由命题 1 可知 $\mathrm{im}(c_1)$ 与下面的集合一一对应:

$\{V$ 上的埃尔米特型 H, 使得 $E=\mathrm{Im}H$ 是实交错形, 且 E 在 $\Lambda\times\Lambda$ 上取整数值$\}$

下面我们进一步来看如何由陈类给出直线丛。由命题 1, 给定陈类相当于给定 E, 而由注 1 这又相当于给定 H。对反对称双线性型 E 可取标准基, 即可取 Λ 的一组生成元 λ_i $(1\leqslant i\leqslant 2g)$ 使得 $E(\lambda_i,\lambda_{g+j})=d_i\delta_{ij}$ $(1\leqslant i,j\leqslant g)$, 其中 d_i 为正整数, $d_1|d_2|\cdots|d_n$。换言之, 在这组生成元下 E 表为矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & D\\ -D & 0\end{pmatrix} \tag{19}$$

其中 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\ldots)$。令

$$h_\lambda(v)=\pi H(v,\lambda)+b_\lambda \tag{20}$$

其中 b_λ (对每个 λ) 为任意常数, 则易见 (16) 满足 (事实上, 这是 (16) 仅有的线性解), 而 (9) 须为 $2\pi\sqrt{-1}$ 的整数倍, 将 (20) 代入 (9) 化简得到

$$\frac{1}{2}H(\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{2\pi}(b_{\lambda_1}+b_{\lambda_2}-b_{\lambda_1+\lambda_2})\in\sqrt{-1}\mathbb{Z} \tag{21}$$

令 $\frac{b_\lambda}{2\pi}=\sqrt{-1}c_\lambda+\frac{1}{4}H(\lambda,\lambda)$，则 (21) 化为

$$c_{\lambda_1}+c_{\lambda_2}-c_{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{2}E(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z} \tag{22}$$

这个方程总是有解的，例如可对 $\lambda=\sum_{i=1}^{2g}m_i\lambda_i$ 取 $c_\lambda=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{g}m_im_{g+i}$。注意 (22) 说明 $\mathrm{Im}(c_\lambda)$ 对 λ 是加性的，可将 $\lambda\mapsto\mathrm{Im}(c_\lambda)$ 扩张成一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\phi:V\to\mathbb{C}$ (先任意扩张成实线性映射 $\psi:V\to\mathbb{C}$ 再令 $\phi(v)=\psi(v)-\sqrt{-1}\psi(\sqrt{-1}v)$)。注意上链 $\{h_\lambda\}$ 可以用一个上边缘 (即一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $V\to\mathbb{C}$) 修改，故可用 $c_\lambda-\sqrt{-1}\phi(\lambda)$ 代替 c_λ 而不影响直线从的构造。这样得到的 c_λ 都是实数。令 $\alpha(\lambda)=\exp(2\pi\sqrt{-1}c_\lambda)$，则 (22) 等价于 $\alpha(\lambda_1+\lambda_2)=e^{\sqrt{-1}\pi E(\lambda_1,\lambda_2)}\alpha(\lambda_1)\alpha(\lambda_2)$。再令

$$e_\lambda(v)=\alpha(\lambda)e^{\pi H(v,\lambda)+\pi H(\lambda,\lambda)/2} \tag{23}$$

则不难验证 (8) 成立，这就给出一个直线从，其陈类为 E，记为 $L(H,\alpha)$。

命题 2 (Appell-Humbert). X 上的任一直线从形如 $L(H,\alpha)$，且唯一决定 α。

证. 先证明 α 的唯一性。若 $H=0$ 而 α 定义平凡直线从，则由定义存在 $g\in\Xi^*$ 使得 $g(v+\lambda)=g(v)\alpha(\lambda)$ 对任意 $v\in V$，$\lambda\in\Lambda$ 成立。注意 $|\alpha(\lambda)|=1$，可见 g 有界，故为常数，从而 $\alpha=1$。注意

$$L(H_1,\alpha_1)\times_X L(H_2,\alpha_2)\cong L(H_1+H_2,\alpha_1\alpha_2) \tag{24}$$

令 P 为所有对 (H,α) 组成的集合，则可定义 P 的一个群结构

$$(H_1,\alpha_1)(H_2,\alpha_2)=L(H_1+H_2,\alpha_1\alpha_2) \tag{25}$$

而 $(H,\alpha)\mapsto L(H,\alpha)$ 给出一个群同态 $\mu:P\to\mathrm{Pic}(X)$，上面所证的断言等价于 μ 为单同态。

下面来证明 α 的存在性，这等价于 μ 是满同态。首先，由前述可知 $\mathrm{im}(c_1\circ\mu)=\mathrm{im}(c_1)$，故只需证明 $\ker(c_1\circ\mu)=\ker(c_1)$ $(=Pic^0(X))$ 即

可。令 G 为所有绝对值为 1 的复数组成的乘法群 (同构于 $SO_2(\mathbb{R})$), 易见 $\ker(c_1 \circ \mu) \cong Hom(\Lambda, G)$。我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Lambda, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j'} & H^1(\Lambda, \Xi) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^1(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j} & H^1(X, O_X) \end{array} \tag{26}$$

注意由 (2) 可见 $\exp^* : H^1(X, O_X) \to H^1(X, O_X^*)$ 的象为 $Pic^0(X)$, 而由 Dolbeault 定理可见 j 是满同态, 这就是说对 $Pic^0(X)$ 中的任一直线从 L, 可取 (8) 中的 $e_\lambda(v)$ 只与 λ 有关。由前面的方法, 可取 $e_\lambda \in G$, 从而 $L = L(0, \alpha)$, 其中 $\alpha(\lambda) = e_\lambda$。证毕。

注意 $L(H, \alpha)$ 的一个截口相当于 $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{C} \times V \to V$ 的一个 Λ-不变截口, 即一个解析函数 $\theta : V \to \mathbb{C}$ 使得

$$\theta(v + \lambda) = \alpha(\lambda) e^{\pi H(v,\lambda) + \pi H(\lambda,\lambda)/2} \theta(v) \quad (\forall v \in V,\ \lambda \in \Lambda) \tag{27}$$

这样的函数称为 *θ 函数*。

3. 复环面为阿贝尔簇的莱夫谢茨条件

设 X 为复环面。若 X 有代数结构, 则由 GAGA 定理 (见 [Se]) 可知其代数结构是唯一的, 此时 X 称为*阿贝尔簇*。所有阿贝尔簇都是射影的, 这一事实不仅可以用解析方法证明, 也可以用代数方法证明 (见推论 4.1)。下面考虑 X 为射影簇所需要的条件。

我们知道 X 为射影簇当且仅当 X 上有一个丰富可逆层, 而由命题 2 可知任一可逆层形如 $L(H, \alpha)$, 下面将看到 $L(H, \alpha)$ 是丰富的当且仅当 H 是正定的, 此时我们称 H 为 X 的一个*黎曼型*。

如果 H 是退化的, 令

$$W = H^\perp = \{x \in V | E(x, y) = 0\ \forall y \in V\} \tag{1}$$

为 $\mathbb{C}$-线性子空间, 且 $W \cap \Lambda$ 为 W 中的格 (因为 E 可以看作 Λ 上的整值二次型的扩张)。若 θ 为 $L(H, \alpha)$ 的一个截口, 则对任意 $\lambda \in W \cap \Lambda$ 有

$\theta(v+\lambda)=\alpha(\lambda)\theta(v)$ $(\forall v\in V)$, 由此可见对任意 $v\in V$, 函数 $\theta(v+w)$ 对 $w\in W$ 有界, 从而为常数 (与 w 无关), 这就给出 $\bar{V}=V/W$ 上的函数 $\bar{\theta}$ 使得 $\theta=\bar{\theta}\circ p$, 其中 $p:V\to\bar{V}$ 为投射。易见 $\bar{\theta}$ 为格 $\bar{\Lambda}=\Lambda/(W\cap\Lambda)\subset\bar{V}$ 上的 θ 函数, 相应的埃尔米特型为 H 在 $\bar{V}$ 上诱导的埃尔米特型, 记为 $\bar{H}$。由此可见, H 退化的情形可以化为非退化的情形来研究, 而在退化的情形 $L(H,\alpha)$ 一定不是丰富的, 因为任意 $L(H,\alpha)^n$ 即使给出 X 到射影空间的态射也一定经过 $\bar{X}=\bar{V}/\bar{\Lambda}$。

如果 H 是非退化非正定的, 取 $w\in V$ 使得 $H(w,w)<0$, 并取紧致子集 $D\subset V$ 使得 $V=D+\Lambda$, 则对任意 $c\in\mathbb{C}$ 可取 $d\in D$, $\lambda\in\Lambda$ 使得 $cw=d+\lambda$。对任意 $v\in V$ 有

$$|\theta(v+cw)|=|\theta(v+d)|e^{\pi\mathrm{Re}H(v+d,\lambda)+\pi H(\lambda,\lambda)/2} \tag{2}$$

固定 v, 注意当 $|c|\to\infty$ 时, $\theta(v+d)=O(1)$, $\mathrm{Re}(H(v+d,\lambda))=O(c)$, $H(\lambda,\lambda)=|c|^2H(w,w)+O(c)$, 从而 (2) 右端趋于 0, 由最大模定理有 $\theta=0$。这说明此时 $\Gamma(X,L(H,\alpha))=0$, $L(H,\alpha)$ 当然不可能是丰富的。

引理 3. 设 H 是正定的, 则

$$\dim_{\mathbb{C}}H^0(X,L(H,\alpha))=\sqrt{\det E} \tag{3}$$

证. 我们用傅里叶展开来构造 θ 函数, 为此先将其化为周期函数。

注意 E 非退化, 可取标准基 $\{\lambda_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant 2g)$ 使得 E 表为矩阵 (2.19), 其中每个 $d_i>0$。所有 $\lambda_i+\lambda_{g+i}$ 生成 Λ 关于 E 的一个全迷向子群 Λ'。令 $V'=\Lambda'\otimes\mathbb{R}$, 则 $V'\cap\sqrt{-1}V'=0$, 这是因为它是 V 的复线性子空间, 在其上 H 的限制为零, 而 H 是非退化的。这样 $V=V'\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, 故可取 V 上的复双线性型 B 使得 B 和 H 在 $V'\times V'$ 上的限制相等。由于 H 是左线性的, 可见

$$H-B|_{V\times V'}=0 \tag{4}$$

设 $\theta\in H^0(X,L(H,\alpha))$, 则由 (2.22) 可取 Λ' 上的加法特征标 χ' 使得

$$\alpha(\lambda')=e^{2\pi\sqrt{-1}\chi'(\lambda')}\quad(\forall\lambda'\in\Lambda') \tag{5}$$

将 χ' 复线性地扩张到 V。令 $\theta^*(v) = e^{-\pi B(v,v)/2}\theta(v)$, 则由 (2.27) 有

$$\theta^*(v+\lambda) = \alpha(\lambda)e^{\pi(H-B)(v,\lambda)+\pi(H-B)(\lambda,\lambda)/2}\theta^*(v) \quad (\forall v \in V,\ \lambda \in \Lambda) \tag{6}$$

故由 (4) 和 (5) 可见 $e^{-2\pi\sqrt{-1}\chi'(v)}\theta^*(v)$ 以 Λ' 的周期。令 $\widehat{\Lambda'} = Hom(\Lambda', \mathbb{Z})$, 看作 $Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ 的加法子群。由 $e^{-2\pi\sqrt{-1}\chi'(v)}\theta^*(v)$ 关于 Λ' 的傅里叶展开可得

$$\theta^*(v) = \sum_{\chi\in\widehat{\Lambda'}} c_\chi e^{2\pi\sqrt{-1}(\chi+\chi')(v)} \tag{7}$$

设 $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda'$, 则

$$\begin{aligned}(H-B)(\lambda',\lambda) &= \overline{H(\lambda,\lambda')} - B(\lambda,\lambda') = -2\sqrt{-1}\mathrm{Im}(H(\lambda,\lambda')) \\ &= 2\sqrt{-1}E(\lambda',\lambda)\end{aligned} \tag{8}$$

对任意 $\lambda \in \Lambda$, E 定义 Λ' 上的一个特征标 $\hat{\lambda}$ 使得 $\hat{\lambda}(\lambda') = E(\lambda', \lambda)$ $(\forall \lambda' \in \Lambda')$。(8) 可改写为

$$(H-B)(v,\lambda) = 2\sqrt{-1}\hat{\lambda}(v) \tag{9}$$

将 (7) 代入 (6) 化简得

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\in\widehat{\Lambda'}} c_\chi e^{2\pi\sqrt{-1}(\chi+\chi')(\lambda)} e^{2\pi\sqrt{-1}(\chi+\chi')(v)} \\ &= \alpha(\lambda)e^{\pi\sqrt{-1}\hat{\lambda}(\lambda)} \sum_{\chi\in\widehat{\Lambda'}} c_\chi e^{2\pi\sqrt{-1}(\chi+\chi'+\hat{\lambda})(v)}\end{aligned} \tag{10}$$

比较两边的系数得

$$c_\chi = \alpha(\lambda)e^{\pi\sqrt{-1}\hat{\lambda}(\lambda)-2\pi\sqrt{-1}(\chi+\chi')(\lambda)}c_{\chi-\hat{\lambda}} \tag{11}$$

令 $\epsilon: \Lambda \to \hat{\Lambda}$ 为 E 诱导的同态 $\lambda \mapsto \hat{\lambda}$, 则由 Λ' 的迷向性有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Lambda' & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \Lambda/\Lambda' \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon|_{\Lambda'}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\epsilon}} \\ 0 \to \widehat{\Lambda/\Lambda'} & \longrightarrow & \hat{\Lambda} & \xrightarrow{r} & \widehat{\Lambda'} \to 0 \end{array} \tag{12}$$

其中 r 为限制映射。由 (11) 可见所有 c_χ 由其在 $\mathrm{coker}(\bar{\epsilon})$ (为有限群) 中的代表元上的值决定。我们来说明, c_χ 在一组代表元上的值可以任意取

(由此即可得到 θ 函数), 为此只需考虑对某个 $\chi_0 \in \widehat{\Lambda'}$ 有 $c_{\chi_0} = 1$ 且对所有 $\chi \in \widehat{\Lambda'} - \{\chi_0 + \mathrm{im}(\bar{\epsilon})\}$ 有 $c_\chi = 0$ 的情形。此时 (7) 右端由常数$\cdot \sum_{\chi\in\mathrm{im}(\bar{\epsilon})} |c_{\chi_0+\chi}| e^{2\pi|\chi(v)|}$ 所界, 由 (11) 可见这又由

$$\text{常数} \cdot \sum_{\hat{\lambda}\in\mathrm{im}(\bar{\epsilon})} e^{\pi \mathrm{Im} E(\lambda,\lambda) + c\|\lambda\|} \tag{13}$$

所界。注意 $\mathrm{Im}E$ 在 $\mathrm{im}(\bar{\epsilon})$ 上诱导的二次型是负定的, 这是因为, 任意 $\lambda \in \Lambda$ 可表为 $\lambda = \lambda' + \sqrt{-1}\lambda''$, 其中 $\lambda', \lambda'' \in \Lambda'$, 从而有

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}E(\lambda,\lambda) &= \mathrm{Im}\hat{\lambda}(\lambda') + \mathrm{Im}\sqrt{-1}\hat{\lambda}(\lambda'') = \hat{\lambda}(\lambda'') \\ &= E(\lambda'',\lambda) = E(\lambda'', \sqrt{-1}\lambda'') = -H(\lambda'',\lambda'') \end{aligned} \tag{14}$$

而 $\lambda'' = 0$ 当且仅当 $r(\hat{\lambda}) = 0$。由此可见 (7) 的右端在任一紧致集上一致收敛。

这样我们就找到 $H^0(X, L(H,\alpha))$ 的一组基, 其元素与 $\mathrm{coker}(\bar{\epsilon})$ 的元一一对应, 即

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L(H,\alpha)) = \#\mathrm{coker}(\bar{\epsilon}) \tag{15}$$

再注意 $\mathrm{coker}(\bar{\epsilon}) \cong \mathrm{coker}(\epsilon|_{\Lambda'})^D$ (卡迪耶对偶), 由 (12) 有正合列

$$0 \to \mathrm{coker}(\bar{\epsilon})^D \to \mathrm{coker}(\epsilon) \to \mathrm{coker}(\bar{\epsilon}) \to 0 \tag{16}$$

特别地有 $(\#\mathrm{coker}(\bar{\epsilon}))^2 = \#\mathrm{coker}(\epsilon) = \det E$, 这就得到 (3)。证毕。

命题 3. 若 H 是正定的, 则对任意 $m \geqslant 3$, $L(mH, \alpha^m)$ 是极丰富的。

证. 为简单起见设 $m = 3$。首先注意, 若 $\theta \in H^0(L(H,\alpha))$, 则对任意 $a, b \in V$ 有

$$\begin{aligned} &\pi H(v-a,\lambda) + \pi H(v-b,\lambda) + \pi H(v+a+b,\lambda) + 3\pi H(\lambda,\lambda)/2 \\ &= 3\pi H(v,\lambda) + 3\pi H(\lambda,\lambda)/2 \quad (\forall v \in V, \lambda \in \Lambda) \end{aligned} \tag{17}$$

由 (2.27), 这说明 $\theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b) \in H^0(L(3H,\alpha^3))$。由引理 3 存在 $\theta \neq 0 \in H^0(L(H,\alpha))$, 对任意 $v \in V$ 可取 $a, b \in V$ 使得 $\theta(v-a)\theta(v-b)\theta(v+a+b) \neq 0$, 这说明线性系 $H^0(L(3H,\alpha^3))$ 无基点, 从

而给出一个解析映射 $\Theta: X \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, 其中 $N = \dim_{\mathbb{C}} H^0(L(3H, \alpha^3)) - 1$。以下证明 Θ 是闭嵌入, 为此需要验证 Θ 分离点且分离切空间。

记 $p: V \to X$ 为投射。设 $v_1, v_2 \in V$ 使得 $\Theta \circ p(v_1) = \Theta \circ p(v_2)$, 则存在 $\gamma \in \mathbb{C}^*$ 使得对任意 $\phi \in H^0(L(3H, \alpha^3))$ 有 $\phi(v_2) = \gamma\phi(v_1)$, 特别地, 对任意 $\theta \neq 0 \in H^0(L(H, \alpha))$ 有

$$\theta(v_1 - a)\theta(v_1 - b)\theta(v_1 + a + b) = \lambda\theta(v_2 - a)\theta(v_2 - b)\theta(v_2 + a + b) \quad (18)$$

看作 a 的函数并应用 $d\log$, 得

$$-\omega(v_1 - a) + \omega(v_1 + a + b) = -\omega(v_2 - a) + \omega(v_2 + a + b) \quad (\forall a, b \in V) \quad (19)$$

其中 $\omega = \frac{d\theta}{\theta}$。这说明 $d\log\frac{\theta(v_2+v)}{\theta(v_1+v)} = \omega(v_2 + v) - \omega(v_1 + v)$ 是平移不变的, 从而等于某个 dl, 其中 l 为 V 上的线性函数。积分得

$$\theta(v + v_0) = ce^{l(v)}\theta(v) \quad (20)$$

其中 $c \in \mathbb{C}^*$, $v_0 = v_2 - v_1$。对任意 $\lambda \in \Lambda$, 将 (2.27) 代入 (20) 得 $e^{\pi H(v_0,\lambda)} = e^{l(\lambda)}$, 即

$$\pi H(v_0, \lambda) - l(\lambda) \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z} \quad (21)$$

由于 $H(\lambda, v_0) - H(v_0, \lambda)$ 是纯虚数, (21) 说明 $\pi H(\lambda, v_0) - l(\lambda)$ 是纯虚数, 但 $\pi H(v, v_0) - l(v)$ 是 v 的复线性函数, 这说明 $\pi H(v, v_0) = l(v)$, 再由 (21) 就得到 $E(v_0, \lambda) \in \mathbb{Z}$, 从而 $v_0 \in \Lambda^\perp$ (为 Λ 在 V 中有限指数的扩群, 同构于 $\hat{\Lambda}$)。令 $\Lambda_0 = \Lambda + \mathbb{Z}v_0$, 则由 (20) 可见 θ 也是格 Λ_0 的 θ 函数 (相应于 H 和 α 的扩张), 而这对任意 $\theta \in H^0(L(H, \alpha))$ 都成立, 故由引理 3 有 $\#(\Lambda^\perp/\Lambda) = \#(\Lambda_0^\perp/\Lambda_0)$, 从而 $\Lambda = \Lambda_0$, 即 $v_0 \in \Lambda$。这就证明了 Θ 是单射。

现在来看切空间的诱导映射。取定 V 的坐标 $z_1, ..., z_g$。设 $v_0 \in V$ 点处的切向量 $D = \sum\limits_i c_i\frac{\partial}{\partial z_i}$ 在 $(\Theta \circ p)_*$ 下映到 0, 这就是说 p_*D 与 $p(v_0)$ 线性相关, 即存在 $c_0 \in \mathbb{C}$ 使得对任意 $\phi \in H^0(L(3H, \alpha^3))$ 有 $\sum\limits_i c_i\frac{\partial\phi}{\partial z_i}(v_0) = c_0\phi(v_0)$, 即 $D(\log\phi)(v_0) = c_0$。仍像上面一样取 $\phi(v) = \theta(v - a)\theta(v - b)\theta(v + a + b)$, 则可见函数 $f(v) = D(\log\phi)(v)$ 满足

$$f(v_0 - a) + f(v_0 - b) + f(v_0 + a + b) = c_0 \quad (\forall a, b \in V) \quad (22)$$

由此不难推出 f 是线性函数, 不妨设 $f(z_1,...,z_g)=s_1z_1+\cdots+s_gz_g+s_0$。记 $c=(c_1,...,c_g)$, $s=(s_1,...,s_g)$。对 $f(v)=D(\log\phi)(v)$ 积分得

$$\theta(v+tc)=e^{c\cdot st^2/2+tf(v)}\theta(v) \tag{23}$$

如同 (21) 的推导那样可得 $tc\in\Lambda^{\perp}$ 对任意 $t\in\mathbb{C}$ 成立, 故只能有 $c=0$。证毕。

命题 3 是复流形的小平嵌入定理 (参看 [GH, p.181]) 的特例, 我们采用上面的证明方法是由于小平嵌入定理的证明更难些。

推论 1. 一个复环面 $X=V/\Lambda$ ($V\cong\mathbb{C}^g$) 是射影的当且仅当它有一个黎曼型, 即 V 上的正定埃尔米特型 H, 使得 $E=\mathrm{Im}H$ 是实交错型, 且 E 在 $\Lambda\times\Lambda$ 上取整数值。

这就是复环面为阿贝尔簇的莱夫谢茨条件。

对任意格 Λ, 显然 $\hat{\Lambda}\subset Hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})\cong\mathbb{C}^g$ 为格, 称 $\mathbb{C}^g/\hat{\Lambda}$ 为复环面 $X=\mathbb{C}^g/\Lambda$ 的对偶, 记为 $\hat{X}$。若 X 是阿贝尔簇, 则易见 Λ 上的黎曼型诱导 $\hat{\Lambda}$ 上的黎曼型, 且可将 $\hat{\Lambda}$ 与 $\Lambda^{\perp}$ 等同起来, 这就给出一个同态 $X\to\hat{X}$, 称为 X 的一个极化。因此, 一个极化等价于一个黎曼型。注意极化的次数等于 $\det E$, 是一个平方数。1 次极化称为主极化。

对椭圆曲线 E, 任意一点 $P\in E$ 给出的直线从 $L(P)$ 都是丰富的, 从而给出主极化, 且 $L(3P)$ 给出闭嵌入 $E\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$。

第 VIII 章　丢多涅模

特征 $p>0$ 的域上的群概形的结构远比特征 0 的情形复杂, 有很多现象是特征 0 的情形所没有的, 因此它的研究有相当高的难度。对于特征 p 的完全域上的有限交换群概形 (特别是无穷小群), 这可以转化为丢多涅模的研究。

我们知道, 一个域 k 上的有限交换群概形的范畴 $\mathfrak{Ab}_{0k}$ 是一个小阿贝尔范畴 (推论 VI.1.2), 而任意小阿贝尔范畴可以嵌入某个环 R 上的模范畴 $\mathfrak{M}_R$ 作为全子范畴 (参看 [Fr])。但要找到一个合适的环 R 并不容易, 而且一般说来嵌入并不是范畴等价。经过 Gabriel 等学者的艰难探索, 发现对任一特征 p 的完全域 k 有一个 (通常是非交换的) 环 R, 使得 k 上的次数为 p 的幂的有限交换群概形等价于 R 上的一个阿廷模, 即所谓"丢多涅模"。此后丢多涅模就成为研究有限交换群概形的基本工具, 更准确地说, 对特征 p 的域上的交换群概形的研究几乎全部转化成对丢多涅模的研究。

但是在很长的一段时间内, 丢多涅模理论的建立方法都相当不直接。大致来说有两种方法: 一种方法是首先对"p-可除群"建立丢多涅模理论，然后说明任何有限交换群概形可以嵌入到某个 p-可除群中作为闭子群概形 (参看 [dJ] 或 [Laz]); 另外一种方法是采用晶体上同调理论 (参看 [BBM] 或 [Me])。这两种方法都不很简单。

另一方面，对于域 k 上的有限交换群概形 G 使得 G 和 G^D 都是无穷小的, 丢多涅模可以简单地定义，即定义为 $Hom_k(G,\mathcal{W})$, 其中 $\mathcal{W}$ 为 k 上的"维特概形" (见下文)。然而，丢多涅模函子的忠实性的证明却仍是相当不直接和不简单 (参看 [dJ]), 直到最近才有了简单直接的证明 (见下文, 参看 [P] 和 [CL])。

第 1 节　交换形式群

1. 交换形式群与 p-可除群

设 S 为诺特概形。如同 II.1 节, 以下我们用 $\mathfrak{Ab}_{0S}$ 记所有 S 上有限

平坦交换群概形的范畴。以下固定一个素数 p, 记 $\mathfrak{Ab}_{1S} \subset \mathfrak{Ab}_{0S}$ 为所有次数为 p 的幂的群概形组成的子范畴。在 $\mathfrak{Ab}_{1S}$ 中可以定义“形式直极限”

$$G = \varinjlim_n G_n \tag{1}$$

其意义是 $\mathfrak{Ab}_{1S}$ 中的一列单同态 $G_m \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_n \hookrightarrow G_{n+1} \hookrightarrow \cdots$ ($m \geqslant 0$ 可任取而不改变 G), 满足条件

$$G_n \cong G_{n+1}[p^n] \quad (\forall n \geqslant m) \tag{2}$$

称 G 为交换形式群 (commutative formal group)。注意由 (2) 有 $G_n = G_n[p^n]$ ($\forall n$)。若 $G' = \varinjlim_n G'_n$ 是另一个交换形式群, 一个同态 $f : G \to G'$ 是指一组 S-群概形同态 $f_n : G_n \to G'_n$ ($\forall n \gg 0$), 使得下图交换 ($\forall n \gg 0$)

$$\begin{array}{ccc} G_n & \longrightarrow & G_{n+1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} \\ G'_n & \longrightarrow & G'_{n+1} \end{array} \tag{3}$$

记 $\mathfrak{Ab}_S$ 为所有交换形式群组成的范畴, 易见它是加性范畴。易见若每个 f_n 是单同态, 则 f 为 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的单射。若对每个 n, 存在 $N \geqslant n$ 使得对任意 $r \geqslant N$, $f_r^{-1}(G'_n) \to G'_n$ 是忠实平坦的, 则称 f 为强满同态, 易见强满同态是 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的满射。

特别地, 对任意交换形式群 G 可以定义自同态 $p_G = p\cdot : G \to G$, 注意 $p\cdot$ 是典范的, 故与任意同态交换。如果 p_G 是强满同态, 则称 G 为 p-可除群 (p-divisible group)。注意 $p_{G_{n+r}}^{-1}(G_n) = G_{n+1}$ ($\forall r > 0, n \gg 0$), 故 G 为 p-可除群当且仅当每个 $p\cdot : G_{n+1} \to G_n$ 是强满同态 ($\forall n \gg 0$)。如果每个 G_n 是无穷小的 ($\forall n \gg 0$), 则称 G 是无穷小的。

注 1. 若 $S = \operatorname{Spec} k$, k 为域, 则可在 G 的定义中取 $m = 0$, 而在同态的定义中相应地改为 $f_n : G_n \to G'_n$ ($\forall n$)。

若 G 为 p-可除群, 则对任意 $i \geqslant 0$, 取充分大的 n, $p^i_{G_n}$ 诱导忠实平坦同态 $G_n \to G_{n-i}$, 故可定义 $G_i = \ker(p^i_{G_n})$, 从而也可在 G 的定义中取 $m = 0$。

任意 $H \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1S})$ 可以看作 $\mathfrak{Ab}_S$ 的对象, 即对充分大的 n 令 $G_n = H$, 这样就将 $\mathfrak{Ab}_{1S}$ 看作 $\mathfrak{Ab}_S$ 的子范畴。

例 1. 设 k 为域而 $G=(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_k$, 则 G 可看作 $S=\operatorname{Spec}k$ 上的交换形式群 (即令 $G_n=G[p^n]$)。它是 p-可除群。

例 2. 对 S 上的任意阿贝尔概形 X 定义

$$\varphi_p X \ := \ \varinjlim_i (X[p^i]) \tag{4}$$

它是一个 p-可除群, 称为 X 的巴索蒂-泰特群。

对于一个交换形式群 (1), 由 (2) 用归纳法得

$$G_n \cong G_{n+r}[p^n] \quad (\forall n \geqslant m, r \geqslant 0) \tag{5}$$

注意 $p^n_{G_{n+r}}$ 经过 $G_{n+r}[p^r]=G_r$, 从而 $p^n_{G_{n+r}}$ 诱导闭嵌入

$$\bar{p}^n_{G_{n+r}} : G_{n+r}/G_n \hookrightarrow G_r \tag{6}$$

将 G_{n+r}/G_n 等同于 G_r 的一个 S-平坦闭子群概形。再注意 $p^{n+1}_{G_{n+r+1}}$ 经过 G_{n+r}, 可见

$$\operatorname{im}(\bar{p}^{n+1}_{G_{n+r+1}}) \subset \operatorname{im}(\bar{p}^n_{G_{n+r}}) \subset G_r \tag{7}$$

由于 $G_r \to S$ 的次数有限, 而由 (7) 可见 $\operatorname{im}(\bar{p}^n_{G_{n+r}}) \to S$ 的次数随 n 递减, 故对充分大的 n, (7) 中的左包含关系为等号, 换言之 $p_{G_{n+r+1}}$ 诱导的同态 $G_{n+r+1}/G_{n+1} \to G_{n+r}/G_n$ 是同构。令 $G'_r=\operatorname{im}(\bar{p}^n_{G_{n+r}})$ $(n \gg 0)$, 则由 $G_{n+r} \subset G_{n+r+1}$ 可见 $G'_r \subset G'_{r+1}$; 再注意 $G_{n+r+1} \to G'_{r+1} \xrightarrow{p^r\cdot} G'_{r+1}$ 由 $p^{n+r}_{G_{n+r+1}}$ 诱导, 可见其核为 G_{n+r}, 故 $G'_{r+1} \xrightarrow{p^r\cdot} G'_{r+1}$ 的核为 $G_{n+r}/G_n \cong G'_r$, 换言之 $G'_{r+1}[p^r]=G'_r$, 这说明 $G' := \varinjlim_n G'_n$ 也是交换形式群。另一方面, 由上所述可见 $p\cdot : G'_{r+1} \to G'_r$ 是强满同态, 故 G' 是 p-可除群。对充分大的 n 有

$$G_{n+r}/G_n \cong G'_r, \quad G_{n+r+1}/G_{n+r} \cong G'_1 \cong G'_{r+1}/G'_r \tag{8}$$

故 $G_{n+r+1}/G_n \cong G'_{r+1}$, 从而由归纳法可见对任意 $s \geqslant r$ 均有 $G_{n+s}/G_n \cong G'_s$, 这说明 $\ker(p^n_G)=G_n$; 由此还可见 $\operatorname{im}(p^n_G)$ 除有限多项外都与 G' 相同, 这可以表达为短正合列

$$0 \to G_n \to G \to G' \to 0 \tag{9}$$

取定这样一个 n, 注意下面的交换图中的行都是正合的 $(\forall r, s \geqslant n)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to G'_s & \longrightarrow & G'_{s+r} & \xrightarrow{\bar{p}^s} & G'_r & \to 0 \\ \downarrow i_s & & \downarrow j_{s+r} & & \downarrow j_r & \\ 0 \to G_s & \longrightarrow & G_{n+s+r} & \xrightarrow{\bar{p}^s} & G_{n+r} & \end{array} \tag{10}$$

(其中 i_s, j_r, j_{s+r} 为嵌入), 由蛇形引理 (习题 1) 可见诱导同态 $\mathrm{coker}(i_s) \to \mathrm{coker}(j_{s+r})$ 是单射; 但 j_{s+r} 经过 G_{s+r}, 故 $\mathrm{coker}(i_s) \to \mathrm{coker}(i_{s+r})$ 是单射。由于 $\mathrm{im}(j_{s+r}) = \mathrm{im}(p^n_{G_{n+s+r}})$, 有

$$\begin{aligned} \deg(\mathrm{coker}(i_s)/S) \leqslant \deg(\mathrm{coker}(p^n_{G_{n+s}})/S) = \deg(\ker(p^n_{G_{n+s}})/S) \\ = \deg(G_n/S) \end{aligned} \tag{11}$$

这说明 $\mathrm{coker}(i_s)$ 的次数有上界, 因此对充分大的 s, $\mathrm{coker}(i_s) \to \mathrm{coker}(i_{s+r})$ 是同构。令 $C = \mathrm{coker}(i_s)$ $(s \gg 0)$, 则 C 给出的交换形式群是 p^n_G 的余核 $(\forall n \gg 0)$, 同时也是嵌入 $i : G' \to G$ 的余核, 这可以表达为短正合列

$$0 \to G' \to G \to C \to 0 \tag{12}$$

对充分大的 n, 投射 $G_n \to C$ 是忠实平坦同态, 故 $f = i_{G_n} + i_{G'} : G_n \times_S G' \to G$ 是强满同态, 且易见 $\ker(f)$ 是有限平坦的。总之有

引理 1. 设 $G = \varinjlim_n G_n \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_S)$。

i) 对充分大的 n, p^n_G 有有限平坦的核 (即 G_n) 及余核。

ii) 对充分大的 n, $G' = \mathrm{im}(p^n_G) \subset G$ 为典范的 p-可除子群, 且与 n 无关, 而嵌入 $G' \to G$ 有有限平坦余核, 它典范同构于 p^n_G 的余核。

iii) 对充分大的 n, $f = i_{G_n} + i_{G'} : G_n \times_S G' \to G$ 是强满同态, 而 $H_n = \ker(f)$ 是有限平坦的, 故有 $G \cong (G_n \times_S G')/H_n$。因此, 任一交换形式群同构于一个有限平坦群概形与一个 p-可除群的直积模一个有限平坦子群概形的商。

一个同态 $f : H \to G$ 称为**强单同态**, 如果 $f_n : H_n \to G_n$ 是闭嵌入 $(\forall n \gg 0)$ 且诱导同态 $\bar{f} : H/H' \to G/G'$ 的像在 S 上平坦。易见强单同态是 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的单射。

一个 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的同态称为 同源, 如果它有有限平坦的核及余核。引理 1 说明对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_S)$, p_G 是同源。对于任意 $G, H \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_S)$, 若存在同源 $H \to G$, 则称 H 与 G 是 同源的。引理 1 说明任一交换形式群同源于一个 p-可除群。

引理 2. 设 $f : H \to G$ 为 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的同态, 其中 G 是 p-可除群。

i) 若对充分大的 n, $\bar{H}_n = \mathrm{im}(f_n)$ 在 S 上平坦, 且 $Q_n = G_n/\bar{H}_n$ 在 S 上的次数一致有界, 则 f 是强满同态。此时若 $\ker(f)$ 有限则 f 是同源, 且若 H 也是 p-可除群而 $p^r\ker(f) = 0$ 则 p_H^r 经过 G, 从而给出一个同源 $G \to H$。

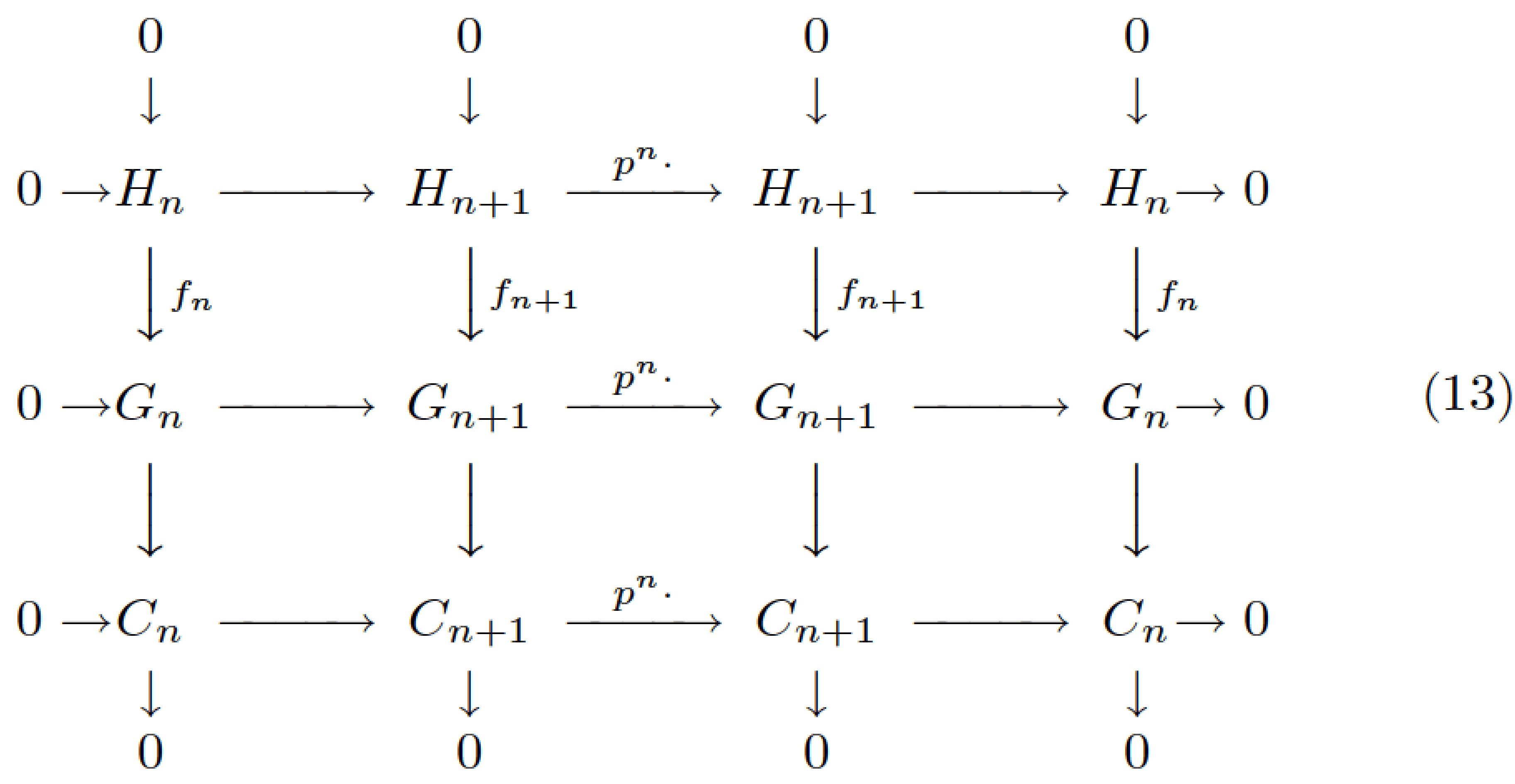
ii) 若 f 是强单同态, 则 (在 $\mathfrak{Ab}_S$ 中) $\mathrm{coker}(f)$ 存在且为 p-可除群。

iii) 在 $\mathfrak{Ab}_S$ 中任意强满同态有核, 且为核的余核, 而核是强单同态。

iv) 设 $g : E \to F$为 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的同态使得 $g_n : E_n \to F_n$ 为闭嵌入 $(\forall n \gg 0)$, 则 g 有余核且为余核的核当且仅当它是强单同态(参看习题 3)。

证. i) 由 $\deg(Q_n/S)$ 一致有界可见存在 $r > 0$ 使得 $p^r G_n \subset \bar{H}_n$ $(\forall n \gg 0)$, 故由 G 是 p-可除群有 $G_n = p^r G_{n+r} \subset \bar{H}_{n+r}$。由 $\bar{H}_n \to S$ 平坦可见投射 $H_n \to \bar{H}_n$ 忠实平坦, 故 $f_{n+r}^{-1}(G_n) \to G_n$ 忠实平坦。后两个断言是显然的。

ii) 先考虑 H 也是 p-可除群的情形, 记 $C_n = \mathrm{coker}(f_n)$ $(\forall n)$, 注意交换图



中的各列与前两行都是正合的, 由蛇形引理 (习题 1) 不难得到第三行也是正合的, 从而 $C = \varinjlim_n C_n$ 是 p-可除群。

对于一般的 H, 令 $H' \subset H$ 为引理 1 给出的 p-可除子群, 由上所述有 p-可除群 $C' = G/H'$, 而由引理 1 有有限平坦群概形 $D = H/H'$, 注意 D 可看作 C' 的有限平坦交换形式子群, 对充分大的 n 有 $D \subset C'_n$, 我们先来证明 $\mathrm{coker}(D \to C')$ 存在。取 r 使得 $D[p^r] = 0$, 对 $n \gg 0$ 令 $D_n = (p^n_{G_{n+r}})^{-1}(D) \subset G_{n+r}$, 则有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to G_n & \longrightarrow & D_n & \longrightarrow & D \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to G_{n+1} & \longrightarrow & D_{n+1} & \longrightarrow & D \to 0 \\
\downarrow{\scriptstyle p^n_{G_{n+1}}} & & \downarrow{\scriptstyle p^n_{D_{n+1}}} & & \downarrow{\scriptstyle p^n_D} \\
0 \to G_{n+1} & \longrightarrow & D_{n+1} & \longrightarrow & D \to 0
\end{array} \tag{14}$$

其中的行都是正合的, 左右两列也是正合的。令 $K = \ker(p^n_{D_{n+1}})$, 则 $D_n \hookrightarrow D_{n+1}$ 经过 K, 故 $D_n \to D$ 经过 K, 从而 $D_n/G_n \to D$ 经过 K/G_n, 这给出 $K/G_n \to D$ 的一个截口, 由蛇形引理 (习题 1)可见 $K = D_n$, 即 (14) 的中间一列也正合。令 $E_n = D_n/D$ $(\forall n \gg 0)$, 则由 (14) 中的正合性有 $\ker(p^n_{E_{n+1}}) = E_n$, 从而 $E = \varinjlim_n E_n$ 是交换形式群。易见 E 为 $D \to C'$ 的余核, 且为 p-可除群。由此不难验证 C'/D 为 $H \to G$ 的余核。

iii) 设 $g : E \to F$ 为 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的同态, 令 $g' : E' \to F'$ 为 g 诱导的典范 p-可除子群同态 (引理 1)。

设 g 是强满同态, 由定义存在 $N \geqslant m$ 使得对 $n > N$, 投射 $q_n : g_n^{-1}(F_m) \to F_m$ 忠实平坦, 从而 $\ker(q_n)$ 在 S 上平坦。注意 $g_n^{-1}(F_m)$ 是 $g_n : E_n \to F_n$ 与嵌入 $F_m \hookrightarrow F_n$ 的拉回, 可见 $\ker(g_n) \cong \ker(q_n)$, 这说明 $K_n = \ker(g_n)$ 在 S 上平坦 $(\forall n > N)$。易见 $K_{n+1}[p^n] = K_n \cap E_n = E_{n+1}[n]$, 故 $K = \varinjlim_n K_n$ 是交换形式群, 显然 K 为 g 的核, 且 g 为 $K \to E$ 的余核。

iv) 若 g 是强单同态则 g' 是强单同态, 从而由 ii) 可知 $C' = \mathrm{coker}(g')$ 存在且为 p-可除群。令 $D = \mathrm{coker}(F' \to F)$ (为有限群概形), $C_n = F_n/E'_n$, 则由 ii) 的证明可见对 $n \gg 0$ 有正合列

$$0 \to C'_n \to C_n \to D \to 0 \tag{15}$$

取 r 使得 $D[p^r]=0$, 则由 (15) 可见 $p^r_{C_{n+r}}$ 经过 C'_n。故 $(p^r_{C_{n+r}})^D$ 经过 C'^D_n, 而 $C'^D_n \to C^D_{n+r} \to C'^D_{n+r}$ 是闭嵌入, 故 $C'^D_n \to C^D_{n+r}$ 是闭嵌入, 从而 $p^r\cdot : C_{n+r} \to C'_n$ 忠实平坦, 这说明 $\ker(p^r_{C_{n+r}})$ 在 S 上平坦。由 (15) 易见 $C_{n+n'}[p^n]=C_n$ ($\forall n,n'\gg 0$), 故 $C=\varinjlim_n C_n$ 是交换形式群, 易见它是 $E'\to F$ 的余核 (且 E' 为余核的核)。

由此易见 $E\to F$ 有余核当且仅当 $E/E'\to F/E'$ 有余核, 这就约化为 E 有限的情形。此时若 g 有余核 C 且为余核的核, 则易见 $F'\to C'$ 是同源, 从而 $\ker(E\to F/F')=\ker(F'\to C')\subset E$ 是 S-平坦的; 反之, 若 $E_0=\ker(E\to F/F')$ 是 S-平坦的, 则 $E_0\subset F'$, 而由 ii) 可知 F'/E_0 是 p-可除群, 且由上面的讨论方法可见 $E_0\to F$ 有余核, 这样就约化为 $E_0=0$ 的情形, 而在这种情形易见 $(F_{n+1}/E)[p^n]=F_n/E$, 从而 $\varinjlim_n F_n/E$ 是交换形式群。证毕。

由引理 1 和理 2 不难得到 (参看习题 Ⅶ.2.3)

推论 1. 设 $f:H\to G$ 为 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的同态, $f':H'\to G'$ 为 f 诱导的典范 p-可除子群的同态, 则 f 是同源当且仅当 f' 是同源。同源是一个等价关系。

2. 塞尔对偶

设 G 是 p-可除群, 则对任意 n, $p_{G_{n+1}}$ 诱导满同态 $G_{n+1}\to G_n$ 且其核为 G_1, 故有正合列

$$0\to G_1\to G\xrightarrow{p_G} G\to 0 \tag{1}$$

而 $p^n_{G_{n+1}}$ 的像为 G_1, 故其余核为 $G_{n+1}/G_1\cong G_n$, 换言之有正合列

$$G_{n+1}\xrightarrow{p^n_{G_{n+1}}} G_{n+1}\to G_n\to 0 \tag{2}$$

而投射 $G_{n+1}\to G_n$ 的卡迪耶对偶 $G^D_n\to G^D_{n+1}$ ($\forall n$) 是单同态, 由 (2) 的对偶可见这给出一个交换形式群

$$G^t=\varinjlim_n G^D_n \tag{3}$$

称为 G 的 塞尔对偶。易见有正合列

$$0 \to G_1 \to G_{n+1} \xrightarrow{p_{G_{n+1}}} G_{n+1} \xrightarrow{q_n} G_1 \to 0 \tag{4}$$

其中 q_n 由 $p^n_{G_{n+1}} : G_{n+1} \to G_{n+1}$ 诱导。取卡迪耶对偶得正合列

$$0 \to G_1^D \to G_{n+1}^D \xrightarrow{p^D_{G_{n+1}}} G_{n+1}^D \to G_1^D \to 0 \tag{5}$$

由此可见 $p^D_{G_{n+1}}$ 诱导的 $G^D_{n+1} \to G^D_n$ 是忠实平坦的，故 G^t 也是 p-可除群。易见塞尔对偶是典范的，即任意 p-可除群同态 $f : G \to H$ 诱导典范同态 $f^t : H^t \to G^t$。显然有典范同构 $(G^t)^t \cong G$。总之有

命题 1. 记 $\mathfrak{Ab}_S^{p\text{-div}} \subset \mathfrak{Ab}_S$ 为所有 p-可除群组成的全子范畴，则塞尔对偶 $G \mapsto G^t$ 给出 $\mathfrak{Ab}_S^{p\text{-div}}$ 到自身的对合反等价。

例 3. 设 k 为特征 $p > 0$ 的域，而 $G = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_k$ 如例 1。不难验证 $G^t \cong \mu_{p^\infty} = \varinjlim_n \mu_{p^n}$（可以理解为 $\mathbb{G}_{m/k}$ 在单位元 1 处的形式完备化给出的形式概形 $\hat{\mathbb{G}}_{m/k}$）。

例 4. 对 S 上的任意阿贝尔概形 X，由命题 Ⅶ.2.1.ii) 可见

$$(\varphi_p X)^t \cong \varphi_p \hat{X} \tag{6}$$

在这个意义上塞尔对偶与阿贝尔概形的对偶一致。

引理 3. 设 $f : G \to H$ 为 p-可除群的同源，则有典范同构

$$\ker(f^t) \cong \ker(f)^D \tag{7}$$

证. 首先注意，若 $\deg(G_1) = p^r$，则 $\deg(G_n) = p^{nr}$ $(\forall n)$。同理存在 s 使得 $\deg(H_n) = p^{ns}$ $(\forall n)$。对充分大的 n 有 $\ker(f_n) \cong \ker(f)$，而

$$\ker(p^n_G) \subset \ker(p^n_H \circ f) = f^{-1}(\ker(p^n_H)) \tag{8}$$

故 $\deg(G_n) \leqslant \deg(H_n)\deg(\ker(f))$，从而由 n 的任意性可见 $r \leqslant s$。由于同源是等价关系，又有 $s \leqslant r$，故 $r = s$。由此得

$$\deg(\ker(f_n)) = \deg(\operatorname{coker}(f_n)) \quad (\forall n) \tag{9}$$

取 r 充分大使得 $\ker(f_r) \cong \ker(f)$, 则对任意 $m, n \geqslant r$ 有交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to G_n & \longrightarrow & G_{n+m} & \xrightarrow{p^n\cdot} & G_m \to 0 \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+m} & & \downarrow f_m \\ 0 \to H_n & \longrightarrow & H_{n+m} & \xrightarrow{p^n\cdot} & H_m \to 0 \end{array} \tag{10}$$

其中 $\ker(f_n) \cong \ker(f_{n+m}) \cong \ker(f_m) \cong \ker(f)$。再由 (9) 可见 (10) 诱导的 $\operatorname{coker}(f_{n+m}) \to \operatorname{coker}(f_m)$ 为同构。故蛇形引理 (习题 1) 给出典范同构

$$\delta_n : \ker(f) \cong \ker(f_m) \cong \operatorname{coker}(f_n) \tag{11}$$

且由 δ_n 的典范性可见 $p\cdot$ 诱导的投射 $q_{n+1} : \operatorname{coker}(f_{n+1}) \to \operatorname{coker}(f_n)$ 满足 $q_{n+1} \circ \delta_{n+1} = \delta_n$ (参看引理 VII.3.1 和蛇形引理的证明)。由卡迪耶对偶的正合性有正合列

$$0 \to \operatorname{coker}(f_n)^D \to H_n^D \to G_n^D \tag{12}$$

且与 $p\cdot$ 诱导的嵌入相容。故由 (11) 可见 (7) 成立。证毕。

注 2. 在有些文献中, 交换形式群的定义是 $\mathfrak{Ab}_{1S}$ 中的一列强满同态的形式逆极限 $G = \varprojlim_n G_n$, 使得每个 G_n 是 $p^n_{G_{n+1}}$ 的余核。由卡迪耶对偶可见这种定义与上述定义等价。在 VII.3 节就用了这样的想法。

例 5. 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域, X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇, 其 p 阶元和 0 组成的群同构于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ (其中 $0 \leqslant r \leqslant g$, 见 (VII.1.2.15)), 则 $\varphi_p(X)$ 含有一个直因子 $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_k^r$ (见例 2), 由引理 3 和例 3 可知 $\varphi_p(\hat{X})$ 含有一个直因子 $\mu_{p^\infty}^r$, 再由 X 和 $\hat{X}$ 同源可见 $\varphi_p(X)$ 也含有一个直因子 $\mu_{p^\infty}^r$。

由 VII.1 节可知, 当 X 为平常的时 $\varphi_p(X) \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_k^g \times_k \mu_{p^\infty}^g$。但当 X 非平常时 (特别是当 X 为甚特殊时) $\varphi_p(X)$ 除上述两个直因子外还有一个结构甚为复杂的直因子 (它和它的塞尔对偶都是无穷小的), 这是我们下面讨论的重点。

习题

1. 设 S 为诺特概形, 有限平坦交换 S-群概形同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H'' & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & \\ 0 \to & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \to 0 \end{array}$$

的行都是正合的, 且 f', f, f'' 的核与余核都是 S-平坦的。证明蛇形引理成立, 即有典范长正合列

$$0 \to \ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f'') \to 0$$

(提示: 注意 $K = \ker(\operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f))$ 是 S-平坦的, 为证明 δ 诱导的 $\ker(f'') \to K$ 忠实平坦, 只需在 S-纤维上验证。)

2. 设 k 为域。证明 $\mathfrak{Ab}_{0k}$ 中的一个态射是单射 (满射) 当且仅当它是闭嵌入 (忠实平坦的)。(提示: 利用引理 I.1.1 和卡迪耶对偶。)

3. 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域, E 为 k 上的超奇椭圆曲线。取定一个单同态 $\phi_0 : \alpha_p \cong \operatorname{Spec} k[x]/(x^p) \hookrightarrow E$, 其中 x 在 α_p 的 α-模中 (即满足 $m^*(x) = x \otimes_k 1 + 1 \otimes_k x$, 见 Ⅲ.4 节)。令 $S = \mathbb{A}_k^1 \cong \operatorname{Spec} k[t]$, $H = \alpha_p \times_k S \cong \operatorname{Spec} k[x,t]/(x^p)$, 由 $\psi^*(x) = tx$ 定义一个同态 $\psi \in End_S(H)$, 则易见同态 $\phi = (\phi_0 \times_k \mathrm{id}_S, \psi) : H \to E \times_k H$ 为闭嵌入, 故 $G' = \operatorname{coker}(\phi)$ 为 S-平坦射影群概形。证明对任意 $n > 0$, $G'[p^n]$ 不是 S-平坦的; 而 $\varphi_p(\phi)$ 在 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的余核为 $\operatorname{coker}(\varphi_p(\phi_0)) \times_k S$, 其核不是 $\varphi_p(\phi)$。

第 2 节　维特概形与维特环

1. 维特环

设 p 是一个素数, 则 p-进整数环 $R = \mathbb{Z}_p$ 有唯一极大理想 pR, 而 $R/pR \cong \mathbb{F}_p$。我们来看更一般的情形。

例 1. 设 $K \supset \mathbb{Q}$ 为虚二次域, 使得 p 在 K 中不分裂且无分歧 (这样的 K 总是存在的)。令 $A \subset K$ 为 K 中的整数组成的子环, 则 pA 为 A 中的素

理想, 而 $A/pA \cong \mathbb{F}_{p^2}$ 。令 $W = A \otimes \mathbb{Z}_p$, 则 W 是完备 DVR, 其极大理想为 pW 而 $W/pW \cong \mathbb{F}_{p^2}$, 我们将看到 W 在同构之下由 $\mathbb{F}_{p^2}$ 唯一决定 (即与 K 的选择无关)。

引理 1. 设 R 是一个有单位元的交换环使得 pR 是 R 的素理想。假设: i) $k = R/pR$ 是完全域; ii) R 是 p-进完备分离的, 即 $R \to \varprojlim_n R/p^nR$ 为同构。令 $\rho : R \to k$ 为投射, 则存在唯一映射 $\tau = \tau_R : k \to R$ 使得对任意 $a, b \in k$ 有 $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ (故 τ 诱导乘法群同态 $k^* = k - \{0\} \to R^* = R - pR$), 且 $\rho \circ \tau = \mathrm{id}_k : k \to k$。

证. 由于 k 是完备的, 对任意 $a \in k$ 可取 $b \in k$ 使得 $a = b^p$。任取 $b' \in R$ 使得 $\rho(b') = b$, 则 $a_1 = b'^p$ 模 p^2 由 a 唯一决定, 这是因为对 b 在 R 中的任一提升 b'' 有 $b'' = b' + pc$ (其中 $c \in R$), 从而

$$b''^p = b'^p + \sum_{i=1}^{p} p^i \binom{p}{i} b'^{p-i} c^i \equiv b'^p \pmod{p^2} \tag{1}$$

由归纳法, 对任意正整数 n, 任取 $b' \in R$ 使得 $\rho(b') = a^{p^{-n}}$, 则 $a_n = b'^{p^n}$ 模 p^{n+1} 由 a 唯一决定。此外易见 $a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^{n+1}}$。令

$$\tilde{a} = \varprojlim_n a_n \pmod{p^{n+1}} \tag{2}$$

则 $\tilde{a}$ 由 a 唯一决定。令 $\tau(a) = \tilde{a}$, 则 $\rho(\tau(a)) = a$。易见 τ 与乘法运算交换 (即对任意 $a, b \in k$ 有 $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$)。

若映射 $\tau' : k \to R$ 与乘法运算交换且 $\rho \circ \tau' = \mathrm{id}_k$, 则对任意 $a \in R$, 由 $\tau'(a) = \tau'(a^{p^{-n}})^{p^n}$ 及上面的 (1) 式可见 $\tau'(a)$ 模 p^{n+1} 由 a 唯一决定。由于 n 是任意的, 可见 $\tau'(a)$ 由 a 唯一决定。由此即得 τ 的唯一性。证毕。

引理 1 中的 τ 称为 k 到 R 的泰希米勒提升 (*Teichmüller lifting*)。注意泰希米勒提升一般**不**是环同态。

由引理 1 可见对任意 $r \in R$ 有 $r - \tau(\rho(r)) \in pR$, 故由归纳法, 存在唯一一组 $a_0, a_1, \ldots \in k$ 使得

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \tau(a_n) \tag{3}$$

特别地, R 作为一个 p-进完备环由 $\tau(k)$ 生成。

设 $a, b \in k$, 我们来计算 $\tau(a)+\tau(b)$。由引理 1 的证明可知, $\tau(a+b)$ 模 p^{n+1} 与 $(\tau(a^{p^{-n}})+\tau(b^{p^{-n}}))^{p^n}$ 同余, 特别地,

$$\begin{aligned}\tau(a+b) &\equiv (\tau(a^{1/p})+\tau(b^{1/p}))^p \\ &\equiv \tau(a)+\tau(b)+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}\tau(a^{i/p}b^{(p-i)/p}) \pmod{p^2}\end{aligned} \tag{4}$$

由此可见有 p 次齐次整系数多项式 $f_1(x,y)$ 使得

$$\tau(a)+\tau(b) \equiv \tau(a+b)+p\tau(f_1(a^{1/p},b^{1/p})) \pmod{p^2} \tag{5}$$

令 $f_0(x,y)=x+y$。由归纳法可得 p^n 次齐次整系数多项式 f_n $(\forall n>0)$ 使得

$$\tau(a)+\tau(b)=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\tau(f_n(a^{p^{-n}},b^{p^{-n}})) \tag{6}$$

这样就得到 $\tau(a)+\tau(b)$ 的一个形如 (3) 的表达式。注意 (6) 中第 n 项中有 p^n 次方根, 这启示我们, 为方便起见最好把 (3) 改为形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n\tau(a_n^{p^{-n}}) \tag{7}$$

我们将 (7) 中的和式简记为 $(a_0,a_1,\dots)$, 称为一个**维特向量**。这样 $\tau(a)$ 表示为维特向量 $(a,0,0,\dots)$, 而 $\tau(a)+\tau(b)$ 表示为维特向量 $(f_0(a,b), f_1(a,b),\dots)$。注意按这样的记法,

$$p(a_0,a_1,\dots)=(0,a_0^p,a_1^p,\dots) \tag{8}$$

而 $p(a_0,a_1,\dots)$ 等于 p 个 $(a_0,a_1,\dots)$ 的和。

设 $(a_0,a_1,\dots)$, $(b_0,b_1,\dots)$ 为两个维特向量, 我们来计算 $(a_0,a_1,\dots)+(b_0,b_1,\dots)$ (即将它表为维特向量)。令

$$w_n(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}p^ix_i^{p^{n-i}} \in \mathbb{Z}[x_0,\dots,x_n] \quad (n=0,1,\dots) \tag{9}$$

则 (7) 的前 $n+1$ 项的和为 $w_n(\tau(a_0)^{p^{-n}},\dots,\tau(a_n)^{p^{-n}})$, 即

$$(a_0,a_1,\dots)=\lim_{n\to\infty}w_n(\tau(a_0)^{p^{-n}},\dots,\tau(a_n)^{p^{-n}}) \tag{10}$$

我们需要找到 $c_0, ..., c_n, ... \in k$ 使得

$$(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = \lim_{n\to\infty} w_n(\tau(c_0)^{p^{-n}}, ..., \tau(c_n)^{p^{-n}}) \qquad (11)$$

为此需要下面的引理。

引理 2. 存在整系数多项式 $\phi_0(x_0, y_0)$, $\phi_1(x_0, y_0, x_1, y_1)$, ... , $\phi_n(x_0, y_0, ..., x_n, y_n)$, ..., 使得

$$\begin{aligned} & w_n(x_0, ..., x_n) + w_n(y_0, ..., y_n) \\ = & w_n(\phi_0(x_0, y_0), ..., \phi_n(x_0, y_0, ..., x_n, y_n)) \quad (\forall n) \end{aligned} \qquad (12)$$

而 ϕ_0, ϕ_1, ... 由 (12) 唯一决定。此外 ϕ_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 有下列性质 (分别将 $(x_0, ..., x_i)$, $(y_0, ..., y_i)$ 和 $(z_0, ..., z_i)$ 简记为 X_i, Y_i 和 Z_i, 并且将 $\phi_i(x_0, y_0, ..., x_i, y_i)$ 简记为 $\phi_i(X_i, Y_i)$, 等等):

i) 对每个 i,

$$\phi_i(X_i, Y_i) - x_i - y_i \in \mathbb{Z}[x_0, y_0, ..., x_{i-1}, y_{i-1}] \qquad (13)$$

特别地 $\phi_0(x_0, y_0) = x_0 + y_0$。

ii) 对每个 $i > 0$,

$$\phi_i(0, 0, x_0, y_0, ..., x_{i-1}, y_{i-1}) = \phi_{i-1}(x_0, y_0, ..., x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad (14)$$

iii) 所有 ϕ_i 具有余交换律

$$\phi_i(X_i, Y_i) = \phi_i(Y_i, X_i) \qquad (15)$$

和余结合律

$$\begin{aligned} & \phi_i(x_0, \phi_0(Y_0, Z_0), x_1, \phi_1(Y_1, Z_1), ..., x_i, \phi_i(Y_i, Z_i)) \\ = & \phi_i(\phi_0(X_0, Y_0), z_0, \phi_1(X_1, Y_1), z_1, ..., \phi_i(X_i, Y_i), z_i) \end{aligned} \qquad (16)$$

iv) 对 ϕ_i 的任一单项式 $cx_0^{m_0}y_0^{m'_0} \cdots x_i^{m_i}y_i^{m'_i}$ $(c \neq 0)$ 有

$$\sum_{j=0}^{i} (m_j + m'_j)p^j = p^i \qquad (17)$$

特别地, 对 $i>0$ 有 $m_0+m_0'\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$; 对 $i>1$ 有 $m_0+m_0'+p(m_1+m_1')\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^2)$, 等等。

证. 我们对 n 归纳地定义 ϕ_n 并证明 (12) 成立。当 $n=0$ 时 $\phi_0(x_0,y_0)=x_0+y_0$ 显然是唯一使 (12) 成立的多项式。

我们注意 $w_{n+1}(x_0,...,x_{n+1})=w_n(x_0^p,...,x_n^p)+p^{n+1}x_{n+1}$。设 (12) 对某个 n 成立, 要找一个 ϕ_{n+1} 使得在 (12) 中将 n 换为 $n+1$ 仍成立, 只需验证

$$w_{n+1}(x_0,...,x_{n+1})+w_{n+1}(y_0,...,y_{n+1}) \tag{18}$$

与

$$w_n(\phi_0(x_0,y_0)^p,...,\phi_n(x_0,y_0,...,x_n,y_n)^p) \tag{19}$$

的差能被 p^{n+1} 整除即可, 因为这样令这个差为 $p^{n+1}\phi_{n+1}(x_0,y_0,...,x_{n+1},y_{n+1})$ 即满足将 n 换为 $n+1$ 的 (12), 而且这显然是 ϕ_{n+1} 的唯一可能的选择。

不难验证两个简单的事实: 一是对任意整系数多项式 $f(t_1,...,t_m)$, $f(t_1,...,t_m)^p-f(t_1^p,...,t_m^p)$ 能被 p 整除; 二是二元多项式 $(x+py)^{p^m}-x^{p^m}$ 能被 p^{m+1} 整除。由此可见 (19) 与

$$w_n(\phi_0(x_0^p,y_0^p),...,\phi_n(x_0^p,y_0^p,...,x_n^p,y_n^p)) \tag{20}$$

的差能被 p^{n+1} 整除。但由归纳法假设, (18) 与 (20) 的差为 $p^{n+1}(x_{n+1}+y_{n+1})$, 故 (18) 与 (19) 的差也能被 p^{n+1} 整除。

最后, 性质 i-iv) 不难由定义验证 (习题 3)。证毕。

注意 (11) 等价于对任意 n 有

$$\begin{aligned}&w_n(\tau(a_0)^{p^{-n}},...,\tau(a_n)^{p^{-n}})+w_n(\tau(b_0)^{p^{-n}},...,\tau(b_n)^{p^{-n}})\\=\ &w_n(\tau(c_0)^{p^{-n}},...,\tau(c_n)^{p^{-n}})\end{aligned} \tag{21}$$

由引理 2, 取 $c_n=\phi_n(a_0,b_0,...,a_n,b_n)$ 即可, 换言之,

$$(a_0,a_1,...)+(b_0,b_1,...)=(\phi_0(a_0,b_0),\phi_1(a_0,b_0,a_1,b_1),...) \tag{22}$$

作为例子, 我们来计算 ϕ_1。由定义有

$$(x_0^p+px_1)+(y_0^p+py_1)=(x_0+y_0)^p+p\phi_1(x_0,y_0,x_1,y_1) \tag{23}$$

由此解得

$$\phi_1(x_0,y_0,x_1,y_1)=x_1+y_1-\sum_{j=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{j!(p-j)!}x_0^j y_0^{p-j} \tag{24}$$

类似地可以计算 $(a_0,a_1,\ldots)\cdot(b_0,b_1,\ldots)$ (即将它表为维特向量)。与引理 2 类似地有 (证明从略)

引理 3. 存在整系数多项式 $\psi_0(x_0,y_0)$, $\psi_1(x_0,y_0,x_1,y_1)$, … , $\psi_n(x_0,y_0,\ldots,x_n,y_n)$, …, 使得对任意非负整数 n 有

$$w_n(x_0,\ldots,x_n)w_n(y_0,\ldots,y_n)=w_n(\psi_0(x_0,y_0),\ldots,\psi_n(x_0,y_0,\ldots,x_n,y_n)) \tag{25}$$

而 ψ_0, ψ_1, … 由 (25) 唯一决定。此外 ψ_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ 有下列性质:

i) $\psi_0(x_0,y_0)=x_0y_0$, 而对每个 $i>0$ 有 $\psi_i(x_0,y_0,0,0,\ldots,0)=0$。
ii) 对任意 $i>0$ 有

$$\psi_i(x_0,y_0,\ldots,x_i,y_i)\equiv 0 \pmod{(x_1,\ldots,x_i,y_1,\ldots,y_i)} \tag{26}$$

iii) 所有 ψ_i 具有余交换律

$$\psi_i(X_i,Y_i)=\psi_i(Y_i,X_i) \tag{27}$$

和余结合律

$$\begin{aligned}&\psi_i(x_0,\psi_0(Y_0,Z_0),x_1,\psi_1(Y_1,Z_1),\ldots,x_i,\psi_i(Y_i,Z_i))\\=&\psi_i(\psi_0(X_0,Y_0),z_1,\psi_1(X_1,Y_1),z_2,\ldots,\psi_i(X_i,Y_i),z_i)\end{aligned} \tag{28}$$

由此可得

$$(a_0,a_1,\ldots)\cdot(b_0,b_1,\ldots)=(\psi_0(a_0,b_0),\psi_1(a_0,b_0,a_1,b_1),\ldots) \tag{29}$$

由 (22) 和 (29) 得

推论 1. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, R,R' 为完备离散赋值环, 极大理想分别为 pR 和 pR', 且 $R/pR\cong R'/pR'\cong k$, 则有唯一环同构 $f:R\to R'$ 与泰希米勒提升相容 (即 $f\circ\tau_R=\tau_{R'}$)。

因此, 对任意特征 $p>0$ 的完全域 k, 在同构之下至多有一个 (特征 0 的) 完备离散赋值环 R 使得 $R/pR\cong k$。如果这样一个环 R 存在, 则称其为 k 的维特环 (亦称维特向量环), 记为 $W(k)$。下面将看到维特环的存在性。注意由引理 1 有泰希米勒提升 $\tau:k\to W(k)$。

2. 维特概形

设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, 上面的过程启示我们: 可以构造一个 p-进完备 DVR R 使得 $R/pR\cong k$。构造的方法如下: 作为一个集合, $R=\prod_{n=0}^{\infty}k$ (即 k 上的所有无限向量 $(a_0,a_1,\ldots)$ 的集合), 而它的加法和乘法分别由 (1.22) 和 (1.29) 给出。我们来验证 R 是一个交换环, 为此需验证加法结合律, 乘法结合律和乘法分配律 (加法和乘法的交换性是显而易见的)。

命题 1. 对任一非负整数 n, 令 $A_n=\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_n]$, $\mathcal{W}_n=\mathrm{Spec}A_n$。定义 $a^*:A_n\to A_n\otimes A_n$ (其中 $A_n\otimes A_n\cong\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_n]$) 和 $m^*:A_n\to A_n\otimes A_n$ 分别为由 $a^*(x_i)=\phi_i(x_0,y_0,\ldots,x_i,y_i)$ 和 $m^*(x_i)=\psi_i(x_0,y_0,\ldots,x_i,y_i)$ 给出的环同态。则 a^* 和 m^* 给出 $\mathcal{W}_n$ 一个有单位元的交换仿射环概形结构 (即其加法 a 和乘法 m 分别由 a^* 和 m^* 给出)。此外,

i) 对任意 $m\geqslant n$, 由包含同态 $A_n\to A_m$ 给出的投射 $q_{mn}:\mathcal{W}_m\to\mathcal{W}_n$ 是环概形的忠实平坦同态;

ii) 对任意 $m\geqslant n$, 由 $x_i\mapsto x_{i-m+n}$ $(\forall i\geqslant m-n)$, $x_i\mapsto 0$ $(\forall i<m-n)$ 定义的环同态 $A_m\to A_n$ 所对应的闭嵌入 $i_{nm}:\mathcal{W}_n\hookrightarrow\mathcal{W}_m$ 是加法群概形同态;

iii) 由 $x_0\mapsto x_0$, $x_i\mapsto 0$ $(\forall i>0)$ 定义的环同态 $A_n\to A_0$ 所对应的闭嵌入 $\tau_n:\mathcal{W}_0\to\mathcal{W}_n$ 与乘法交换, 且为投射 $q_{n0}:\mathcal{W}_n\to\mathcal{W}_0$ 的截口。

证. 令 $B=A_n\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}[x_0,\ldots,x_n]$。注意 $x_i\mapsto w_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 定义一个环同态 $f:A_n\to A_n$, 使得 $f_{\mathbb{Q}}=f\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}:B\to B$ 是同构。定义环同态 $a_B^*:B\to B\otimes B\cong\mathbb{Q}[x_0,x_1,\ldots,y_0,y_1,\ldots]$ 和 $m_B^*:B\to B\otimes B$, 其中 $a_B^*(x_i)=x_i+y_i$, $m_B^*(x_i)=x_iy_i$ $(\forall i)$, 则显然 a_B^* 和 m_B^* 给出 $\mathrm{Spec}B$ 一

个有单位元的交换环概形结构。记 $a_{\mathbb{Q}}^* = a^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : B \to B \otimes B$, $m_{\mathbb{Q}}^* = m^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : B \to B \otimes B$, 则由引理 2 和引理 3 有 $a_{\mathbb{Q}}^* \circ f_{\mathbb{Q}} = (f_{\mathbb{Q}} \otimes f_{\mathbb{Q}}) \circ a_B^*$, $m_{\mathbb{Q}}^* \circ f_{\mathbb{Q}} = (f_{\mathbb{Q}} \otimes f_{\mathbb{Q}}) \circ m_B^*$, 这说明 $a_{\mathbb{Q}}^*$ 和 $m_{\mathbb{Q}}^*$ 给出 Spec$B$ 一个有单位元的交换环概形结构。由于 A_n 是 $\mathbb{Z}$-平坦的, 这就说明 a^* 和 m^* 给出的加法和乘法满足有单位元的交换环概形的所有公理。

其余断言由引理 2 和引理 3 及归纳法立得。证毕。

称形式逆极限 $\mathcal{W} = \varprojlim_n \mathcal{W}_n$ 为**维特概形** (*Witt scheme*), 称每个 $\mathcal{W}_n$ 为**截尾维特概形** (*truncated Witt scheme*), 并称 τ_n 为泰希米勒提升。注意所有投射 $q_{mn} : \mathcal{W}_m \to \mathcal{W}_n$ 合起来给出形式环概形同态 $q_n : \mathcal{W} \to \mathcal{W}_n$; 所有 $\tau_n : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}_n$ 合起来给出一个提升 $\tau : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}$, 也称为泰希米勒提升; 而 $\mathcal{W}_0$ 同构于 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ 的环概形结构。

对任意 $n > 0$, 由定义显然有

$$w_n(0, x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} p^i x_i^{p^{n-i}} = pw_{n-1}(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n] \qquad (1)$$

将此代入 (1.12), 由引理 2 得

$$\phi_i(0, 0, x_1, y_1, ..., x_i, y_i) = \phi_{i-1}(x_1, y_1, ..., x_i, y_i) \quad (\forall i > 0) \qquad (2)$$

类似地, 由引理 3 得

$$\psi_i(0, y_0, x_1, y_1, ..., x_i, y_i) = \psi_{i-1}(x_1, y_0, x_2, y_1, ..., x_i, y_{i-1}) \quad (\forall i > 0) \quad (3)$$

由 (2) 可见由

$$V_n^* x_0 = 0, \; V_n^* x_i = x_{i-1} \; (\forall i > 0) \qquad (4)$$

所定义的态射 $V_n : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$ 为 (加法) 群概形的自同态, 且经过闭嵌入 $\mathcal{W}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{W}_n$, 而由 (3) 可见 V_n 的象为 $\mathcal{W}_n$ 的理想子概形。易见有正合列

$$0 \to \mathcal{W}_0 \xrightarrow{i_{0n}} \mathcal{W}_n \xrightarrow{V_n} \mathcal{W}_n \xrightarrow{q_{n0}} \mathcal{W}_0 \to 0 \qquad (5)$$

注意 V_n 对所有 n 是一致的, 所以给出形式加法群概形自同态 $V : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, 其象为 $\mathcal{W}$ 的形式理想子概形, 而余核同构于 $\mathcal{W}_0$。称 V_n 和 V 分别为 $\mathcal{W}_n$ 和 $\mathcal{W}$ 的**移位态射** (Verschiebung)。

简记 $p_W = p_{\mathcal{W}_n} : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$。注意在命题 1 的证明中 $f_{\mathbb{Q}}$ 给出环概形的同构, 可见

$$p_W^*(w_i) = p_W^*(f_{\mathbb{Q}}(x_i)) = f_{\mathbb{Q}}(px_i) = pf_{\mathbb{Q}}(x_i) = pw_i \quad (\forall i) \tag{6}$$

代入 w_i 的定义 (即 (1.9)) 得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{i} p^j (p_W^* x_j)^{p^{i-j}} &= w_i(p_W^* x_0, ..., p_W^* x_i) = (p_W^* w_i)(x_0, ..., x_i) \\ &= pw_i(x_0, ..., x_i) = \sum_{j=1}^{i+1} p^j x_{j-1}^{p^{i-j+1}}\end{aligned} \tag{7}$$

由此可以归纳地得到

$$p_{\mathcal{W}_n}^* x_0 = px_0, \quad p_{\mathcal{W}_n}^* x_1 = (1 - p^{p-1})x_0^p + px_1, \ \ldots \tag{8}$$

我们来验证

$$p_{\mathcal{W}_n}^* x_i \equiv x_{i-1}^p \pmod p \quad (\forall i > 0) \tag{9}$$

对 i 用归纳法, $i = 1$ 的情形由 (8) 可见。设 $i > 1$, 则由归纳法假设, 对任意 $0 < j < i$, 存在 $y_j \in \mathbb{Z}[x_0, ..., x_j]$ 使得 $p_W^*(x_j) = x_{j-1}^p + py_j$, 由此易见 $(p_W^* x_j)^{p^{i-j}} \equiv x_{j-1}^{p^{i-j+1}} \pmod{p^{i-j+1}}$, 代入 (7) 得

$$\begin{aligned}p^i p_W^* x_i &= -p^{p^i} x_0^{p^i} + \sum_{j=1}^{i-1} p^j (x_{j-1}^{p^{i-j+1}} - (p_W^* x_j)^{p^{i-j}}) + p^i x_{i-1}^p + p^{i+1} x_i \\ &\equiv p^i x_{i-1}^p \pmod{p^{i+1}}\end{aligned} \tag{10}$$

由此即得 (9)。

我们来计算 $\mathcal{W}_n$ 作为加法群概形的李代数。如取坐标 w_i $(i = 0, 1, ...)$, 显然有左不变向量场 $\frac{\partial}{\partial w_i}$ $(i = 0, 1, ...)$。注意

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=i}^{n} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial w_j} = \sum_{j=i}^{n} p^j x_i^{p^{j-i}-1} \frac{\partial}{\partial w_j} \tag{11}$$

由此得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & px_0^{p-1} & p^2 x_0^{p^2-1} & \cdots & p^n x_0^{p^n-1} \\ 0 & p & p^2 x_1^{p-1} & \cdots & p^n x_1^{p^{n-1}-1} \\ 0 & 0 & p^2 & \cdots & p^n x_2^{p^{n-2}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_0} \\ \frac{\partial}{\partial w_1} \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w_n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

令

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0^{p-1} & x_0^{p^2-1} & \cdots & x_0^{p^n-1} \\ 0 & 1 & x_1^{p-1} & \cdots & x_1^{p^{n-1}-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & x_2^{p^{n-2}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

则 (12) 右边的方阵为 $T_n\mathrm{diag}(1, p, ..., p^n)$。我们所要得到的向量场须是定义在 $\mathbb{Z}$ 上且不能被 p 整除的, 故可取为 $\mathrm{diag}(1, p, ..., p^n)^t(\frac{\partial}{\partial w_0}, ..., \frac{\partial}{\partial w_n}) = T_n^{-1t}(\frac{\partial}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ 的分量, 即为

$$\frac{\partial}{\partial x_n},\ \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} - x_{n-1}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_n},\ \dots \tag{14}$$

总之有

命题 2. 关于维特概形有下列事实。

i) 对任意 n, 由 (4) 定义的移位态射 $V_n : \mathcal{W}_n \to \mathcal{W}_n$ 为 (加法) 群概形的自同态; 其象为 $i_{(n-1)n}(\mathcal{W}_{n-1})$, 是 $\mathcal{W}_n$ 的理想子概形; 核为 $i_{0n}(\mathcal{W}_0)$; 余核同构于 $\mathcal{W}_0$。

ii) 所有 V_n 合起来给出 $\mathcal{W}$ 的移位态射 $V : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, 为形式加法群概形自同态; 其象为 $\mathcal{W}$ 的形式理想子概形, 而余核同构于 $\mathcal{W}_0$。

iii) 对任意 n, (8) 和 (9) 成立。

iv) 对任意 n, $\mathcal{W}_n$ 作为加法群概形的李代数有生成元组 (14)。

注意对任意有单位元的交换环 R, 一个态射 $\mathrm{Spec}R \to \mathcal{W}_n$ 等价于一个向量 $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $(a_i \in R)$, 由命题 1 和命题 2 立得

推论 2. 对任意有单位元的交换环 R, 记 $W_n(R) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}R \to \mathcal{W}_n)$, $W(R) = \varprojlim_n W_n(R)$, 在 $W(R)$ 中按 (1.22) 和 (1.29) 定义加法和乘法, 则给出 $W(R)$ 一个有单位元的交换环结构。此外,

i) 对任意 $m \geqslant n$, $(a_0, a_1, ..., a_m) \mapsto (a_0, a_1, ..., a_n)$ 定义的投射 $q_{mnR} : W_m(R) \to W_n(R)$ 为环同态, 且 q_{mnR} $(\forall m)$ 合起来定义一个环同态 $q_{nR} : W(R) \to W_n(R)$; 而 $(a_0, a_1, ..., a_n) \mapsto (0, ..., 0, a_0, a_1, ..., a_n)$ 定义的嵌入 $i_{nmR} : W_n(R) \to W_m(R)$ 为加法群同态。

ii) 由 $a \mapsto (a, 0, ..., 0)$ 定义的嵌入 $\tau_{nR}: R \to W_n(R)$ 与乘法交换, 且所有 τ_{nR} 合起来给出的嵌入 $\tau_R: R \to W(R)$ 也与乘法交换。

iii) 由 $(a_0, a_1, ..., a_n) \mapsto (0, a_0, ..., a_{n-1})$ 定义的映射 $V_{nR}: W_n(R) \to W_n(R)$ 为加法群自同态; 其象为 $i_{(n-1)nR}(W_{n-1}(R))$, 是 $W_n(R)$ 的理想; 核为 $i_{0nR}(W_0(R))$; 余核同构于 $W_0(R)$。

iv) 所有 V_{nR} 合起来给出的映射 $V_R: W(R) \to W(R)$ 为加法群自同态; 其象为 $W(R)$ 的理想, 而余核同构于 $W_0(R)$。

称 $W(R)$ 为 R 的*维特向量环*, 其中的元称为 R 上的*维特向量*; 而称 $W_n(R)$ 为一个*截尾维特向量环*, 其中的元称为 R 上的*截尾维特向量*。称 τ_{nR} 和 τ_R 分别为 $W_n(R)$ 和 $W(R)$ 的泰希米勒提升; 称 V_{nR} 和 V_R 分别为 $W_n(R)$ 和 $W(R)$ 的移位同态。

下面考虑特征 $p > 0$ 的情形, 注意 $\mathcal{W}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 为 $\mathbb{F}_p$ 上的一个有单位元的交换仿射环概形, 为方便起见我们滥用记号, 将它仍记为 $\mathcal{W}_n$, 并仍称为截尾维特概形。由 (9)$\otimes\mathbb{F}_p$ 得到

$$p^*_{\mathcal{W}_n} x_0 = 0, \quad p^*_{\mathcal{W}_n} x_i = x^p_{i-1} \quad (0 < i \leqslant n) \tag{15}$$

再由 V 的定义 (即 (4)) 得

$$p_{\mathcal{W}_n} = F_{\mathcal{W}_n/\mathbb{F}_p} \circ V = V \circ F_{\mathcal{W}_n/\mathbb{F}_p} \tag{16}$$

总之有 (参看 [M2, Lecture 26])

推论 3. 对任意 n 简记 $\mathcal{W}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 为 $\mathcal{W}_n$, 则 (15) 和 (16) 成立。

设 k 为特征 p 的完全域, $\sigma: k \to k$ 为夫罗贝纽斯同态 (即 $a \mapsto a^p$), 则 σ 诱导 $W(k)$ 的一个自同构 $(a_0, a_1, ...) \mapsto (a_0^p, a_1^p, ...)$, 也记为 σ (即记 $(a_0, a_1, ...)^\sigma = (a_0^p, a_1^p, ...)$) 并称为 $W(k)$ 的夫罗贝纽斯。而 $\mathcal{W}_n$ 的移位态射给出加法群自同态 $(a_0, a_1, ...) \mapsto (0, a_0, a_1, ...)$, 称为移位同态。由 (7) 或 (15) 可见 $p(a_0, a_1, ...) = (0, a_0^p, a_1^p, ...)$, 故投射 $W(k) \to W_0(k) \cong k$ 的核为 $pW(k)$, 由此立见 $W(k)$ 为 p-进完备离散赋值环, 从而是 k 的维特环。

推论 4. 任一特征 p 的完全域 k 有维特环 $W(k)$, 它可以刻画为所有维特向量 $(a_0, a_1, ...)$ $(a_i \in k)$ 组成的环, 其加法和乘法分别由 (1.22) 和

(1.29) 给出。此外, k 的夫罗贝纽斯可以 (唯一地) 提升为 $W(k)$ 的自同构 $(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (a_0^p, a_1^p, \ldots)$, 而 $p(a_0, a_1, \ldots) = (0, a_0^p, a_1^p, \ldots)$。

以下在没有疑问时都将 $\mathcal{W}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 简记为 $\mathcal{W}_n$, 并对任意 $m \geqslant 0$ 记 $\mathcal{W}_{n,m} = \mathcal{W}_n[F^{m+1}_{\mathcal{W}_n/\mathbb{F}_p}]$。作为概形,

$$\mathcal{W}_{n,m} \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x_0, \ldots, x_n]/(x_0^{p^{m+1}}, \ldots, x_n^{p^{m+1}})) \tag{17}$$

若固定一个特征 p 的域 k, 则记 $W_n = \mathcal{W}_n \otimes k$, $W_{n,m} = \mathcal{W}_{n,m} \otimes k$ $(\forall m \geqslant 0)$, 注意每个 $W_{n,m}$ 为有限交换群概形, $W_{0,0} \cong \alpha_p$, 且 $W_{n,m}$ 可以看作 $W_{n+1,m}$ 或 $W_{n,m+1}$ 的闭子群概形。

引理 4. 对任意 $m, n \geqslant 0$, V_n 所诱导的群概形自同态 $V_{n,m} : W_{n,m} \to W_{n,m}$ 等于 $V_{W_{n,m}/k}$。

证. 只需考虑 $k = \mathbb{F}_p$ 的情形。注意 $F_{W_{n,m+1}/\mathbb{F}_p}$ 经过 $W_{n,m}$, 诱导忠实平坦同态 $q_m : W_{n,m+1} \to W_{n,m}$, 它和嵌入 $i_m : W_{n,m} \to W_{n,m+1}$ 的合成等于 $F_{W_{n,m+1}/\mathbb{F}_p}$。由 (16) 有

$$V_{n,m+1} \circ F_{W_{n,m+1}/\mathbb{F}_p} = p_{W_{n,m+1}} \tag{18}$$

由交换图

$$\begin{array}{ccccc}
W_{n,m+1} & \xrightarrow{q_m} & W_{n,m} & \xrightarrow{V_{n,m}} & W_{n,m} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle i_m} & & \downarrow{\scriptstyle i_m} \\
W_{n,m+1} & \xrightarrow{F_{W_{n,m+1}/\mathbb{F}_p}} & W_{n,m+1} & \xrightarrow{V_{n,m+1}} & W_{n,m+1}
\end{array} \tag{19}$$

可见

$$i_m \circ V_{n,m} \circ q_m = p_{W_{n,m+1}} \tag{20}$$

另一方面, 由引理 II.1.4 有

$$V_{W_{n,m}/\mathbb{F}_p} \circ F_{W_{n,m}/\mathbb{F}_p} = p_{W_{n,m}} \tag{21}$$

故类似地有

$$i_m \circ V_{W_{n,m}/\mathbb{F}_p} \circ q_m = p_{W_{n,m+1}} \tag{22}$$

比较 (20) 与 (22), 注意 i_m 是单射而 q_m 是满射, 可见 $V_{n,m} = V_{W_{n,m}/\mathbb{F}_p}$。证毕。

由命题 2.i) 和引理 4 有

$$W_n[V] \cong \operatorname{coker}(V_{W_n/k}) \cong \mathbb{G}_{a/k} \tag{23}$$

故 $a(W_n) = 1$ (定义见 Ⅲ.4.2), 因而

$$W_{n,m}[V] \cong \operatorname{coker}(V_{W_{n,m}/k}) \cong \alpha_{p^{m+1}} \tag{24}$$

由此可见 $a(W_{n,m}) = a(W_{n,m}^D) = 1$。总之有 (记号见 Ⅲ.4.1)

推论 5. 令 $k = \mathbb{F}_p$, 则

i) 每个 $W_{n,m} \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\text{inf}}^{\text{inf}})$, 特别地 $W_{0,0} \cong \alpha_p$, 且 $W_{n,m}$ 可嵌入 $W_{n+1,m}$ 或 $W_{n,m+1}$ 作为闭子群概形, 而 $W_{n,m}$ 的概形结构由 (17) 给出。

ii) (23) 和 (24) 成立, 且 $a(W_n) = a(W_{n,m}) = a(W_{n,m}^D) = 1$。

习题

1. 对 $k = \mathbb{F}_{p^2}$, 例 1 给出 $W(k)$ 的另一种构造方法。验证此时 $W(k)$ 的夫罗贝纽斯由复共轭诱导。

2. 设 $K \supset \mathbb{Q}$ 为二次扩域而 $R \subset K$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的整闭包。设素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ 满足 $pR = P^2$ (其中 $P \subset R$ 为素理想)。令 $\hat{R} = \varprojlim_i R/P^i$。证明或者 $\hat{R} \cong \mathbb{Z}_p[\sqrt{p}]$, 或者 $\hat{R} \cong \mathbb{Z}_p[\sqrt{-p}]$。

3. 验证引理 2 中的断言 i-iv)。

4. 给出引理 3 的完整证明。

第 3 节　丢多涅元与丢多涅模

1. 丢多涅模的建立

设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。对任意 $G \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$, 令 $H = G_{\text{red}}$, H' 为 G 的零分支, 则因 k 是完全域有 $G \cong$

$H \times_k H'$, 且 H 在 k 上平展, 故 $(G \otimes_k \bar{k})_{\mathrm{red}} = H \otimes_k \bar{k}$ 是阶为 p 的幂的离散群概形, 从而同构于一些形如 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})_{\bar{k}}$ 的离散群概形的直积。这样 $(H \otimes_k \bar{k})^D$ 同构于一些 μ_{p^r} 的直积, 由此可见 H^D 是无穷小群, 故 $H \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}})$ (见 Ⅲ.4.1)。同理, H'^D 也可以分解为一个平展群概形和一个无穷小群的直积, 总之有典范直积分解

$$G \cong G_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}} \times_k G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}} \times_k G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}} \tag{1}$$

其中 $G_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}})$, $G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}})$, $G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$。由例 Ⅵ.1.6 可知 $G_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}}$ 等价于 $\bar{k}$ 上的一个离散群概形连同 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 的一个作用, 故等价于群环 $R = \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)]$ 上的一个有限长的模; 而 $G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}}$ 的卡迪耶对偶也是如此, 这两者都较容易处理。我们下面主要考虑 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}}$, 注意它是阿贝尔范畴, 且卡迪耶对偶给出它到自身的反等价。

设 $G = \mathrm{Spec} R \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 则因 k 的弗罗贝纽斯是自同构, $G^{(p^m)} = \mathrm{Spec} R^{(p^m)}$ 即使对 $m < 0$ 也有意义, 而任意 $x \in R$ 可通过典范同构 $R^{(p^m)} \cong R$ 看作 $R^{(p^m)}$ 的元, 在没有疑问时仍 (滥用记号) 记为 x, 这样 R 中有元 $V_{G/k}^{m*}x$, 简记为 $V^{m*}x$。注意对充分大的整数 n 有 $F_{G/k}^n = 0$, $V_{G/k}^n = 0$。将 G 看作加法群概形, 其加法记为 a_G。

记 $W = \mathcal{W} \otimes k$。设 $f : G \to W$ 为同态, 则 f 经过某个 $W_n = \mathrm{Spec} k[x_0, ..., x_n]$。令 $x = f^*(x_n)$, 注意 f 与 V 交换, 由命题 2.2 可见

$$a_G^*(x) = \phi_n(V^{n*}x \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^{n*}x, V^{n-1*}x \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^{n-1*}x, ..., x \otimes_k 1, 1 \otimes_k x) \tag{2}$$

由命题 2.1 可见若将 x 换为 $f^*(x_i)$ $(i < n)$ 则 (2) 也成立。

定义 1. 设 $G = \mathrm{Spec} R$ 为有限交换 (加法) 群概形使得 $V_{G/k}^{n+1} = 0$, 一个元 $x \in R$ 如果满足 (2) 则称为 G 的*丢多涅元*; 此时如果 R 作为 k-代数由 x, V^*x, $V^{2*}x$,... $V^{n*}x$ 生成, 则称 x 为 G 的*丢多涅生成元*。

由命题 2.1 可见上述定义与 n 的选择无关。

记 $\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}} \subset \mathfrak{Ab}_{1k}$ 为所有使得 $V_{G/k}^{n+1} = 0$ 对某个 n 成立的 G 组成的全子范畴。对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}})$, 由上所述可见若 $f : G \to W_n$ 为同态则 $f^*(x_n)$ 为 G 的丢多涅元; 反之, 若 x 为 G 的丢多涅元, 令 $f : G \to W_n$

为由 $f^*(x_i) = V_{G/k}^{n-i*}(x)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 所定义的态射，则由 W_n 的加法和 V 的定义可见 f 是同态，记为 $f_x = f$。

记 $D(G) = D(G/k) \subset R$ 为所有丢多涅元的集合，由上所述有典范一一对应 $D(G) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(G, W_n)$。对任意 $x, y \in D(G)$，

$$f_x + f_y : G \xrightarrow{\Delta} G \times_k G \xrightarrow{(f_x, f_y)} W_n \times W_n \xrightarrow{a} W_n \tag{3}$$

也是 k-群概形同态，故 $(f_x + f_y)^*(x_n) \in D(G)$，记为 $x \dot{+} y$。由 W_n 的加法的定义可见

$$x \dot{+} y = \phi_n(V^{n*}x, V^{n*}y, V^{n-1*}x, V^{n-1*}y, ..., x, y) \tag{4}$$

此外还有 $-x = -1_G^*(x) \in D(G)$ 及 $0 \in D(G)$。由引理 2.2 可见

$$\begin{aligned} &x \dot{+} y = y \dot{+} x, \ (x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z), \\ &x \dot{+} 0 = x, \ x \dot{+} (-x) = 0 \ \ (\forall x, y, z \in D(G)) \end{aligned} \tag{5}$$

这说明 $D(G)$ 按 $\dot{+}$ 为一个加法阿贝尔群。

注意一个元 $c \in W_n(k)$ 可看作一个 k-态射 $\mathrm{Spec}(k) \to W_n$，任意 $x \in D(G)$ (对应于 $f_x : G \to W_n$) 与 $c \in W_n(k)$ 合起来给出一个 k-群概形同态

$$G \cong \mathrm{Spec}(k) \times_k G \xrightarrow{(c, f_x)} W_n \times W_n \xrightarrow{m} W_n \tag{6}$$

它所对应的丢多涅元记为 $c \dot{\times} x$。若 $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$，由维特概形的定义易见

$$c \dot{\times} x = c_0^{p^n} x \dot{+} c_1^{p^{n-1}} p^* x \dot{+} \cdots \dot{+} c_n p^{n*} x \tag{7}$$

特别地，若 $c_1 = ... = c_n = 0$ 则 $c \dot{\times} x = c_0^{p^n} x$。故对任意 $c \in k$ 及 $x \in D(G)$ 有 $cx \in D(G)$。

易见若 $x \in D(G)$ 则 $V^* x \in D(G)$ 且 $x^p = F^* x \in D(G)$，而由 (7) 易见对任意 $c \in W_n(k)$，

$$F^*(c \dot{\times} x) = c^{\sigma} \dot{\times} F^* x, \quad V^*(c \dot{\times} x) = c^{\sigma^{-1}} \dot{\times} V^* x \tag{8}$$

定义 $W(k)$-代数 (一般是非交换的)

$$A = A(k) := W(k)[F, V]/(FV - p, VF - p, Fa - a^{\sigma} F, Va - a^{\sigma^{-1}} V \ \forall a \in W(k)) \tag{9}$$

上面的讨论说明 $D(G)$ 具有一个 A-模结构 (加法为 $\dot{+}$, $W(k)$ 与 $D(G)$ 的乘法为 $\dot{\times}$, F, V 与 $D(G)$ 的乘法分别为 F^* 与 V^* 的作用)。

定义 2. 一个*丢多涅模* (*Dieudonné module*) 是指一个 $W(k)$-有限生成的左 A-模。对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}})$, 称 $D(G)$ 连同上述 A-模结构为 G 的丢多涅模。

注意任意 $x \in \alpha(G)$ (见 Ⅲ.4.2) 对应于一个同态 $G \to \mathbb{G}_{a/k} \cong W_n[V]$, 故 $\alpha(G) \subset D(G)$。另一方面, 若 $x \in D(G)$ 满足 $V^*_{G/k}x = 0$, 则由 $f_x \circ V_{G/k} = V_{W_n/k} \circ f_x = 0$ 可见 f_x 经过 $W_n[V]$, 故

$$\alpha(G) = \{x \in D(G) | V^*_{G/k}x = 0\} = \{x \in D(G) | f_x \text{ 经过 } W_n[V]\} \tag{10}$$

特别地, 当 $V_{G/k} = 0$ 时有 $D(G) = \alpha(G)$; 而当 G 是 α-群时有 $\alpha(G) \cong k^{\oplus r}$ $(r = a(G))$, 其中 k 的每个拷贝看作 A-模 $A/A(F, V)$。

对 $\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}}$ 中的一个同态 $f : G = \mathrm{Spec}R \to G' = \mathrm{Spec}R'$, k-代数同态 $f^* : R' \to R$ 满足 $f^*(D(G')) \subset D(G)$, 从而诱导 A-模同态 $D(G') \to D(G)$, 也记为 f^*。若 f 是满射而 $H = \ker(f)$, 则对任意 $x \in \ker(D(G) \to D(H))$, 显然 $f_x : G \to W_n$ 在 H 上的限制为 0, 故 f_x 经过 G', 从而 $x \in f^*(D(G'))$; 另一方面, 显然 $f^*(D(G')) \subset \ker(D(G) \to D(H))$, 故 $f^*(D(G')) = \ker(D(G) \to D(H))$。

特别地, 若 $H \cong \alpha_p$, 则存在 A-模正合列 $0 \to D(G/H) \to D(G) \to D(H)$, 故由命题 Ⅲ.4.3 及归纳法可见 $D(G)$ 作为 $W(k)$-模具有有限长度。

若 $G = W_{n,m}$, 则由上所述可见 $D(G)$ 作为 (以 $\dot{+}$ 为加法的) 加法群同构于 $End_k(G)$ 的加法群结构, 故可将二者等同起来。令 $v_0 \in D(G)$ 为对应于 $\mathrm{id}_G \in End_k(G)$ 的元, 则 $D(G)$ 的 A-模结构给出一个 A-模同态 $q : A \to D(G)$, 将任意 $a \in A$ 映到 av_0。对任意 $v \in D(G)$, 易见 $(av_0) \circ v = av$, 故 q 为环同态。总之有

命题 1. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}})$。令 $D(G) \subset R$ 为 G 的丢多涅元的集合, 则

i) 一个 $D(G)$ 的元 x 等价于一个 k-群概形同态 $f_x : G \to W_n$ (满足 $f_x^*(x_n) = x$)。

ii) $D(G)$ 具有 (左) A-模结构: 任两个元 $x, y \in D(G)$ 的和 $x \dot{+} y$ 由 (4) 给出, 零元为 0, 任意 $x \in D(G)$ 的负元为 $-x$; 对任意 $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in W_n(k)$ 及 $x \in D(G)$ (对应于 $f_x : G \to W_n$), 积 $c \dot{\times} x$ 由 (7) 给出; $Fx = F^*_{G/k}x = x^p$, $Vx = V^*_{G/k}x$。此外, 对任意 $c \in k$ 及 $x \in D(G)$ 有 $cx \in D(G)$, 它等于 $\tau(c^{p^{-n}}) \dot{\times} x$。$D(G)$ 作为 $W(k)$-模具有有限长度。

iii) 对任意 $m \geqslant 0$, 记 $i : W_{n,m} \hookrightarrow W_n$ 为嵌入, 则 $f \mapsto i \circ f$ 给出一个加法阿贝尔群的同构 $\phi : End_k(W_{n,m}) \to D(W_{n,m})$, 而 $a \mapsto \phi^{-1}(a \dot{\times} i)$ 给出一个环同态 $A(k) \to End_k(W_{n,m})$。

iv) 设 $f : G = \mathrm{Spec}R \to G' = \mathrm{Spec}R'$ 为 $\mathfrak{Ab}^{\inf}_{1k}$ 中的同态, 则 k-代数同态 $f^* : R' \to R$ 典范地诱导 A-模同态 $f^* : D(G') \to D(G)$, 故 D 可看作从 $\mathfrak{Ab}^{\inf}_{1k}$ 到 A-模的范畴 $\mathfrak{M}_A$ 的反变函子。此外, 若 f 是满射则有正合列

$$0 \to D(G') \xrightarrow{f^*} D(G) \to D(\ker(f)) \tag{11}$$

v) (10) 成立, 特别地若 $V_{G/k} = 0$ 则 $D(G) = \alpha(G)$; 而当 G 为 α-群时有 $D(G) \cong (A/A(F,V))^{\oplus r}$ $(r = a(G))$。

vi) $\mathcal{W}_n$ 具有如下泛性: 对任意完全域 $k \supset \mathbb{F}_p$, 任意 $G = \mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}^{\inf}_{1k})$ 及任意满足 $V^{n+1*}_{G/k}x = 0$ 的 $x \in D(G)$, 存在唯一 k-群概形同态 $f : G \to \mathcal{W}_n \otimes k$ 使得 $f^*(x_n) = x$。而 $\mathcal{W}_{n,m} = (\mathcal{W}_n \otimes \mathbb{F}_p)[F^{m+1}]$ 具有如下泛性: 对任意完全域 $k \supset \mathbb{F}_p$, 任意 $G = \mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}^{\inf}_{\inf})$ 及任意满足 $V^{n+1*}_{G/k}x = 0$ 和 $F^{m+1*}_{G/k}x = 0$ 的 $x \in D(G)$, 存在唯一 k-群概形同态 $f : G \to \mathcal{W}_{n,m} \otimes k$ 使得 $f^*(x_n) = x$。

由命题 1 可见若 $G = \mathrm{Spec}R$ 为某个 $W^r_{n,m}$ 的闭子群概形, 则 R 作为 k-代数由 $D(G)$ 生成, 且极大理想 $M = \ker(0^*) \subset R$ 由 $D(G)$ 生成; 反之, 若 R 作为 k-代数由 $D(G)$ 生成, 则 G 可嵌入某个 $W^r_{n,m}$ 作为闭子群概形。

2. 丢多涅模函子给出的范畴反等价

记 $\mathfrak{M}^0_A \subset \mathfrak{M}_A$ 为所有在 $W(k)$ 上长度有限的 A-模组成的全子范畴, $\mathfrak{M}^1_A \subset \mathfrak{M}^0_A$ 为所有 F 和 V 的作用都幂零的 A-模组成的全子范畴。命题 1 给出 (反变) 丢多涅模函子 $D : \mathfrak{Ab}^{\inf}_{\inf} \to \mathfrak{M}^1_A$, 我们下面证明它是范畴反

等价, 关键是下列事实。

命题 2. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, $G=\mathrm{Spec}(R)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 则 G 可嵌入某个 $W_{n,m}^r$ 作为闭子群概形。

证. 由命题 Ⅲ.4.3 可约化为 $a(G)=1$ 的情形。由命题 Ⅲ.4.3 可取闭子群概形 $H\subset G$ 使得 $G/H\cong\alpha_p$。注意 $a(H)\leqslant 1$, 故由归纳法只需证明若 H 为 $W_{n-1,m-1}$ 的闭子群概形, 则 G 可嵌入 $W_{n,m}$ 作为闭子群概形。注意 G 有闭子群概形 $H'=G[F]\cap G[V]\cong\alpha_p$, 且一个同态 $f:G\to W_{n,m}$ 是单射当且仅当它在 H' 上的限制是单射, 因为若 $\ker(f)\cap H'=0$ 则 $a(\ker(f))=0$, 从而由命题 Ⅲ.4.3 有 $\ker(f)=0$。

令 G_0 为 $H\hookrightarrow W_{n-1,m-1}$ 和 $H\hookrightarrow G$ 的推出, 则 $W_{n-1,m-1}\to G_0$ 和 $G\to G_0$ 都是闭嵌入, 而 $G_0/W_{n-1,m-1}\cong\alpha_p$。注意 $W_{n-1,m-1}$ 为 $W_{n,m}$ 的闭子群概形, 令 $G_{i,j}$ 为 $W_{n-1,m-1}\to W_{n-1+i,m-1+j}$ 和 $W_{n-1,m-1}\to G_0$ 的推出 $(i,j=0$ 或 $1)$, 则 G_0 可看作 $G_{i,j}$ 的闭子群概形, 且有正合列

$$0\to W_{n-1+i,m-1+j}\to G_{i,j}\to\alpha_p\to 0\quad(i,j=0,1)\tag{1}$$

令 $G_{i,j}=\mathrm{Spec}(R_{i,j})$, $W_{n-1+i,m-1+j}=\mathrm{Spec}(B_{i,j})$ $(i,j=0,1)$。注意 $G_{1,1}$ 是 $W_{n,m-1}\to G_{1,0}$ 和 $W_{n,m-1}\to W_{n,m}$ 的推出, 故有行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}0\to W_{n,m-1} & \longrightarrow & G_{1,0} & \longrightarrow & \alpha_p\to 0\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\mathrm{id}\\ 0\to W_{n,m} & \longrightarrow & G_{1,1} & \xrightarrow{\lambda} & \alpha_p\to 0\end{array}\tag{2}$$

由 (1) 及 $F^m_{W_{n,m-1}/k}=0$ 可见 $F^{m+1}_{G_{1,0}/k}=0$。由推论 2.5.i) 可知 $B_{i,j}\cong k[y_0,\dots,y_{n-1+i}]/(y_0^{p^{m+j}},\dots,y_{n-1+i}^{p^{m+j}})$; 由 $G_{i,j}$ 无穷小 (及 k 是完全域) 可见 $R_{i,j}$ 形如 $k[y_1,\dots,y_r]/(y_1^{p^{n_1}},\dots,y_r^{p^{n_r}})$, 而 $G_{i,j}$ 的长度等于 $W_{n-1+i,m-1+j}$ 的长度加 1。故 $R_{1,1}$ 的 k-代数结构只有两种可能的情形: 或者

$$R_{1,1}\cong k[y_0,\dots,y_n]/(y_0^{p^{m+2}},y_1^{p^{m+1}},\dots,y_n^{p^{m+1}})\tag{3}$$

或者

$$R_{1,1}\cong k[y_0,\dots,y_{n+1}]/(y_0^{p^{m+1}},\dots,y_n^{p^{m+1}},y_{n+1}^p)\tag{4}$$

但 (3) 是不可能的，因否则 $\ker(F^{m+1}_{G_{1,1}/k})$ 的长度为 $(m+1)(n+1)$，等于 $W_{n,m}\subset\ker(F^{m+1}_{G_{1,1}/k})$ 的长度，从而 $W_{n,m}=\ker(F^{m+1}_{G_{1,1}/k})$，这样 $F^{m+1}_{G_{1,0}/k}=0$ 将给出 $G_{1,0}\subset\ker(F^{m+1}_{G_{1,1}/k})=W_{n,m}$，与 $G_{1,0}\to\alpha_p$ 是满射矛盾。

另一方面，$G_{1,1}$ 也是 $W_{n-1,m}\to G_{0,1}$ 与 $W_{n,m-1}\to W_{n,m}$ 的推出，故有行正和的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to W_{n-1,m} & \longrightarrow & G_{0,1} & \longrightarrow & \alpha_p\to 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ 0\to W_{n,m} & \longrightarrow & G_{1,1} & \xrightarrow{\lambda} & \alpha_p\to 0 \end{array} \tag{5}$$

由 (1) 和 $V^n_{W_{n-1,m}/k}=0$ 可见 $V^{n+1}_{G_{0,1}/k}=0$，故 $F^{n+1}_{G^D_{0,1}/k}=0$。对 (5) 取卡迪耶对偶得行正和的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to\alpha_p & \longrightarrow & G^D_{1,1} & \longrightarrow & W^D_{n,m}\to 0 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle q} & & \big\downarrow{\scriptstyle q'} \\ 0\to\alpha_p & \longrightarrow & G^D_{0,1} & \longrightarrow & W^D_{n-1,m}\to 0 \end{array} \tag{6}$$

其中 q 和 q' 忠实平坦。注意 $\mathrm{coker}(F_{W^D_{n,m}/k})\cong\ker(V_{W_{n,m}/k})^D$ 有长度 $m+1$ 且 $F^{n+1}_{W^D_{n,m}/k}=0$，而 $W^D_{n,m}$ 有长度 $(m+1)(n+1)$，故作为 k-代数 $B^D_{1,1}\cong k[y_0,\dots,y_m]/(y_0^{p^{n+1}},\dots,y_m^{p^{n+1}})$。由此可见 $R^D_{1,1}$ 的 k-代数结构只有两种可能的情形: 或者

$$R^D_{1,1}\cong k[y_0,\dots,y_m]/(y_0^{p^{n+2}},y_1^{p^{n+1}},\dots,y_m^{p^{n+1}}) \tag{7}$$

或者

$$R^D_{1,1}\cong k[y_0,\dots,y_{m+1}]/(y_0^{p^{n+1}},\dots,y_m^{p^{n+1}},y_{m+1}^p) \tag{8}$$

但 (7) 是不可能的，因否则 $B'=k[\bar{y}_0^p,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m]\subset A^D_{1,1}$ 为 $G'=\mathrm{coker}(F^{n+1}_{G^D_{1,1}/k})$ 的结构环，而 $F^{n+1}_{W^D_{n,m}/k}=0$ 给出 $B^D_{1,1}\subset B'$，从而 $G'\cong W^D_{n,m}$ (因为它们有相同的长度)；而 $F^{n+1}_{G^D_{0,1}/k}=0$ 给出 $A^D_{0,1}\subset B'$，从而投射 q 经过 $W^D_{n,m}$，与 $\alpha_p\hookrightarrow G^D_{0,1}$ 矛盾。

因此 (4) 和 (8) 成立。令 $H_0=\mathrm{coker}(F_{G^D_{1,1}/k})$，则由 (8) 可见 H_0 有长度 $m+2$，故 $H_0^D\cong G_{1,1}[V]$ 的长度也是 $m+2$。由 (4) 和 $W_{n,m}\subset G_{1,1}$ 可见 H_0^D 的结构环同构于 $k[y_0,y_1]/(y_0^{p^{m+1}},y_1^p)$，故 $G_{1,1}[V][F]\cong H_0^D\cong\alpha_p^2$。

但由 $a(W_{n,m})=1$ 可见 $G_{1,1}[V][F]\cap W_{n,m}\cong\alpha_p$, 故投射 $G_{1,1}[V][F]\to\alpha_p$ 为满射, 这给出 λ 的一个截口, 从而有 $G_{1,1}\cong W_{n,m}\times_k\alpha_p$。由于 $G\subset G_{1,1}$ 且 $a(G)=1$, 由命题 Ⅲ.4.3 可见 $G\hookrightarrow W_{n,m}$ 或 $G\hookrightarrow\alpha_p$ (实际上前者成立)。证毕。

由命题 2 可得到下列推论。

首先, 注意 $\mathcal{W}_{n,m}$ 的结构环作为 $\mathbb{F}_p$-代数由 $x_0,\ldots,x_n\in D(\mathcal{W}_{n,m})$ 生成, 由命题 1 可见 G 的结构环 R 作为 k-代数由 $D(G)$ 生成。

其次, 若 $a(G)=1$, 令 $H\subset G$ 为同构于 α_p 的唯一闭子群概形, 可取 $x\in D(G)$ 使得 x 在 $D(H)$ 中的像非零, 故 $\ker(f_x)$ 没有同构于 α_p 的闭子群概形, 从而 $\ker(f_x)=0$, 即 f_x 为闭嵌入; 反之, 若有 $x\in D(G)$ 使得 f_x 为闭嵌入, 则由推论 2.5.ii) 可见 $a(G)=1$。由此可见若 $a(G)=1$, 则 R 作为 k-代数由 x, V^*x, ..., $V^{n*}x$ 生成; 此时若 $F_{G/k}^{m+1}=0$, $V_{G/k}^{n+1}=0$, 则 G 可嵌入 $W_{n,m}$ 作为闭子群概形; 而若还有 G 的长度为 $(m+1)(n+1)$ 则嵌入 $G\to W_{n,m}$ 为同构。特别地, 取 $k=\mathbb{F}_p$, $G=\mathcal{W}_{m,n}^D$, 则 $F_{G/k}^{m+1}=0$, $V_{G/k}^{n+1}=0$ 且 G 的长度为 $(m+1)(n+1)$, 故 $\mathcal{W}_{m,n}^D\cong\mathcal{W}_{n,m}$ (我们在下节将给出一个特殊的这样的同构)。

再次, 我们来证明若 $i:H\hookrightarrow G$ 为闭子群概形, 则 A-模同态 $i^*:D(G)\to D(H)$ 为满同态。对任意 $\alpha_p\cong H'\subset H$, 可取 $x\in D(G)$ 使得它在 $D(H')$ 中的像 $\bar{x}\neq 0$。记 $x'=i^*(x)\in D(H)$。对任意 $y\in D(H)$, 若其在 $D(H')$ 中的像为 $\bar{y}=c\bar{x}$ $(c\in k)$, 则由命题 1.iv) 可见 $y\dotplus(-cx')\in\ker(D(H)\to D(H'))=D(H/H')$。对 G 的长度用归纳法, 可设 $D(G/H')\to D(H/H')$ 是满射, 故存在 $z'\in D(G/H')\subset D(G)$ 使得 $i^*(z')=y\dotplus(-cx')$。令 $z=z'\dotplus cx$, 则有

$$i^*(z)=i^*z'\dotplus ci^*x=y\dotplus(-cx')\dotplus cx'=y \tag{9}$$

由此及命题 1.iv) 可见 D 是正合函子。此外, 显然 D 保持直和, 且由定义显然可见对任意 $G,G'\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, D 给出的映射 $Hom_k(G',G)\to Hom_A(D(G),D(G'))$ 是加法群同态, 故 D 是阿贝尔范畴的加性正合反变函子。

由此可见 $D(G)$ 作为 A-模的任一合成列的每个因子都同构于 $A/A(F,V)$, 而 $l_A(D(G))=l(G)$。

特别地, 若 $H = \mathrm{im}(F_{G/k})$ (看作 G 的商群概形) 则 $D(H) = FD(G)$; 而若 $H = \mathrm{im}(V_{G/k})$ (看作 $G^{(p)}$ 的商群概形) 则 $D(H) = VD(G)^{(p)}$。故若 $H = G[F] \cap G[V]$ 则 $D(H) \cong D(G)/(F,V)D(G)$, 注意此时 $a(H) = a(G)$ (见 (Ⅲ.4.2.1)), 再由命题 1.v) 可见 $D(H) \cong (A/A(F,V))^{a(G)}$; 若取 $D(G)$ 的一组元 $x_1,...,x_{a(G)}$ 使得它们在 $D(H)$ 中的像组成 $D(H)$ 的一组 k-基, 则由归纳法可见 $D(G)$ 作为 A-模由 $x_1,...,x_{a(G)}$ 生成。特别地若 $a(G) = 1$ 则 $D(G)$ 作为 A-模由一个元生成 (这就是“单生成”这个术语的理由)。取 $k = \mathbb{F}_p$, $G = \mathcal{W}_{n,m}$, 则由 $(F^{m+1}, V^{n+1})D(\mathcal{W}_{n,m}) = 0$ 及 $l_A(D(\mathcal{W}_{n,m})) = l(\mathcal{W}_{n,m}) = (m+1)(n+1)$ 立得

$$D(\mathcal{W}_{n,m}) \cong A/A(F^{m+1}, V^{n+1}) \tag{10}$$

再由命题 1.iii) 可见这给出环同构 $End_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{W}_{n,m}) \cong A/A(F^{m+1}, V^{n+1})$。若 k' 是 k 的代数扩张 (亦为完全域), 则由 (10) 可见有典范 $W(k')$-模同构 $D(W_{n,m} \otimes_k k'/k') \cong D(W_{n,m}/k) \otimes_{W(k)} W(k')$, 从而由命题 2 可见对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 均有 $D(G \otimes_k k'/k') \cong D(G/k) \otimes_{W(k)} W(k')$。总之有

推论 1. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域。

i) 若 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 则 R 作为 k-代数由 $D(G)$ 生成, 且 $l_A(D(G)) = l(G)$。

ii) $D : \mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}} \to \mathfrak{M}_A^1$ 为阿贝尔范畴的加性正合反变函子。

iii) 对 $G = \mathrm{Spec}(R) \neq 0 \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$, 下列条件等价:

1) $a(G) = 1$;

2) $D(G)$ 作为 A-模由一个元生成;

3) 存在 $x \in D(G)$ 使得 R 作为 k-代数由所有 $V^{i*}x$ 生成;

4) G 可嵌入某个 $W_{n,m}$ 作为闭子群概形。

iv) 若 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 满足 $a(G) = 1$ 及 $F_{G/k}^{m+1} = 0$, $V_{G/k}^{n+1} = 0$, $l(G) = (m+1)(n+1)$, 则 $G \cong W_{n,m}$; 此时有环同构 $D(G) \cong End_k(G) \cong A/A(F^{m+1}, V^{n+1})$, 换言之 $D(W_{n,m})$ 由所有 $c_{ij}x_i^{p^j}$ $(0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m$, $c_{ij} \in k)$ 按加法 $\dotplus$ 的和组成。特别地有 $\mathcal{W}_{m,n}^D \cong \mathcal{W}_{n,m}$, 故

$$\dim_k \mathrm{Lie}(W_{n,m}/k) = n+1, \quad \dim_k \mathrm{Lie}(W_{n,m}^D/k) = m+1 \tag{11}$$

v) 若完全域 k' 是 k 的代数扩张，则对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 有典范 $W(k')$-模同构 $D(G \otimes_k k'/k') \cong D(G/k) \otimes_{W(k)} W(k')$。

我们下面构造地给出 D^{-1}。设 $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M}_A^1)$，取 n, m 使得 $F^{m+1}M = V^{n+1}M = 0$，并设 M 作为 A-模由 r 个元生成，则存在 A-模满同态 $g: (A/A(F^{m+1}, V^{n+1}))^{\oplus r} \twoheadrightarrow M$，注意 $(A/A(F^{m+1}, V^{n+1}))^{\oplus r}$ 的长度有限，故 $\ker(g)$ 是有限生成的 A-模，且显然有 $F^{m+1}\ker(g) = V^{n+1}\ker(g) = 0$。设 $\ker(g)$ 作为 A-模由 s 个元生成，则存在 A-模满同态 $h: (A/A(F^{m+1}, V^{n+1}))^{\oplus s} \twoheadrightarrow \ker(g)$，这样就有 A-模正合列

$$(A/A(F^{m+1}, V^{n+1}))^{\oplus s} \xrightarrow{\quad h \quad} (A/A(F^{m+1}, V^{n+1}))^{\oplus r} \xrightarrow{\quad g \quad} M \to 0 \tag{12}$$

由命题 1.i) 和推论 1.ii) 可见 h 由一个同态 $\tilde{h}: W_{n,m}^r \to W_{n,m}^s$ 给出，令 $G = \ker(\tilde{h})$，则 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$，且由推论 1.ii) 有 $D(G) \cong \mathrm{coker}(h) \cong M$。

设 $f: M \to M'$ 为 $\mathfrak{M}_A^1$ 中的同态，则由上所述可取 $G' \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 使得 $D(G') \cong M'$。由命题 1.i) 可知有同态 $\phi: G' \to W_{n,m}^r$ 使得 $D(\phi) = f \circ g$。由

$$D(\tilde{h} \circ \phi) = D(\phi) \circ D(\tilde{h}) = f \circ g \circ h = 0 \tag{13}$$

可见 $\tilde{h} \circ \phi = 0$，故 ϕ 经过 $\ker(\tilde{h}) = G$，从而给出一个同态 $\tilde{f}: G' \to G$，且显然有 $D(\tilde{f}) = f$。特别地，若 f 是同构，则由此可见 $\tilde{f}$ 也是同构，从而 G 在同构之下由 M 唯一决定。再由上述构造过程可见若取定 G, G'，则 $\tilde{f}$ 由 f 唯一决定。这就给出 D 的逆 D^{-1}，即 $D^{-1}(M) = G$，$D^{-1}(f) = \tilde{f}$。总之有

定理 1. 对任一特征 $p > 0$ 的完全域 k，函子 $D: \mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}} \to \mathfrak{M}_A^1$ 为阿贝尔范畴的反等价，其逆 D^{-1} 由上述构造过程给出。

由上述构造过程还可见

推论 2. 设 $G = \mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$，则一个理想 $I \subset R$ 定义一个闭子群概形当且仅当 I 由 (其中的) 丢多涅元生成。

例 1. 设 k 为代数闭域，$M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M}_A^1)$ 的长度为 2，$D^{-1}(M) = G$。若 G 不是单生成的，则只能有 $M \cong (A/A(F, V))^{\oplus 2}$，从而 $G \cong \alpha_p^2$。若 $a(G) = 1$,

取 M 的一个生成元 x, 则有 $F^2x = V^2x = 0$, 而由 $l_A(M) = 2$ 可见存在不全 $\in pW(k)$ 的 $a, b \in W(k)$ 使得 $aFx + bVx = 0$。有 3 种可能的情形: i) $a \in pW(k)$, 此时由 $aF \in AF^2$ 可见 $M \cong A/A(F^2, V)$, 故 $G \cong W_{0,1} \cong \alpha_{p^2}$; ii) $b \in pW(k)$, 此时由 $bV \in AV^2$ 可见 $M \cong A/A(F, V^2)$, 故 $G \cong W_{1,0} \cong \alpha_{p^2}^D$; iii) $a, b \notin pW(k)$, 不妨设 $b = -1$, 此时有 $px = -F(bVx) = a^\sigma F^2 x = 0$, 故 $pM = 0$, 从而 M 可以看作 k-线性空间, 而 $Vx = \bar{a}Fx$ ($\bar{a} \in k$ 为 a 在 k 中的像), 由 k 代数闭可取 $c \in k$ 使得 $c^{p^2-1} = \bar{a}$, 则对 $x' = c^p x$ 有

$$Vx' = cVx = c \cdot c^{p^2-1}Fx = F(c^p x) = Fx' \tag{14}$$

取 x' 代替 x 作为 M 的生成元, 就可见 $M \cong A/A(p, F - V)$, 由上述构造 $D^{-1}(M)$ 的过程可得 $G \cong \mathrm{Spec}(k[x]/(x^{p^2}))$, 其群概形结构由 (参看 (2.1.24))

$$\begin{aligned} &a^*(x) = x \otimes_k 1 + 1 \otimes_k x + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!(p-j)!} x^{jp} \otimes_k x^{(p-j)p}, \\ &0^*(x) = 0, \ (-1)^*(x) = -x \end{aligned} \tag{15}$$

给出 ($x \in D(G)$)。

设 E 为 k 上的超奇椭圆曲线, $G = E[p]$, 则由 $\dim_k \mathrm{Lie}(G/k) = 1$ 及 $G^D \cong G$ 可见 $M = D(G)$ 为情形 iii)。总之 $\mathfrak{M}_A^1$ 中长度为 2 的对象的同构类共有 4 种:

$$(A/A(F, V))^{\oplus 2}, \ A/A(F^2, V), \ A/A(F, V^2), \ A/A(F - V, p) \tag{16}$$

它们对应的群概形 (同构类) 分别为

$$\alpha_p^2, \ W_{0,1} \cong \alpha_{p^2}, \ W_{1,0} \cong \alpha_{p^2}^D, \ E[p] \tag{17}$$

其中 E 为超奇椭圆曲线。

3. 丢多涅模的推广

设 k 为特征 $p > 0$ 的一般域, $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k}^{\mathrm{inf}})$, 则仍可定义 $D(G) = \mathrm{Hom}(G, W_n)$, 其中 $W_n = \mathcal{W}_n \otimes k$。此时 $W(k)$ 不一定是离散赋值环,甚至

不一定是诺特环; 而由于 σ^{-1} 未必存在, 丢多涅元的定义 (2.2) 须改为

$$a_G^*(x^{(p^n)}) = \phi_n(V^{n*}x \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^{n*}x, V^{n-1*}x^{(p)} \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^{n-1*}x^{(p)}, \ldots, \\ x^{(p^n)} \otimes_k 1, 1 \otimes_k x^{(p^n)}) \tag{1}$$

其中 $x^{(p^i)} = x \otimes_{\sigma^i} 1 \in R^{(p^i)}$。在一般情形即使对 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}}$, D 也未必是范畴反等价。

在 k 是完全域的情形, 尽管定义 (2.2) 对 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}})$ 也有效, 但 $D(G)$ 一般不能决定 G 的同构类 (参看命题 Ⅵ.1.5)。不过若 k 是代数闭域, 则 $D(G)$ 可以决定 G 的同构类, 这是因为此时 G 是离散群概形, 故一个同态 $G \to W_n$ 等价于 G 作为加法群到 $W_n(k) \cong \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ 的一个同态, 而易见对任意 m, n 有 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, W_n(k)) \cong W_{\min(m,n)}(k)$ (事实上这对任意域 k 成立, 因若 $a \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 为一个生成元, 则一个同态 $f : (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_k \to W_n$ 等价于一个阶 $\leqslant p^m$ 的点 $f(a) \in W_n(k)$)。若取 $k = \mathbb{F}_p$, 则由 $\sigma = \mathrm{id}_k$ 可见 F 在 $D((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_k)$ 上的作用等于 id, 再由 $FV = p$ 可见 V 在 $D((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_k)$ 上的作用为 $p\cdot$ (这也可直接看出), 故有

$$D((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_k) \cong A/A(p^m, F-1, V-p) \cong A/A(F-1, V^m) \tag{2}$$

由基变换可见这对任意域 k 都成立 (参看习题 1)。

若 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{k\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}})$, 则因 V 不是幂零的, 上述定义不适用。为对一般的 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$ 定义丢多涅元和丢多涅模, 可以采用下面的方法。

我们需要改变变元的次序, 将 $x_0, \ldots, x_n$ 分别改记为 $x_n, \ldots, x_0$。对任意 $m \geqslant n$, 记 $\tilde{q}_{mn} : \mathcal{W}_m \to \mathcal{W}_n$ 为包含同态诱导的投射 (注意它不是同态)。令 $\tilde{R} \subset \mathbb{Z}[[x_0, x_1, \ldots]]$ 为所有形如

$$f = a + f_0 + f_1 + \cdots \quad (a \in \mathbb{Z},\ f_i \in x_i\mathbb{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_i]\ \forall i) \tag{3}$$

的元组成的子环 (易见形如 (3) 的展开式由 f 唯一决定), 看作 $\mathcal{W}$ 的函数环。令

$$\tilde{\phi}_n(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) = \phi_n(x_n, y_n, \ldots, x_0, y_0),\ \ \tilde{\psi}_n(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) \\ = \psi_n(x_n, y_n, \ldots, x_0, y_0) \quad (\forall n) \tag{4}$$

由引理 2.2 可见 $\phi_{n+1}(x_0,y_0,...,x_{n+1},y_{n+1})-\phi_n(x_0,y_0,...,x_n,y_n)\in(x_{n+1},y_{n+1})$; 类似地, 由引理 2.3 有$\psi_{n+1}(x_0,y_0,...,x_{n+1},y_{n+1})-\psi_n(x_0,y_0,...,x_n,y_n)\in(x_{n+1},y_{n+1})$, 故有极限

$$\tilde{\phi}=\varprojlim_n\tilde{\phi}_n,\ \ \tilde{\psi}=\varprojlim_n\tilde{\psi}_n\in\tilde{R}\otimes\tilde{R} \tag{5}$$

(在 $\tilde{R}\otimes\tilde{R}$ 中将 $x_i\otimes 1$ 和 $1\otimes x_i$ 分别简记为 x_i 和 y_i), 且由引理 2.2 和引理 2.3 有余交换律

$$\tilde{\phi}(X_i,Y_j)=\tilde{\phi}(Y_j,X_i),\ \ \tilde{\psi}(X_i,Y_j)=\tilde{\psi}(Y_j,X_i) \tag{6}$$

(其中 $X_i=(x_i,x_{i+1},...)$, 等等) 和余结合律

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x_0,\tilde{\phi}(Y_0,Z_0),x_1,\tilde{\phi}(Y_1,Z_1),...)=\tilde{\phi}(\tilde{\phi}(X_0,Y_0),z_0,\tilde{\phi}(X_1,Y_1),z_1,...)\\ \tilde{\psi}(x_0,\tilde{\phi}(Y_0,Z_0),x_1,\tilde{\phi}(Y_1,Z_1),...)=\tilde{\psi}(\tilde{\phi}(X_0,Y_0),z_0,\tilde{\phi}(X_1,Y_1),z_1,...)\end{aligned} \tag{7}$$

而 $\mathcal{W}$ 的形式环概形结构由

$$\begin{aligned}&a^*_{\mathcal{W}}(x_i)=\tilde{\phi}(x_i,y_i,x_{i+1},y_{i+1},...),\ m^*_{\mathcal{W}}(x_i)=\tilde{\psi}(x_i,y_i,x_{i+1},y_{i+1},...)\\ &0^*(x_i)=0,\ \ (-1)^*(x_i)=-x_i\quad(\forall i)\end{aligned} \tag{8}$$

给出。记 $\mathcal{W}_{\infty,m}=\mathcal{W}\otimes\mathbb{F}_p[F^m]$, 则 $\mathcal{W}_{\infty,m}$ 的加法自同态 $\mathrm{id}-V$ 的核 H 由理想 $I=(x_0-x_1,x_1-x_2,...)\subset\tilde{R}$ 给出。记 $x\in\tilde{R}/I$ 为 x_0 的像, 则 H 的加法由

$$a^*_H(x)=\tilde{\phi}(x,x,...) \tag{9}$$

给出。由引理 2.2.iv) 可见 $\tilde{\phi}_{n+1}(x_0,y_0,...,x_{n+1},y_{n+1})-\tilde{\phi}_n(x_0,y_0,...,x_n,y_n)\in(x_{n+1},y_{n+1})$ 的每项的次数 $\geqslant p+n(p-1)$, 故对充分大的 n 有 $\tilde{\phi}(x,x,...)=\tilde{\phi}_n(x,x,...,x)$, 换言之 (9) 的右边是有限和, 这说明 H 是有限群概形。易见 $H\cong\mu_{p^{m+1}}$。

对于一般的 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$, 一个同态 $f:G\to\mathcal{W}\otimes k$ 等价于一组 k-态射 $f_n:G\to W_n$ $(\forall n\geqslant 0)$, 满足相容性 $\tilde{q}_{(n+1)n}\circ f_{n+1}=f_n$ $(\forall n\geqslant 0)$, 使得 $\tilde{q}_{mn}\circ a_{W_m}\circ(f_m\times_k f_m)=f_n\circ a_G$ $(\forall m\gg n)$。由上所述可见, 对于 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}^{\mathrm{et}}_{k\mathrm{inf}})$ 也可以定义 $D(G)$ 为 $Hom_k(G,\mathcal{W}\otimes k)$, 这样就可以对任

意 (加法) 群概形 $G = \mathrm{Spec} R \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$ 统一地定义丢多涅元为 R 中满足

$$a_G^*(x) = \tilde{\phi}(x \otimes_k 1, 1 \otimes_k x, V^* x \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^* x, V^{2*} x \otimes_k 1, 1 \otimes_k V^{2*} x, \ldots) \tag{10}$$

的元, 而所有丢多涅元组成丢多涅模 $D(G) \cong Hom_k(G, \mathcal{W} \otimes k)$。若 k 是代数闭域, 则由定理 1 和上面的讨论可见 D 是忠实的。

若 k 是完全域, $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包, 则对任意有限交换 k-群概形 $G = \mathrm{Spec} R$, 由定义易见

$$D(G/k) = D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \subset R \otimes_k \bar{k} \tag{11}$$

由此及 $D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})$ 在 $\bar{k}$-同构之下决定 $G \otimes_k \bar{k}$ 可见, 若

$$D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k}) \cong D(G/k) \otimes_{W(k)} W(\bar{k}) \tag{12}$$

则 $D(G/k)$ 在 k-同构之下决定 G。

引理 1 (“超范德蒙德行列式”). 设 p 为素数, m, n 为正整数, 令

$$J_m(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^{p^m} & \cdots & x_n^{p^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{p^{mn-m}} & \cdots & x_m^{p^{mn-m}} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] \tag{13}$$

则有

$$J_m(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}_{p^m}}} (x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \lambda_n x_n) \tag{14}$$

证明很容易, 留作习题 (习题 6)。

命题 3. 设 k 为有限域, 则 $D : \mathfrak{Ab}_{1k} \to \mathfrak{M}_A^0$ 为阿贝尔范畴的反等价。

证. 由上所述只需证明 (12) 对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$ 成立。不妨设 $k = \mathbb{F}_{p^r}$ (p 为素数)。由于 $D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})$ 在 $W(\bar{k})$ 上是有限生成的, 存在有限扩

张 $k' \supset k$ 使得 $D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k}) \cong D(G \otimes_k k'/k') \otimes_{W(k')} W(\bar{k})$, 故只需证明 $D(G \otimes_k k'/k') \cong D(G/k) \otimes_{W(k)} W(k')$ 即可。

令 $\tau = \sigma^r \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, 则

$$D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})^{\{\tau\}} \tag{15}$$

且 $\tau|_{k'}$ 为 $\mathrm{Gal}(k'/k)$ 的生成元。令 $n = [k' : k]$。对任意 $v \in D(G \otimes_k k'/k')$, 易见

$$v + \tau v + \tau^2 v + \cdots + \tau^{n-1} v \in D(G \otimes_k k'/k')^{\{\tau\}} = D(G/k) \tag{16}$$

任取 k' 作为 k-线性空间的一组基 $\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_n$, 令 $c_i \in W(k')$ 为 $\bar{c}_i$ 的泰希米勒提升 $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 并令

$$v_i = c_i v + \tau(c_i v) + \cdots + \tau^{n-1}(c_i v) = c_i v + c_i^{\tau} \tau v + \cdots + c_i^{\tau^{n-1}} \tau^{n-1} v \in D(G/k) \tag{17}$$

由引理 1 可见 $\det(c_i^{\tau^{j-1}})$ 模 p 非零, 故可取 $a_1,\ldots,a_n \in W(k')$ 使得 $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ 模 p 与 v 同余, 这说明 $D(G/k) \otimes_{W(k)} W(k')$ 模 p 生成 $D(G \otimes_k k'/k')$, 从而由中山正引理有 $D(G/k) \otimes_{W(k)} W(k') \cong D(G \otimes_k k'/k')$。证毕。

我们可以进一步建立"几何化"的丢多涅模理论。

引理 2. 设 S 为诺特概形, $X \to S$ 为平坦相对射影群概形, $Y \to S$ 为相对拟射影群概形, 则存在局部拟射影 S-概形 $\mathcal{H}om_S(X,Y)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Hom}_{X,Y/S} : T \mapsto \mathrm{Hom}_T(X \times_S T, Y \times_S T)$$

更一般地, 若 $Y' \to S$ 为相对拟射影概形而 $h : Y \to Y'$ 是 S-态射, 则存在局部拟射影 S-概形代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}_T(X \times_S T, Y \times_S T) | (h \times_S \mathrm{id}_T) \circ f \circ m_{X \times_S T} = ((h \circ m_Y) \times_S \mathrm{id}_T) \circ (f \times_T f)\}$$

证. 只需证明后一个断言。不妨设 $X \to S$ 是射影的, 且有射影概形 $\bar{Y} \to S$ $(\bar{Y}' \to S)$ 使得 Y (Y') 为 $\bar{Y}$ $(\bar{Y}')$ 的稠密开子概形。令 $\mathcal{T}_0 =$

$\mathcal{M}or_S(X,\bar{Y})$, $f: X\times_S \mathcal{T}_0 \to \bar{Y}\times_S \mathcal{T}_0$ 为泛态射 (参看定理 Ⅳ.2.2.iv)), 则 $\mathcal{T}_0$ 的开子概形 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 - \mathrm{pr}_2(f^{-1}(\bar{Y}-Y))$ 显然代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Mor}_{X,Y/S}:\ T \mapsto \mathrm{Mor}_T(X\times_S T, Y\times_S T)$$

令态射

$$\begin{matrix}\phi = (h\times_S \mathrm{id}_{\mathcal{T}_0})\circ f\circ(m_X\times_S \mathrm{id}_{\mathcal{T}_0}):\\ \phi' = ((h\circ m_Y)\times_S \mathrm{id}_{\mathcal{T}_0})\circ(f\times_{\mathcal{T}_0} f):\end{matrix}\ X\times_S X\times_S \mathcal{T}_0 \to Y'\times_S \mathcal{T}_0 \tag{18}$$

(即分别为 $(x,x')\mapsto h(f(xx'))$ 和 $(x,x')\mapsto h(f(x)f(x')))$, $\Gamma_\phi,\Gamma_{\phi'}\subset X\times_S X\times_S Y'\times_S \mathcal{T}_0$ 分别为 ϕ, ϕ' 的图, 则由 $\Gamma_\phi \cong X\times_S X\times_S \mathcal{T}_0$ 可见它是 $X\times_S X\times_S \bar{Y}'\times_S \mathcal{T}_0$ 的闭子概形。注意 $\mathrm{pr}_{124}:\Gamma_\phi\to X\times_S X\times_S \mathcal{T}_0$ 是同构, 可见 ϕ 由 Γ_ϕ 决定 (等于 $\mathrm{pr}_{34}\circ\mathrm{pr}_{124}^{-1}$)。同理 $\Gamma_{\phi'}$ 是 $X\times_S X\times_S \bar{Y}\times_S \mathcal{T}_0$ 的闭子概形且决定 ϕ'。由推论 Ⅳ.2.3 可知 Γ_ϕ 和 $\Gamma_{\phi'}$ 在 $\mathcal{T}_0$ 中有等化子 $\mathcal{T}_2$, 易见一个 T-态射 $X\times_S T\to Y\times_S T$ 满足 $(h\times_S \mathrm{id}_T)\circ f\circ m_{X\times_S T} = ((h\circ m_Y)\times_S \mathrm{id}_T)\circ(f\times_T f)$ 当且仅当它对应的 S-态射 $T\to\mathcal{T}_0$ 经过 $\mathcal{T}_2$。由此可见 $\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$ 代表所述的预层。证毕。

设 S 为诺特 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$-概形 ($r$ 为正整数), $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1S})$, 不难证明存在正整数 N, 使得任意 S-形式群概形同态 $f: G\to\mathcal{W}\times S$ 满足

$$\tilde{q}_{(n+N)n}\circ a_{W_{n+N}}\circ(f_{n+N}\times_S f_{n+N}) = f_n\circ a_G \quad (\forall n) \tag{19}$$

证明如下。令 $d=\deg(G/S)$, 若 $S=\mathrm{Spec}k$ (k 为域), 可约化为 k 代数闭的情形, 注意分解 (2.1) 中的 $G_{\mathrm{et}}^{\mathrm{inf}}$ 和 $G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}}$ 都满足 $V^d=0$ 而 $G_{\mathrm{inf}}^{\mathrm{et}}$ 满足 $F^d=0$, 可见对任意 $m>N=p^d$, $\tilde{\phi}_{m+1}(x_0,y_0,\ldots,x_{m+1},y_{m+1})-\tilde{\phi}_m(x_0,y_0,\ldots,x_m,y_m)$ 的任一项在 (x_{m+1},y_{m+1}) 中且次数 $>N$, 故对任意同态 $f: G\to\mathcal{W}\otimes k$ 有

$$a_G^*(f^*(x_0)) = \tilde{\phi}_N(f^*x_0,f^*y_0,\ldots,f^*x_N,f^*y_N) \tag{20}$$

从而 (19) 成立。对一般情形不难约化为 $S=\mathrm{Spec}R$, $G=\mathrm{Spec}A$, R 为阿廷局部环的情形, 取 r 使得 R 的极大理想 P 满足 $P^r=0$, 由上述域上的情形可知存在 N 使得对任意 $m>N$, $\tilde{\phi}_{m+1}(x_0,y_0,\ldots,x_{m+1},y_{m+1})-\tilde{\phi}_m(x_0,y_0,\ldots,x_m,y_m)$ 的任一项 s 可以分解为 r 个因子的积 $s_1\cdots s_r$, 其

中每个 $s_i \in (x_d, y_d, ..., x_{m+1}, y_{m+1})$ 且次数 $> d$, 故 $(f \times_S f)^*(s_i)$ 模 P 为 0, 即在 PA 中, 从而 $(f \times_S f)^*(s) \in (PA)^r = 0$, 这说明 (20) 成立, 从而 (19) 成立。

这样, 由引理 2 可见预层 $T \mapsto Hom_T(G \times_S T, \mathcal{W} \times T)$ 是可代表的。

上面我们看到, 若 $S = \mathrm{Spec}k$ (k 为完全域), 在一般情形 $D(G/k)$ 不一定能决定 G 的同构类。但 $\mathcal{D}(G/k)$ 可以: 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则 $\mathcal{D}(G/k)(\bar{k}) = D(G \otimes_k \bar{k})$, 由上所述 $D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})$ 决定 $G \otimes_k \bar{k}$ 的同构类, 从而在 $\bar{k}$-代数同构之下决定 $G \otimes_k \bar{k}$ 的结构环 R; 由于 R 作为 $\bar{k}$-代数由 $D(G \otimes_k \bar{k}/\bar{k})$ 生成, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 在 $\mathcal{D}(G/k)(\bar{k})$ 上的作用决定它在 R 上的作用, 由命题 Ⅵ.1.5 可知这决定 G 的同构类。总之有

定理 2. 设 S 为诺特 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$-概形, $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1S})$, 则有 S-拟射影概形 $\mathcal{D}(G/S)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Hom}_{G,\mathcal{W}\times S/S}: \ T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G \times_S T, \mathcal{W} \times T)$$

且有下列性质:

i) $\mathcal{W}$ 的乘法诱导 $\mathcal{D}(G/S)$ 一个 (左) $\mathcal{W} \times S$-模概形结构; 若 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形, 则 $\mathcal{W}$ 的自同态 F, V 诱导 $\mathcal{D}(G/S)$ 的 $\mathcal{W} \times S$-半线性自同态。

ii) 若 $S = \mathrm{Spec}k$ (k 为完全域), 则 $G \mapsto D(G) = \mathcal{D}(G/k)(k)$ 给出一个阿贝尔范畴的反变正合函子 $D : \mathfrak{Ab}_{1k} \to \mathfrak{M}_A^0$。特别地若 k 是代数闭域或有限域, 则 D 为阿贝尔范畴的反等价。

称 $\mathcal{D}(G/S)$ 为 G 的*丢多涅模概形*。

丢多涅模的定义还可以推广到交换形式群上。设 S 为诺特 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$-概形, 对任意 $G = \varinjlim_n G_n \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_S)$, 定义 $\mathcal{D}(G/S) = \varprojlim_n \mathcal{D}(G_n/S)$, 易见它具有形式 $\mathcal{W} \times S$-模概形结构。此外, 显然 $\mathfrak{Ab}_S$ 中的一个同态 $f : G \to G'$ 典范地诱导一个形式 $\mathcal{W} \times S$-模概形同态 $\mathcal{D}(f/S) : \mathcal{D}(G'/S) \to \mathcal{D}(G/S)$。

若 $X \to S$ 为阿贝尔概形, 定义

$$\mathcal{D}(X/S) = \mathcal{D}(\varphi_p(X)/S) \tag{21}$$

(见 (1.1.4))。特别地若 $S = \mathrm{Spec}k$ (k 为域), 定义

$$D(X) = D(\varphi_p X) \cong \mathcal{D}(X/k)(k) \tag{22}$$

注意它是有限生成的 $W(k)$-自由模。

若 $S=\mathrm{Spec}k$ 而 k 为特征 p 的完全域, 易见 $D(G)=\mathcal{D}(G/k)(k)$ 具有 A-模结构。例如, 由 (2) 可见

$$D((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_k)\cong A/A(F-1,V-p) \tag{23}$$

对充分大的 n 有正合列 $D(G_{n+1})\xrightarrow{p^n\cdot}D(G_{n+1})\to D(G_n)\to 0$, 故由中山正引理可见 $D(G_{n+1})$ 由 $D(G_n)$ 在 $D(G_{n+1})$ 中的任意提升生成, 由此及归纳法可见 $D(G)$ 作为 $W(k)$-模是有限生成的。此外易见 D 作用于一个短正合列给出 A-模短正合列。若 k 是代数闭域或有限域, 则由定理 1 和命题 3 可见任意 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$ 在同构之下由 $D(G)$ 完全决定。

特别地, 若 G 为 p-可除群, 则由 $p\cdot:G_{n+1}\to G_n$ 是满同态可见 $p\cdot D(G)\to D(G)$ 是单射, 故 $D(G)$ 作为 $W(k)$-模是自由模; 反之, 在 k 是代数闭域或有限域的情形, 由定理 1 和例 2 可见若 $p\cdot D(G)\to D(G)$ 是单射, 则对充分大的 n, $p\cdot:G_{n+1}\to G_n$ 是满同态, 故 G 为 p-可除群。总之有

推论 3. 设 S 为诺特 $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$-概形, 则有 $\mathfrak{Ab}_S$ 到形式 $\mathcal{W}\times S$-模概形范畴的反变加性函子 $\mathcal{D}$, 与基变换交换。若 k 为特征 p 的完全域, 则对任意 $G=\varinjlim_n G_n\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$, $D(G)=\mathcal{D}(G/k)(k)$ 具有 $A(k)$-模结构且为有限生成的 $W(k)$-模。令 $\mathfrak{Ab}'_k\subset\mathfrak{Ab}_k$ 为所有 $\mathfrak{Ab}^{\mathrm{inf}}_{\mathrm{inf}}$ 中对象的形式直极限组成的全子范畴, 则 D 给出 $\mathfrak{Ab}'_k$ 到 $\mathfrak{M}_A$ 的一个全子范畴的反等价且保持短正合列。若 k 是代数闭域或有限域, 则 D 给出 $\mathfrak{Ab}_k$ 到 $\mathfrak{M}_A$ 的一个全子范畴的 (保持短正合列的) 反等价, 且此时一个对象 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$ 为 p-可除群当且仅当 $D(G)$ 为自由 $W(k)$-模。

注 1. 在有些文献中, 丢多涅模函子 D 定义为一个共变函子 (例如 [Laz, p. 91]), 而在另一些文献中, 丢多涅模函子则定义为一个反变函子 (例如 [Dem, pp. 63-71]), 这两种定义的等价性可以通过对偶给出 (见下节)。在本书中我们采用的是反变理论。

习题

1. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, 扩域 $k'\supset k$ 也是完全的。对于一个 $A(k)$-

模 M, 在 $M_{k'} = M\otimes_{W(k)}W(k')$ 上定义 F, V 的作用分别为 $F(v\otimes_{W(k)}a) = F(v)\otimes_{W(k)} a^\sigma$, $V(v\otimes_{W(k)} a) = V(v)\otimes_{W(k)} a^{\sigma^{-1}}$, 验证这给出 $M_{k'}$ 一个 $A(k')$-模结构, 且对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{k\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 有 $D(G\otimes_k k'/k') \cong D(G)_{k'}$。

2. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, 证明 $A(k)$ 作为 $W(k)$-模是自由模 (有自由生成元 $1, F^i, V^i, i = 1, 2, \ldots$)。(提示: 考虑 $A(k)\otimes\mathbb{Q}$, 利用习题 1 并注意 $A(\mathbb{F}_p)$ 为交换环。)

3. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, 证明任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{k\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}})$ 可以嵌入一个 p-可除群 $G' \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$ 作为闭子群概形。(提示: 先证明对任意正整数 r, s, $A/A(F^r - V^s)$ 是一个 p-可除群的丢多涅模。)

4. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, M, N 为 $A(k)$ 上的丢多涅模。令 $M\otimes N = M\otimes_{W(k)} N$, 带有 F, V 的作用: $F(v\otimes_{W(k)} w) = F(v)\otimes_{W(k)} F(w)$, $V(v\otimes_{W(k)} w) = V(v)\otimes_{W(k)} V(w)$。验证 $M\otimes N$ 也是丢多涅模。

5. 注意 $p_{\mathcal{W}_{n+1}}$ 的像是 $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{W}_{n+1}$ $(\forall n \geqslant 0)$, 可见对任意完全域 $k \supset \mathbb{F}_p$, $p_{\mathcal{W}_{n+1}}$ 诱导 k-群概形的忠实平坦同态 $\bar{p}\cdot : W_{n+1,m+1} \to W_{n,m}$ $(\forall m \geqslant 0)$。

设 $f : G \to G'$ 为 $\mathfrak{Ab}_{k\mathrm{inf}}^{\mathrm{inf}}$ 中的满同态, 使得 $\ker(f)$ 为 α-群。证明对任意同态 $g : W_{n,m} \to G'$, f 与 $g\circ\bar{p}\cdot$ 的拉回同构于 $\mathcal{W}_{n+1}$ 与一个 α-群的直积。(提示: 参看命题 2 的证明。)

6. 证明引理 1。

7. 设 k 为特征 $p > 0$ 的域而 $g > 2$。举例说明存在 g 维甚特殊阿贝尔簇不是超奇的。

8. 用命题 2 和习题 5 的方法计算 $Ext(\alpha_p, W_{n,m})$ 和 $Ext(W_{n,m}, \alpha_p)$。

第 4 节　对偶与拟极化

1. $\mathcal{W}_{m,n}^D$ 的丢多涅生成元

以下固定一个素数 p, 且记 k 为特征 p 的域。

在推论 3.1.iv) 中我们已经看到 $\mathcal{W}_{n,m}^D \cong \mathcal{W}_{m,n}$，下面我们明确给出一个“标准的”同构 $\mathcal{W}_{n,m}^D \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_{m,n}$，即给出 $\mathcal{W}_{n,m}^D$ 的一个特殊的丢多涅生成元。为方便起见取 $k=\mathbb{F}_p$，并记 $W_{n,m}$ 的结构环为 $B_{n,m}$ (见 (2.2.17))。我们的途径是间接的：先取定 $W_{n,m}^D$ 的一个丢多涅生成元，再将其作为 $B_{n,m}$ 上的 $\mathbb{F}_p$-线性泛函而确定。

令 $H=W_{n,m}^D[V][F]$ (即 $W_{n,m}^D$ 中同构于 α_p 的唯一闭子群概形)，则 H^D 典范同构于 $W_{n,m}$ 的同构于 α_p 的商群概形，其丢多涅生成元可取为 $V^{n*}x_n^{p^m}=x_0^{p^m}$，故由命题 3.1.ii) 可见可取 $W_{n,m}^D$ 的丢多涅生成元 y 使得 $y(x_0^{p^m})=1$。记 $D_y \in Diff_k(B_{n,m},B_{n,m})$ 为 y 所对应的左不变微分算子 (参看定理 Ⅲ.1.1.i))。

当 $n=m=0$ 时，注意 $W_{0,0}\cong\alpha_p$，由命题 3.1.iv) 和命题 Ⅲ.4.1 有 $\alpha(W_{0,0})\cong D(W_{0,0})\cong Lie(W_{0,0}^D/k)$，由 $a^*(x_0)=x_0\otimes 1+1\otimes x_0$ 可见 $D_y(x_0^i)=ix_0^{i-1}$，即 $D_y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}$。由此可见 y 作为 $B_{0,0}$ 上的 k-线性泛函满足 $y(x_0^i)=\delta_{i1}$。

对于一般的 n,m，注意

$$\begin{aligned} V^{i*}y(x_0^{p^{m-i}}) &= y(F^{i*}V^{n*}x_n^{p^{m-i}}) = y(V^{n*}x_n^{p^m}) = 1 \quad (0\leqslant i\leqslant m) \\ F^{i*}y(x_{n-i}^{p^m}) &= y(V^{i*}V^{(n-i)*}x_n^{p^m}) = y(V^{n*}x_n^{p^m}) = 1 \quad (0\leqslant i\leqslant n) \end{aligned} \tag{1}$$

且 $V^{i*}y$ $(F^{i*}y)$ 可看做 $B_{n,m-i}^D$ $(B_{n-i,m}^D)$ 的元。若 $y(V^{n*}x_n^{p^{m-1}})=c$，将 y 换为 $y\dotplus(-cV^*y)$ 就可约化为 $y(V^{n*}x_n^{p^{m-1}})=0$ 的情形 (注意 $y\dotplus(-cV^*y)=(y\otimes(-cV^*y))\circ a_{\mathcal{W}}^*$)；类似地若 $y(V^{(n-1)*}x_n^{p^m})=c$，将 y 换为 $y\dotplus(-cF^*y)$ 就可约化为 $y(V^{(n-1)*}x_n^{p^m})=0$ 的情形。由归纳法最终可以约化为

$$y(x_{n-i}^{p^j}) = y(V^{i*}x_n^{p^j}) = (V^{r*}y)(x_{n-i}^{p^{j-r}}) = \delta_{in}\delta_{jm} \quad (\forall i\leqslant n, j, r\leqslant j) \tag{2}$$

的情形。以下我们证明在此情形有

$$y(\prod_{i=0}^{n} x_i^{j_i}) = \begin{cases} 1 & 若\ j_1=\ldots=j_n=0,\ j_0=p^m \\ 0 & 其他情形 \end{cases} \tag{3}$$

对任一单项式

$$\alpha = x_0^{j_0}\cdots x_n^{j_n} \in B_{n,m} \tag{4}$$

定义其“次数”为

$$d(\alpha)=j_0+pj_1+\cdots+p^n j_n \tag{5}$$

对任意 $d\in\mathbb{N}$, 令 $B_{n,m}^d\subset B_{n,m}$ 为所有 d 次单项式生成的 k-线性子空间。易见这定义了 $B_{n,m}$ 的一个分次 k-代数结构。由引理 2.2.iv) 可见 $a^*(x_n)=\phi_n(x_0\otimes 1,1\otimes x_0,...,x_n\otimes 1,1\otimes x_n)$ 中的任一单项式 $\alpha\otimes\beta$ 满足 $d(\alpha)+d(\beta)=p^n$, 故 a^* 为分次同态。

对 (4) 中的单项式 α 可记

$$a^*_{W_{n,m}}(\alpha)=\sum_{0\leqslant i_0,...,i_n<p^{m+1}} x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}\otimes\alpha_{i_0,...,i_n} \tag{6}$$

其中 $\alpha_{i_0,...,i_n}\in B_{n,m}$。设 (3) 成立, 则由 (6) 有

$$D_y(\alpha)=\alpha_{p^m,0,...,0} \tag{7}$$

由此可见 $D_y(\alpha)$ 的任一单项式的次数等于 $\deg(\alpha)-p^m$。此外, 由 (1) 和 (3) 可得

$$V^{r*}y(\prod_{i=0}^n x_i^{j_i})=\begin{cases}1 & \text{若 } j_1=...=j_n=0,\ j_0=p^{m-r}\\ 0 & \text{其他情形}\end{cases} \tag{8}$$

由此可见 $D_{V^{r*}y}(\alpha)$ 的每一项的次数等于 $\deg(\alpha)-p^{m-r}$。故有

$$D_{V^{r*}y}(B_{n,m}^d)\subset B_{n,m}^{d-p^{m-r}}\quad(\forall d,r) \tag{9}$$

特别地, 当 $d<p^{m-r}$ 时有 $D_{V^{r*}y}(B_{n,m}^d)=0$。

现在来证明 (3)。首先注意若 $i:G_1=\mathrm{Spec}(R_1)\hookrightarrow G=\mathrm{Spec}(R)$ 为 $\mathfrak{Ab}_{\inf}^{\inf}$ 中的闭嵌入而 $I=\ker(i^*)\subset R$, 由定义可知 $i^{D*}=i^{*D}:R_1^D\to R^D$ 为 k-代数同态, 其像为

$$\{\beta\circ i^*|\beta\in R_1^D\}=\{\alpha\in R^D|\alpha(I)=0\} \tag{10}$$

特别地, 若 $G=W_{n,m}$ 而 $G_1\subset G$ 为 $F_{G/k}$ 的像, 则 $G_1=W_{n,m-1}$ 且 $i:G_1\to G$ 的卡迪耶对偶可看作 $V_{G^D/k}$ 的余像, 它同构于 $i^D:G^D\to G_1^D$ 的像。故

$$V^*(R^D)=\{\alpha\in R^D|\alpha((x_0^{p^m},...,x_n^{p^m}))=0\} \tag{11}$$

由丢多涅元的定义有

$$a^*_{W^D_{n,m}}(y) = \phi_m(V^{m*}y \otimes 1, 1 \otimes V^{m*}y, ..., y \otimes 1, 1 \otimes y) \tag{12}$$

注意 $\mu = a^{*\vee}_{W^D_{n,m}} : B_{n,m} \otimes B_{n,m} \to B_{n,m}$ ($a^*_{W^D_{n,m}}$ 的对偶) 为 $B_{n,m}$ 的乘法，而 (12) 的左边等于 $y \circ \mu$, 故对任意 $x, x' \in B_{n,m}$ 有

$$D_y(xx') = \mu \circ \phi_m(D_{V^{m*}y} \otimes 1, 1 \otimes D_{V^{m*}y}, ..., D_y \otimes 1, 1 \otimes D_y)(x \otimes x') \tag{13}$$

(见定理 Ⅲ.1.1.iii))。取 $x = x_0^{p^m}$, 则由 (2) 和 (13) 可见

$$D_y(x_0^{p^m} x') = x' + x_0^{p^m} D_y(x') \tag{14}$$

类似地，取 $x = x_i^{p^m}$ $(i > 0)$ 可得

$$D_y(x_i^{p^m} x') = x_i^{p^m} D_y(x') \quad (\forall i > 0) \tag{15}$$

由 (14) 和 (15) 用归纳法得

$$\begin{aligned} & D_y((\prod_{i=0}^n x_i^{j_i})^{p^m} x') \\ = & \begin{cases} j_0(x_0^{j_0-1}\prod_{i=1}^n x_i^{j_i})^{p^m} x' + (\prod_{i=0}^n x_i^{j_i})^{p^m} D_y(x') & \text{若 } j_0 > 0 \\ (\prod_{i=0}^n x_i^{j_i})^{p^m} D_y(x') & \text{若 } j_0 = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

特别地，对任意单项式 $x' = \prod_{i=0}^n x_i^{j_i}$ 及任意 $j > 0$ 有 $y(x_j^{p^m} x') = \overline{D_y(x_j^{p^m} x')} = 0$, 且当 $x' \neq 1$ 时有 $y(x_0^{p^m} x') = \overline{D_y(x_0^{p^m} x')} = 0$。这样对于 (3) 的证明仅剩下 $j_0, ..., j_n < p^m$ 的情形。

下面对 n 用归纳法，来证明 (3) 对 $m \leqslant n$ 成立。由归纳法可设 (9) 对 $r > 0$ 成立，由 (16) 和通过 (13) 用归纳法可见 (9) 对 $r = 0$ 也成立。因此，若 (4) 中的单项式 α 的次数不等于 p^m 则 $D_y(\alpha)$ 的各项的次数都不等于 0, 从而 $y(\alpha) = 0$。这样只需考虑 $\deg(\alpha) = p^m$ 的情形。若 $j_n > 0$, 则由 $n \geqslant m$ 可见 $\deg(\alpha) = p^m$ 仅当 $n = m$ 且 $j_0 = ... = j_{m-1} = 0, j_m = 1$ 时成立，但由上面 y 的取法有 $y(x_m) = 0$。故只需考虑 $j_n = 0$ 的情形。

令 $y' = y^p$, 由 (2) 有

$$y'(x_{n-i}^{p^j}) = \delta_{i(n-1)}\delta_{jm} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1,\ 0 \leqslant j \leqslant m) \tag{17}$$

注意 $y' \in B_{n,m}^D$ 所定义的 $W_{n,m}^D$ 的商群概形为 $F_{G^D/k}$ 的像，其卡迪耶对偶为 $W_{n,m}$ 的由理想 (x_0) 定义的闭子群概形，故其结构代数由 $x_1, ..., x_n$ 生成。若 $m < n$，由归纳法假设有

$$y'(\prod_{i=1}^{n} x_i^{j_i}) = \begin{cases} 1 & 若\ j_2 = ... = j_n = 0,\ j_1 = p^m \\ 0 & 其他情形 \end{cases} \tag{18}$$

注意 $y'(\alpha) = y(V^*\alpha)$，故 (18) 给出

$$y(\prod_{i=0}^{n-1} x_i^{j_i}) = \begin{cases} 1 & 若\ j_1 = ... = j_{n-1} = 0,\ j_0 = p^m \\ 0 & 其他情形 \end{cases} \tag{19}$$

若 $m = n$，则当 $j_0, ..., j_{n-1} < p^m$ 时仍有 $y(\prod_{i=0}^{n-1} x_i^{j_i}) = 0$，这就完成了归纳证明。

对一般的 n, m，由于 $W_{n,m}$ 可嵌入 $W_{n+m,m}$ 作为闭子群概形，由 (8) 可见 (3) 仍成立。总之有

定理 1. 记 $B_{n,m}$ 为 $\mathcal{W}_{n,m}$ 的结构环，则 (3) 定义的线性泛函 $y \in B_{n,m}^D$ 为 $\mathcal{W}_{n,m}^D$ 的丢多涅生成元。此外，

i) 对任意 $0 \leqslant i \leqslant n$ 和 $0 \leqslant j \leqslant m$，$z = V^{j*}y^{p^i} \in D(\mathcal{W}_{n,m}^D)$ 为 $\mathcal{W}_{n,m}^D$ 的满足

$$z(x_r^{p^{m-s}}) = \delta_{ir}\delta_{js} \quad (\forall r \leqslant n,\ j \leqslant m) \tag{20}$$

的唯一丢多涅元。

ii) (14) 和 (15) 对任意 $x' \in B_{n,m}$ 成立。

iii) $B_{n,m}$ 具有分次 $\mathbb{F}_p$-代数结构

$$B_{n,m} = \bigoplus_{d=0}^{(p^{n+1}-1)(p^{m+1}-1)/(p-1)} B_{n,m}^d \tag{21}$$

其中每个单项式 $\alpha = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$ 为次数 $d(\alpha) = i_0 + pi_1 + \cdots + p^n i_n$ 的齐次元，而 $B_{n,m}^d$ 是所有 d 次单项式生成的 $\mathbb{F}_p$-线性子空间。对 y, V^*y, $V^{2*}y$, ..., $V^{m*}y$ 的任一单项式 β 有

$$D_\beta(B_{n,m}^d) \subset B_{n,m}^{d-\deg(\beta)} \quad (\forall d) \tag{22}$$

特别地当 $d < \deg(\beta)$ 时有 $D_\beta(B^d_{n,m}) = 0$。

定理 1 有助于理解丢多涅元与微分算子的关系。注意 $x_0, ..., x_n$ 为独立变元, 若记微分算子

$$D_{i,j} = \frac{1}{p^{m-j}!}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{p^{m-j}}\Big|_0 \in Diff_{\mathbb{F}_p}(B_{n,m}, \mathbb{F}_p) \tag{23}$$

则定理 1.i) 说明 $B_{n,m}$ 上的 $\mathbb{F}_p$-线性泛函 $V^{j*}y^{p^i}$ 可以理解为 $D_{i,j}$ ($\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$)。

特别地, 注意 $\mathcal{W}_0 \cong G_{a/\mathbb{Z}}$, 故 $B_{0,m} \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^{p^{m+1}})$, 而 $\mathcal{W}_{0,m} \cong \alpha_{p^{m+1}}$ 的加法由 $a^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ 给出。由此易见引理 I.2.2 中的 $D^{(p^i)}$ ($0 \leqslant i \leqslant m$) 都是左不变微分算子, 其对应的线性泛函 $t_i \in B^D_{0,m}$ 满足

$$t_i(x^j) = \delta_{p^i j} \quad (0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j < p^{m+1}) \tag{24}$$

故由定理 1.i) 有 $t_i = V^{m-j*}y$ ($0 \leqslant i \leqslant m$), 从而由引理 I.2.2.ii) 得

$$a^*(y) = \lambda_m(V^{m*}y \otimes 1, 1 \otimes V^{m*}y, V^{m-1*}y \otimes 1, 1 \otimes V^{m-1*}y, ..., y = \otimes 1, 1 \otimes y) \tag{25}$$

将此与定义 3.1 比较即可见 λ_m 与 ϕ_m 在 $B^D_{0,m}$ 上一致。总之有

推论 1. 记号如定理 1, 则 $\mathcal{W}_{n,m}$ 的丢多涅元 $V^{j*}y^{p^i}$ 看作 $B_{n,m}$ 上的 $\mathbb{F}_p$-线性泛函等于 (23) 中的微分算子 $D_{i,j}$。特别地, $\alpha^D_{p^{n+1}} \cong \mathcal{W}_{n,0}$ 的结构环同构于 $\mathbb{F}_p[y_0, ..., y_n]/(y_0^p, ..., y_n^p)$, 其加法由

$$a^*(y_i) = \lambda_i(y_0 \otimes 1, 1 \otimes y_0, y_1 \otimes 1, 1 \otimes y_1, ..., y_i \otimes 1, 1 \otimes y_i) \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{26}$$

给出, 其中 λ_i 为引理 I.1.2.ii) 中的多项式。此外,

$$\lambda_i \equiv \phi_i \pmod{(p, y_0^p, ..., y_n^p)} \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{27}$$

其中 ϕ_i 为引理 2.2 中的多项式。

例 1. 由 (2.1.24) 可见在 $\mathbb{F}_p$ 上有 $\phi_1 = \lambda_1$, 但对于较大的 n, ϕ_n 与 λ_n 不相等。

2. 丢多涅模的对偶

设 k 为特征 p 的完全域, $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{\mathrm{kinf}}^{\mathrm{inf}})$, 我们先来看 $D(G)$ 和 $D(G^D)$ 的关系。

对任意 $a \in k$, 令 $f_a \in End_k(W_{n,n})$ 为 ax_n 所对应的加法群概形自同态, 则有 $f_a^*(x_0) = f_a^*(V^{n*}x_n) = a^{p^{-n}}x_0$, 由定理 1 可见 $f_a^{D*}(y) = ay$, 这说明按 $x_n \mapsto y$ 给出的同构 $\phi : W_{n,n}^D \to W_{n,n}$ 有 $f_a^D = f_a$。再由 D 的加性和归纳法可见对任意 $b \in W(k)$, $b\cdot : W_{n,n} \to W_{n,n}$ 的卡迪耶对偶也是 $b\cdot$。

任取单同态 $i : G^D \hookrightarrow W_{n,n}^r$, 则 $i^D : W_{n,n}^r \to G$ 为满同态, 且任意同态 $G^D \to \mathcal{W} \otimes k$ 经过 $W_{n,n}$。由定理 1, 一个元 $x \in D(G^D)$ 典范等价于一个同态 $x^D : W_{n,n} \to G$, 由定理 3.1 和 (3.2.10) 可见这又典范等价于一个 A-模同态 $x^{D*} : D(G) \to D(W_{n,n}) \cong A/A(F^{n+1}, V^{n+1})$, 故有典范一一映射

$$f : D(G^D) \xrightarrow{\simeq} Hom_A(D(G), A/A(F^{n+1}, V^{n+1})) \tag{1}$$

易见 f 是加性的, 且由命题 3.1.ii) 可见 f 是 $W(k)$-线性的。注意对任意 $y \in D(G) \cong Hom_k(G, W_{n,n})$, $f(x)(y) = x^{D*}(y)$ 可以理解为 $y \circ x^D : W_{n,n} \to W_{n,n}$。由上所述可见对任意 $b \in W(k)$ 有 $f(bx)(y) = bf(x)(y)$。记 $f(x)(y) = \langle x, y\rangle_A$, 则 $\langle , \rangle_A$ 是 $W(k)$-双线性的。

记 $\bar{1} \in A/A(F^{n+1}, V^{n+1})$ 为 $1 \in A$ 的像。易见 $A/A(F^{n+1}, V^{n+1})$ 作为 $W(k)$-模可以分解为直和

$$A/A(F^{n+1}, V^{n+1}) = \bigoplus_{i=-n}^{-1} W(k)V^{-i}\bar{1} \bigoplus_{i=0}^{n} W(k)F^i\bar{1} \tag{2}$$

其中 $W(k)V^{-i}\bar{1} \cong W(k)/p^{n+1+i}W(k)$, $W(k)F^i\bar{1} \cong W(k)/p^{n+1-i}W(k)$ (作为 $W(k)$-模)。由此得到 $(2n+1)$ 个 $W(k)$-双线性型 $f_{-j} : D(G^D) \times D(G) \to W(k)/p^{n+1-j}W(k)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 和 $f_i : D(G^D) \times D(G) \to W(k)/p^{n+1-i}W(k)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 使得

$$f(x)(y) = \sum_{i=-n}^{-1} f_i(x,y)V^{-i}\bar{1} + \sum_{i=0}^{n} f_i(x,y)F^i\bar{1} \quad (\forall x \in D(G^D), y \in D(G)) \tag{3}$$

由 $f(x)$ 是 A-模同态有 $f(x)(Fy) = Ff(x)(y)$, 代入 (3) 比较各项得

$$\begin{aligned} &f_{-n}(x, Fy) = 0,\ f_i(x, Fy) = pf_{i-1}(x, y)^{\sigma}\ (-n < i \leqslant 0), \\ &f_i(x, Fy) = f_{i-1}(x, y)^{\sigma}\ (1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned} \tag{4}$$

再将 $f(x)(Vy) = Vf(x)(y)$ 代入 (3) 比较各项得

$$\begin{aligned} &f_i(x, Vy) = f_{i+1}(x, y)^{\sigma^{-1}}\ (-n \leqslant i \leqslant 0), \\ &f_i(x, Vy) = pf_{i+1}(x, y)^{\sigma^{-1}}\ (1 \leqslant i < n),\ f_n(x, Vy) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 用归纳法得

$$f_{-i}(x, y) = f_0(x, F^i y)^{\sigma^{-i}},\ f_i(x, y) = f_0(x, V^i y)^{\sigma^i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{6}$$

故所有 f_i 由 f_0 唯一决定。这样 f_0 给出的 $W(k)$-线性映射 $D(G^D) \to Hom_{W(k)}(D(G), W(k)/p^{n+1}W(k))$ 是一一映射, 换言之 f_0 为完全配对。

另一方面, 对任意 $x \in D(G^D)$, 由定义有

$$f(Fx) = (Fx)^{D*} = (x^D \circ V_{W_{n,n}/k})^* \tag{7}$$

故对任意 $y \in D(G)$ 有 $f(Fx)(y) = y \circ x^D \circ V_{W_{n,n}/k} = (V_{W_{n,n}/k} \circ y \circ x^D)^{(p)}$, 从而

$$f_0(Fx, y) = f_0(x, Vy)^{\sigma} \tag{8}$$

类似地有

$$f_0(Vx, y) = f_0(x, Fy)^{\sigma^{-1}} \tag{9}$$

注意 (8) 和 (9) 决定 F 和 V 在 $D(G^D)$ 上的作用。

对于 $\mathfrak{Ab}_{ket}^{inf}$ 和 $\mathfrak{Ab}_{kinf}^{et}$ 中的对象, 上面的事实仍成立, 但需用另法建立, 这里仅简述建立的方法。首先, 对 $\mathcal{W} \otimes k$ 的任意有限子群概形, 由上面的结果取极限可见有 $W(k)$-双线性型 $\langle , \rangle_A : D(G^D) \times D(G) \to A/p^l A$ $(l = l(G))$。注意

$$D(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong A/A(F-1, V^n),\ D(\mu_{p^n}) \cong A/A(V-1, F^n) \tag{10}$$

作为 W-模它们都同构于 W/p^nW。若 k 是代数闭域, 则可约化为 $G \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 或 $G \cong \mu_{p^n}$ 的情形, 此时 $\langle x, y\rangle = f_0(x, y) = f(x)(y)$, 且易见

(8), (9) 成立。对一般的 k 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 注意 $D(G\otimes_k \bar{k}/\bar{k}) \cong D(G/k)\otimes_{W(k)} W(\bar{k})$, 而 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用于 $D(G\otimes_k \bar{k}/\bar{k})$ 上且与在 $W(\bar{k})$ 上的作用相容, 将 f_0 模 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用即可将 f_0 建立在 k 上。总之有

命题 1. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, $G\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_{1k})$, 则对充分大的 n ($n\geqslant l(G)$ 即可) 有一个典范 $W(k)$-双线性完全配对

$$\langle,\rangle : D(G^D)\times D(G)\to W(k)/p^nW(k) \tag{11}$$

满足条件

$$\langle Fx,y\rangle=\langle x,Vy\rangle^{\sigma},\ \langle Vx,y\rangle=\langle x,Fy\rangle^{\sigma^{-1}}\quad (\forall x\in D(G^D), y\in D(G)) \tag{12}$$

这样由 $D(G)$ 的 A-模结构可给出 $D(G^D)$ 的 A-模结构。

定义 1. 设 k 为特征 $p>0$ 的完全域, M 为有限长的 A-模。令 M^D 为下述 A-模: 作为 $W(k)$-模

$$M^D\cong Hom_{W(k)}(M,W(k)/p^nW(k))\quad (n\gg 0) \tag{13}$$

(在同构之下与 n 的选择无关), 而 F 和 V 的作用分别为

$$Fx(y)=x(Vy)^{\sigma},\ Vx(y)=x(Fy)^{\sigma^{-1}}\quad (\forall x\in M^D, y\in M) \tag{14}$$

称 M^D 为 M 的卡迪耶对偶。

注意这给出 $\mathfrak{M}_A^0$ 到自身的对合反等价 $\mathfrak{M}_A^0\to\mathfrak{M}_A^0$, 而命题 1 说明

$$D(G^D)\cong D(G)^D \tag{15}$$

特别地, 由定理 1 和 (10) 可见

$$(A/A(F^m,V^n))^D\cong A/A(F^n,V^m),\ (A/A(F-1,V^n))^D\cong A/A(V-1,F^n) \tag{16}$$

这些也不难通过直接计算得出。

设 $G = \varinjlim_n G_n \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$ 为 p-可除群，则其塞尔对偶 G^t 也是 p-可除群 (见命题 1.1)，故由推论 3.3 可知 $D(G^t)$ 为自由 $W(k)$-模。注意 $(G^t)_n \cong G_n^D$ $(\forall n)$，由命题 1 可见有一个典范 $W(k)$-双线性完全配对

$$\langle , \rangle : D(G^t) \times D(G) \to W(k) \tag{17}$$

且满足 (12)。这样由 $D(G)$ 的 A-模结构和 $\langle , \rangle$ 可得到 $D(G^t)$ 的 A-模结构。

设 A-模 M 作为 $W(k)$-模是有限生成的自由模，定义

$$M^t = Hom_{W(k)}(D(G), W(k)) = M^\vee \tag{18}$$

并定义 F, V 在 M^t 上的作用分别为

$$(F\phi)(y) = \phi(Vy)^\sigma, \quad (V\phi)(y) = \phi(Fy)^{\sigma^{-1}} \quad (\forall \phi \in M^t, y \in M) \tag{19}$$

易见这给出 M^t 一个 A-模结构，称为 M 的塞尔对偶。这也可以表达为一个 $W(k)$-双线性完全配对 $\langle , \rangle : M^t \times M \to W(k)$，满足

$$\langle F\phi, y\rangle = \langle \phi, Vy\rangle^\sigma, \quad \langle V\phi, y\rangle = \langle \phi, Fy\rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall \phi \in M^t, y \in M) \tag{20}$$

显然 $(M^t)^t$ 典范同构于 M。上面的结果可表述为

推论 2. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域，$G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$ 为 p-可除群，则有典范 A-模同构

$$D(G^t) \cong D(G)^t \tag{21}$$

这也可以理解为为一个 $W(k)$-双线性完全配对 $\langle , \rangle : D(G^t) \times D(G) \to W(k)$，满足

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, Vy\rangle^\sigma, \quad \langle Vx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall x \in D(G^t), y \in D(G)) \tag{22}$$

例 2. 设 $k = \mathbb{F}_p$，r, s 为互素的正整数，不难验证 $(F^s - V^r) \subset A$ 为素理想，而 $M = A/(F^s - V^r)$ 作为 $\mathbb{Z}_p$-模是自由模 (秩为 $r + s$)，故对应于一个 $\mathbb{F}_p$ 上的 p-可除群，记为 $G_{r,s}$。不难验证

$$M^t \otimes \mathbb{Q} \cong (A/(F^r - V^s)) \otimes \mathbb{Q} \tag{23}$$

这说明 $G^t_{r,s} \sim G_{s,r}$。由此及推论 1 可见

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Lie}(G_{r,s}) = r, \quad \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Lie}(G^t_{r,s}) = s \tag{24}$$

特别地, 若 $r = 1$, 则有 $M^t \cong A/(F^r - V^s)$, 此时 $G^t_{r,s} \cong G_{s,r}$。

设 $f : G \to G'$ 为 p-可除群的同源, 则 $f^* : D(G') \to D(G)$ 的塞尔对偶 $f^{*t} : D(G)^t \to D(G')^t$ 对应于 $f^t : G'^t \to G^t$, 即 $f^{*t} = f^{t*} : D(G^t) \to D(G'^t)$。

对于 k 上的阿贝尔簇 X, 由定义 $D(X) = D(\varphi_p X)$, 从而由例 1.4 和 (21) 有 $D(\hat{X}) \cong D(X)^t$。

3. 拟极化

设 X 为 k 上的阿贝尔簇, 则存在极化 $\phi_{\mathcal{L}} : X \to \hat{X}$ ($\mathcal{L}$ 为 X 上的丰富层), 它诱导同源

$$\varphi_p(\phi_{\mathcal{L}}) : \varphi_p(X) \to \varphi_p(\hat{X}) \cong \varphi_p(X)^t \tag{1}$$

由推论 2 可见这又等价于一个 $W(k)$-双线性非退化配对 $\langle , \rangle : D(X^t) \times D(X^t) \to W(k)$, 满足

$$\langle Fx, y \rangle = \langle x, Vy \rangle^{\sigma}, \quad \langle Vx, y \rangle = \langle x, Fy \rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall x, y \in D(X^t)) \tag{2}$$

这里要注意, 我们通过 μ_X 将 X 与 $\hat{\hat{X}}$ 等同起来, 有 $\hat{\phi}_{\mathcal{L}} \circ \mu_X = \phi_{\mathcal{L}}$, 即 $\phi_{\mathcal{L}}$ 是自对偶的 (见命题 Ⅶ.2.5)。但受到特征 0 情形的解析方法 (参看 §Ⅶ.5 节) 的影响, 通常是用 $-\mu_X$ 将 X 与 $\hat{\hat{X}}$ 等同起来, 这样 $\phi_{\mathcal{L}}$ 的对偶就是 $-\phi_{\mathcal{L}}$ 了。因此 $\langle , \rangle$ 满足

$$\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle \tag{3}$$

即为交错型。

对任意 p-可除群 G, 一个同源 (如果存在的话) $f : G \to G^t$ 若满足 $f^t = -f$, 则称为一个*拟极化* (*quasi-polarization*)。由推论 2 可见 G 的一个拟极化等价于一个 $W(k)$-双线性非退化交错型 $\langle , \rangle : D(G^t) \times D(G^t) \to W(k)$, 满足

$$\langle Fx, y \rangle = \langle x, Vy \rangle^{\sigma}, \quad \langle Vx, y \rangle = \langle x, Fy \rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall x, y \in D(G^t)) \tag{4}$$

对于一个无挠 (即 $W(k)$-平坦) 丢多涅模 M, 一个 $W(k)$-双线性非退化交错型 $\langle , \rangle : M^t \times M^t \to W(k)$ 称为拟极化, 如果它满足

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, Vy\rangle^{\sigma}, \quad \langle Vx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall x, y \in M^t) \tag{5}$$

因此一个 p-可除群 G 的拟极化诱导 $M = D(G)$ 的一个拟极化。注意 $\langle , \rangle$ 也可以理解为一个 A-模单同态 $D(f) : D(G)^t \to D(G)$。由 $\langle , \rangle$ 是交错型可见 $\deg(f) = \det(D(f))$ 为平方数 (参看习题 3), 详言之 $\deg f = p^{2l}$, 其中 $2l$ 为 $\mathrm{coker}(D(f))$ 的长度。

因此一个阿贝尔簇 X 的极化诱导 $\varphi_p(X)$ 的一个拟极化, 从而诱导 $D(X)$ 的一个拟极化。若 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为阿贝尔簇 X 的极化, 则它诱导的 $\varphi_p(X)$ 的拟极化的次数等于 $\deg(\phi_{\mathcal{L}})$ 的 p-部分, 即 p^r 使得 $p^r \parallel \deg(\phi_{\mathcal{L}})$ (回忆由推论 Ⅶ.2.2.vi) 可见 r 是偶数)。特别地, 若 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为主极化 (即为同构), 则它所诱导的交错型为完全配对。总之有

定理 2. 设 k 为特征 $p > 0$ 的完全域, X 为 k 上的阿贝尔簇, 则任一极化 $\phi_{\mathcal{L}} : X \to \hat{X}$ ($\mathcal{L}$ 为 X 上的丰富层) 典范地诱导 $\varphi_p(X)$ 的一个拟极化, 它等价于 $D(X)$ 的一个拟极化 $\langle , \rangle$, 而它的次数等于 p^r 使得 $p^r \parallel \deg(\phi_{\mathcal{L}})$ (r 为偶数)。特别地, 若 $\phi_{\mathcal{L}}$ 为主极化 (即为同构), 则 $\langle , \rangle$ 为完全配对。

由例 2 可见

推论 3. 设 X 为特征 $p > 0$ 的完全域 k 上的阿贝尔簇。若存在满同态 $\varphi_p(X) \to G^r_{m,n} \otimes k$, 则也存在满同态 $\varphi_p(X) \to G^r_{n,m} \otimes k$。

习题

1. 验证例 2 的断言。

2. 设 k 为特征 $p > 0$ 的代数闭域, 群概形 $\mu_{p/k} = \mathrm{Spec} k[t]/(t^p)$, 其中 t 满足 $m^*(1+t) = (1+t) \otimes_k (1+t)$。证明理想 (t) 中有生成元 x 满足 $m^*(x) = x \otimes_k 1 + 1 \otimes_k x + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i!(p-i)!} x^i \otimes_k x^{p-i}$。 (提示: 取 $x = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} t^i$, 为 $\ln(1+t)$ 的泰勒展开式的截断, 其余项除了 $\frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p$ 外, 在 m^* 作用后模 x^p 均为 0。)

3. 设 R 为平坦 $\mathbb{Z}$-代数且为整环, T 为 R 上的 $n \times n$ 反对称方阵。证明 $\det(T) \in \mathbb{Q}^2$。

第 5 节　丢多涅模的结构和分类

1. 源晶体的结构

取定一个素数 p, 并记 k 为特征 p 的域。

设 G 为 k 上的交换形式群。前面说过, 丢多涅模 $D(G)$ 也可以用晶体上同调给出, 故也称 $D(G)$ 为**丢多涅晶体** (*Dieudonné crystal*, 有些文献中称之为 (F,V)-**晶体**)。注意若 G 为 p-可除群, 则 $D(G)$ 作为 $W(k)$-模是有限秩自由模, 故若 $f: G \to G'$ 为 p-可除群的同源, 则 $D(f): D(G') \to D(G)$ 为单射且 $\mathrm{coker}(D(f))$ 的长度有限, 从而存在 $n>0$ 使得 $p^n D(G) \subset \mathrm{im}(D(f))$。这样, $D(G)[\frac{1}{p}] \cong D(G)\otimes\mathbb{Q}$ 就可以看作 G 的同源等价类所对应的模。因此我们用术语**源晶体** (*isocrystal*) 指一个 $B = A[\frac{1}{p}] \cong A\otimes\mathbb{Q}$ 上的模, 它作为 $K = W(k)\otimes\mathbb{Q}$ 上的线性空间是有限维的。记 v_p 为 K 的 p-进赋值。

我们先研究源晶体的结构。设 M 为源晶体, 则 F 可以看作 M 的 K-半线性自同态, 而由 $FV = p$ 可见 F 是单射, 从而是一一映射。注意在 B 中可以将 V 表为 pF^{-1}, 为简单起见我们只考虑 F 而不考虑 V, 即令 $B = K[F, F^{-1}]/(Fa - a^\sigma F|\forall a\in K)$ 而考虑 K-有限维的 (左) B-模, 称为 F-**源晶体**。

任意 $f\neq 0\in B$ 可表为标准形式 $f = c_0F^n + c_1F^{n-1} + \cdots + c_n$ $(c_0,\ldots,c_n\in K,\ c_0\neq 0)$, 即 F 的多项式。称 n 为 f 的**次数**, 记为 $\deg f$ (并令 $\deg 0 = -1$), 且记 $v_p(f) = \min\limits_{i=0}^{n} v_p(c_i)$。易见 B 按次数为 (非交换) 欧几里得环, 即对任意 $f,g\neq 0\in B$, 存在 $r,s\in B$ 使得 $f = rg + s$ 且 $\deg s < \deg g$。这样就可以由“左辗转相除法”得到

引理 1. 对任意 $f,g\neq 0\in B$, 存在 $r,s\in B$ 使得 $f,g\in B(rf+sg)$。故 B 的任一左理想由一个元生成。

注 1. 若 G 为无穷小 p-可除群, 则 $D(G)$ 为 $W[[F]]$-模, 且由 $W[[F]]$-模的分类也可以给出无穷小 p-可除群的分类, 在 [Man] 中就是这样做的。详言之, 令 $A_1 = W(k)[[F]]/(Fa - a^\sigma F|\forall a\in W(k))$, $A_0 = W(k)[F]/(Fa - a^\sigma F|\forall a\in W(k))$ (看作 A_1 的子环), 则 $D(G)$ 可以看作 A_1-模, 而它作为

A_1-模的结构的研究可以约化为 A_0-模的结构的研究。为此只需说明对任意非零元 $f \in A_1$, 存在可逆元 $h \in A_1$ 使得 $hf \in A_0$ (这称为“魏尔斯特拉斯预备定理”)。

首先, 易见 A_1 中任一常数项为 1 的元是可逆元 (习题 2)。设 $f = c_0 + c_1F + \cdots$, 令 c_m 为赋值最小的非零系数中脚标最小的, 为简单起见可将 f 除以 p 的一个幂, 从而不妨设 $c_m \in W - pW$, 这样就有常数项为 1 的元 $c \in A_1$ 使得

$$f = c_0 + c_1F + \cdots + c_{m-1}F^{m-1} + cc_mF^m \tag{1}$$

其中 $c_0, ..., c_{m-1}$ 或者为 0 或者赋值 > 0。故 $c^{-1}f = c_mF^m + g$, 其中 g 的各项系数的赋值都不小于 1。记 $h_1 = c^{-1}$, 将 f 换为 h_1f 再重复上面的讨论, 此时得到的 (1) 中的 c 除常数项外各项的赋值均不小于 1, 故 $c^{-1}f = c_mF^m + g$, 其中 g 的次数大于 m 的各项系数的赋值都不小于 2, 再令 $h_2 = c^{-1}$ 并将 f 换为 h_2f, 等等。由归纳法就得到 $h_1, h_2, ... \in A_1$, 其中 h_i 的常数项为 1 而其余各项系数的赋值都不小于 $i-1$, 且 $h_i \cdots h_1 f = c_mF^m + g$, 其中 g 的次数大于 m 的各项系数的赋值都不小于 i。由 $W(k)$ 的完备性, 易见无穷乘积 $\prod\limits_{i=1}^{\infty} h_i$ (乘的次序从右到左) 收敛, 记这个积为 h, 则 h 为 A_1 中的可逆元。由归纳过程可见 hf 的次数大于 m 的各项系数的赋值都不小于任意 i, 从而为 0, 即 $hf \in A_0$。

现在考虑 k 为代数闭域的特殊情形。

我们先来研究左 B-模 $M = B/Bf$ $(f \neq 0 \in B)$, 其中 f 的常数项非零。为方便起见不妨设 f 是 F 的首一多项式, 记

$$f = F^n + c_1F^{n-1} + \cdots + c_n \quad (c_n \neq 0) \tag{2}$$

则 $\dim_K M = n$。

一个技术性的方法是在 B 中添加 p 的某个 N 次方根 π, 并令 $\pi^\sigma = \pi$, $F\pi = \pi F$。记 $K' = K[\pi]$, $B' = B[\pi]$, 我们来说明对适当选取的 N, f 在 B' 中能分解成一次因子的积, 由归纳法只需验证 f 可以被某个 $F - a$ $(a \in K')$ 右整除即可。不难算出用 $F - a$ 右除 f 所得的余数为

$$\sum_{i=0}^{n} c_{n-i}a^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{i-1}} \quad (c_0 = 1) \tag{3}$$

令 $r = N\min_{i=1}^{n}\frac{v_p(c_i)}{i}$ (我们取 N 使得 r 为整数), 若取 a 使得 $v_\pi(a)=r$, 则 (3) 中各项的 π-赋值都不小于 nr, 且除首项 $a^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{n-1}}$ 外至少还有一项的 π-赋值等于 nr。注意若记 $\bar{a}$ 为 $a \pmod{\pi}$, 则 $a^{\sigma^i} \pmod{\pi}$ 为 $\bar{a}^{p^i}$。故 (3) 模 π 有一个零点 $a=a_0$ 使得 $v_\pi(a_0)=r$。归纳地设已找到 (3) 模 π^i 的一个零点 a_{i-1} 使得 $v_\pi(a_{i-1})=r$, 令 $a_i = a_{i-1}+\pi^{r+i}t$ $(t\in W)$, 将 $a=a_i$ 代入 (3) 并模 π^{i+1}, 得到 $\bar{t}$ 的一个多项式, 其首项为一个非零常数乘以 $\bar{t}^{p^{n-1}}$, 任取其一个零点给出 t, 则得 (3) 模 π^{i+1} 的一个零点 a_i。由归纳法我们得到一个序列 $a_0,a_1,\ldots\in\pi^r W[\pi]$ 使得 $a_i-a_{i-1}\in\pi^{r+i}W[\pi]$ 且 a_i 为 (3) 模 π^{i+1} 的零点。令 $a=\lim_{i\to\infty}a_i$, 则 $v_\pi(a)=r$ 且 a 为 (3) 的零点, 故 f 被 $F-a$ 右整除。(注: 这是习题 3 的特殊情形。)

下面来证明对任意源晶体 M, $M'=M\otimes_K K'=M[\pi]$ 有一组由 F 的特征向量组成的 K'-基 (这里不预先取定 π, 下面可视需要而改变)。对任意 $v\neq 0\in M'$, 由上所述存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\neq 0\in K'$ 使得 $v_1=(F-\alpha_2)\cdots(F-\alpha_n)v\neq 0$ 而 $(F-\alpha_1)v_1=0$, 即 $Fv_1=\alpha_1 v_1$。

归纳地设已给定 K'-线性无关的 $v_1,\ldots,v_r\in M'$ 使得 $Fv_i=\alpha_i v_i$ $(\alpha_i\in K', 1\leqslant i\leqslant r)$, 则 $v_1,\ldots,v_r$ 生成的 K'-子模 $M'_r\subset M'$ 也是源晶体, 故由上所述在源晶体 M'/M'_r 中有 F 的特征向量, 换言之存在 $v\in M'-M'_r$ 及 $\alpha_{r+1}\in K'$ 使得 $Fv-\alpha_{r+1}v'\in M'_r$, 这样就存在 $\mu_1,\ldots,\mu_i\in K'$ 使得

$$Fv=\alpha_{r+1}v+\mu_1v_1+\cdots+\mu_rv_r \tag{4}$$

我们来寻找 $\lambda_1,\ldots,\lambda_i\in K'$ 使得

$$F(v+\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r)=\alpha_{r+1}(v+\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r) \tag{5}$$

将 (4) 代入 (5), 可见 (5) 等价于

$$\mu_i+\alpha_i\lambda_i^\sigma-\alpha_{r+1}\lambda_i=0 \quad (1\leqslant i\leqslant r) \tag{6}$$

由 $\alpha_i\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant r+1)$ 可见 (6) 有解 (见习题 3) $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, 从而 $v_{r+1}=v+\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r$ 满足 $Fv_{r+1}=\alpha_{r+1}v_{r+1}$。这就归纳地证明了 M' 有一组由 F 的特征向量组成的 K'-基。

此外我们注意, 若 $Fv = \alpha v$ 而 $b \neq 0 \in K'$, 则有

$$F(bv) = b^\sigma b^{-1} \alpha v \tag{7}$$

令 $s = v_\pi(\alpha)$, 则可取 b 使得 $b^\sigma b^{-1}\alpha = \pi^s$ (见习题 3)。总之有

引理 2. 设 k 为代数闭域, M 为源晶体 (即 K-有限维左 B-模), 则可取正整数 N 使得对 B 添加 p 的任一个 N 次方根 π (并令 $\pi^\sigma = \pi$, $F\pi = \pi F$) 后, $B[\pi]$-模 $M[\pi]$ 有一组 $K[\pi]$-基 $v_1, ..., v_n$ 满足 $Fv_i = \pi^{s_i} v_i$, 其中 $s_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$。

我们通常排列这些特征向量 v_i 使得 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots$。不难证明集合 $\{s_1/N, s_2/N, ...\}$ 与 $v_1, v_2, \dots$ 的选取无关 (习题 4), 我们称 $\rho_i = \frac{s_i}{N}$ 为 M 的**牛顿斜率**。将平面上的点 (0,0), $(1, \rho_1)$, $(2, \rho_1 + \rho_2)$,... 用线段依次连结得到一条凸折线, 称为 M 的**牛顿折线**。

命题 1. 设 k 为代数闭域, 则任一 K-有限维左 B-模 M 可分解为直和

$$M \cong \bigoplus_i B/B(F^{r_i} - p^{s_i}) \quad (r_i, s_i \in \mathbb{Z},\ r_i > 0,\ \gcd(r_i, s_i) = 1) \tag{8}$$

其中每个 $B/B(F^{r_i} - p^{s_i})$ 是 B-单模。

证. 如引理 2 中那样取 π。设 $v \neq 0 \in M'$ 使得 $Fv = \pi^m v$, 注意 $[K[\pi] : K] = N$, 取 $w_1, ..., w_N \in M$ 使得

$$v = \pi w_1 + \pi^2 w_2 + \cdots + \pi^N w_N \tag{9}$$

由 $Fv = \pi^m v$ 可见对 $i > m$ 有

$$Fw_i = w_{i-m} \tag{10}$$

若记 $w_{Nl+i} = p^{-l} w_i$ $(\forall l \in \mathbb{Z})$, 则 (10) 对任意 i 都成立。令 $r = \frac{N}{\gcd(N,m)}$, $s = \frac{m}{\gcd(N,m)}$, 则由 (10) 得

$$F^r w_i = p^s w_i \quad (\forall i) \tag{11}$$

所有 w_i 生成的 K'-子空间显然包含 v, 而由引理 2 可选这样的 v 作为 M' 的 K'-基, 故可选 M 在 K 上的一组生成元, 使得其中每个元 w 满足 $F^r w = p^s w$, 其中 r, s 为互素的整数且 $r > 0$。

我们来证明 $B/B(F^r - p^s)$ 为 B-单模。设 M'' 为 $M = B/B(F^r - p^s)$ 的一个非零单商模。可取 $\bar{1} \in B/B(F^r - p^s)$ 的像 $v \in M''$ 为 M'' 作为 B-模的生成元, 从而 $M'' \cong B/Bg$, 其中 g 为次数最低的首一 K-多项式使得 $g(F)v = 0$, 显然 $\deg(g) = \dim_K M''$。另一方面, $w = g(F)\bar{1}$ 生成 M 的一个子模 M' 且显然 $M/M' \cong M''$, 而 $M' \cong B/Bf$, 其中 f 为次数最低的首一 K-多项式使得 $f(F)w = 0$, 显然 $\deg(f) = \dim_K M'$。由此可见 $\deg(f) + \deg(g) = r$ 且 $f(F)g(F)\bar{1} = 0$, 从而 $f(F)g(F) = F^r - p^s$。由引理 2 的讨论可见 g 的牛顿斜率都等于 $\frac{s}{r}$, 故 g 的常数项的 p-赋值为 $\frac{s}{r}\deg g \in \mathbb{Z}$, 再由 $\gcd(r, s) = 1$ 可见 $r|\deg g$, 从而 $\deg(g) \geqslant r$, $M \to M''$ 为同构。

我们用归纳法取 $w_1, w_2, ..., w_i \in M$ 使得 $Bw_j \cong B/B(F^{r_j} - p^{s_j})$ $(1 \leqslant j \leqslant i, r_j > 0, \gcd(r_j, s_j) = 1)$ 且 $Bw_1 + \cdots + Bw_i$ 为直和。若 $M \neq 0$, 则由上所述可取 w_1。设已取定 $w_1, ..., w_i$ 使得 $M' = Bw_1 + \cdots + Bw_i \subset M$ 为 Bw_1,..., Bw_i 的直和, 若 $M' \neq M$, 则由上所述可取 $w_{i+1} \in M - M'$ 使得 $Bw_{i+1} \cong B/B(F^{r_{i+1}} - p^{s_{i+1}})$。由于 Bw_{i+1} 是单模, $Bw_{i+1} \cap M' = 0$, 故 $Bw_1 + M'$ 为直和。证毕。

注意 $\frac{s_i}{r_i}$ 为 M 的牛顿斜率, 且这个斜率出现的次数是 r_i 的整数倍。由此可见 M 的牛顿折线的顶点都是整点。

若 M 是由一个丢多涅模 M_0 添加 $\frac{1}{p}$ 而得, 则每个 $s_i \geqslant 0$; 另一方面, 由 $FV = p$ 还可见 $r_i \geqslant s_i$, 因若不然可取 $B/B(F^{r_i} - p^{s_i}) \cap M_0$ 的一组生成元 $w_1, ..., w_t$ 使得 $w_j = p^{s_i - r_i} V^{r_i} w_j \in pAw_j$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$, 从而由中山正引理有 $w_j = 0$, 矛盾。注意 $F^{r_i} - p^{s_i} = (F^{r_i - s_i} - V^{s_i})F^{s_i}$ 且 F^{s_i} 的作用为半线性同构, 可见

推论 1. 设 k 为代数闭域, M 为丢多涅模, 则 $A \otimes \mathbb{Q}$-模 $M \otimes \mathbb{Q}$ 在 B 上可分解为直和

$$M \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_i B/B(F^{r_i} - V^{s_i}) \quad (r_i, s_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ \gcd(r_i, s_i) = 1) \tag{12}$$

其中每个 $B/B(F^{r_i}-V^{s_i})$ 是 B-单模。

注 2. 上面的分解本质地依赖于 k 是代数闭域的假设。若 k 是有限域，$M\otimes\mathbb{Q}$ 即使能分解一般也不是分解成上述形状的直和。例如在 $\mathbb{F}_p$ 上有超奇椭圆曲线 E 使得其夫罗贝纽斯态射 F 满足 $F^2=-p$，我们有 $D(E)\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}_p[F]/(F^2+p)$，但没有椭圆曲线满足 $F^2=p$（因为 F 是复乘），故没有 $\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线 E 使得 $D(E)\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}_p[F]/(F^2-p)$。

注 3. 设 k 为代数闭域，则由推论 4.3 和例 4.2 可知，在同构之下有唯一 p-可除群 $G_{r,s}$ 使得 $D(G_{r,s})\cong A/A(F^r-V^s)$，且 $G_{r,s}$ 满足 $\dim_k\mathrm{Lie}(G_{r,s})=s$，$\dim_k\mathrm{Lie}(G^t_{r,s})=r$。

例 1. 设 X 为代数闭域 k 上的阿贝尔簇，则由推论 4.5 可见：$X[p]\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r\Leftrightarrow D(X)$ 有 r 个牛顿斜率为 $0\Leftrightarrow D(X)$ 有 r 个牛顿斜率为 1（参看例 3.1）。特别地，X 为甚特殊的（即 X 没有 p 阶元，见 Ⅶ.1 节）当且仅当 0（或 1）不是 $D(X)$ 的牛顿斜率。

2. 丢多涅模的结构和分类初步

我们看到源晶体在同构之下由一组离散不变量决定，而丢多涅模的同构分类则还依赖于一些连续不变量，这样就会出现模空间问题。

例 2. 设 $G=\alpha_p^2$。对任意诺特 $\mathbb{F}_p$-概形 $S=\mathrm{Spec}R$，$G\times S$ 的 α-模同构于 R^2，而一个 α-秩为 1 的闭子群概形 $H\subset G\times S$ 等价于 R^2 的一个秩 1 平坦商模（见推论 Ⅲ.4.3）。由于 R^2 的秩 1 平坦商模由 $\mathbb{P}^1_R$ 代表，我们可以说 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ 是 α_p^2 的 α-秩为 1 的闭子群概形的模空间。我们将看到这个模空间在有限交换群概形的同构分类中所扮演的角色。

设 k 为完全域，则 $\mathfrak{Ab}_{1k}$ 的对象都可以嵌入 p-可除群作为子群概形（见习题 3.3），故我们先考虑 p-可除群的结构和分类。由分解 (3.1.1) 可见我们应该主要考虑 $\mathfrak{Ab}^{\mathrm{inf}}_{k\mathrm{inf}}$ 的对象（因为 $G^{\mathrm{inf}}_{\mathrm{et}}$ 和 $G^{\mathrm{et}}_{\mathrm{inf}}$ 的结构要简单得多），用上节的术语，称任意 $G\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}^{\mathrm{inf}}_{k\mathrm{inf}})$ 及 $D(G)$ 为**甚特殊的** (*very special*)，这等价于 0 和 1 不是 $D(G)$ 的牛顿斜率。

设 M 为 p-可除群 G 的丢多涅模, 则对任意 $x \neq 0 \in M$ 有 $px \neq 0$ (从而 $Fx, Vx \neq 0$)。称 $r(M) := \dim_K M \otimes \mathbb{Q}$ 为 M 的秩。由于 M 为 $W(k)$ 上的自由模, 有 $\dim_k M/pM = r(M)$。注意 $FM = \{Fx | x \in M\}$ 和 $VM = \{Vx | x \in M\}$ 也具有 A-模结构, 我们记 $(F, V)M = FM + VM$, 注意 $D(\alpha_p) \cong A/A(F, V)$, 可见 $M/(F, V)M$ 所对应的闭子群概形 $H \subset G$ 为

$$H = \ker(F_{G/k}) \cap \ker(V_{G^{(p^{-1})}/k}) \tag{1}$$

即为 G 的最大 α-子群。记

$$a(M) = \dim_k M/(F, V)M \tag{2}$$

则 $a(M)$ 是 M 的同构不变量, 且 $a(M) \leqslant r(M)$。由 a-数的定义 (见 (Ⅲ.4.2.1)) 可见 $a(M) = a(G)$。

我们下面来研究 M 的结构。先约化为 k 为代数闭域的情形: 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包, 则对任意 $G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Ab}_k)$, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用于 $G \otimes_k \bar{k}$ 上, 且 $G \otimes_k \bar{k}/\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \cong G$, 故 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用于 $D(G \otimes_k \bar{k})$ 上且 $D(G \otimes_k \bar{k})/\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \cong D(G)$。

以下设 k 为代数闭域, 除非特别说明。由推论 1 可知 M 可以嵌入一个直和 $\bigoplus\limits_i A/A(F^{r_i} - V^{s_i})$ 作为具有有限余长度的 A-子模。对任意 $r, s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 使得 $\gcd(r, s) = 1$, 令

$$H_{r,s} = W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})[F]/(F^{r+s} - p^s, Fa - a^\sigma F\ \forall a \in W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})) \tag{3}$$

它可以看作 A 的子环, 故 $H_{r,s} \otimes \mathbb{Q}$ 为 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) \otimes \mathbb{Q}$ 上秩为 $r+s$ 的非交换可除代数。例如 $H_{1,1} \otimes \mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 上的四元数代数。令

$$\tilde{M}_{r,s} = \{x \in M | F^r x = V^s x\} \tag{4}$$

称为 M 的 (r, s)-骨架 (skeleton), 它具有 $H_{r,s}$-模结构。所有 (非零的) $\tilde{M}_{r,s}$ 的直和 $\tilde{M}$ 为 M 的 $\mathbb{Z}_p$-子模, 称为 M 的骨架。由于 $M \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus\limits_i B/B(F^{r_i} - V^{s_i})$, 显然 $\tilde{M}$ 在 $K = W(k) \otimes \mathbb{Q}$ 上生成 $M \otimes \mathbb{Q}$。如果 $\tilde{M}$ 在 $W(k)$ 上生成 M, 则称 M 为特殊的 (special)。在一般情形, $\tilde{M}$ 在 $W(k)$ 上生成 M 的一个 A-子模 $S_0(M)$, 它是 M 中的唯一极大特殊子模 (因为

M 的任一特殊子模的骨架都含于 $\tilde{M}$ 中), 且 $M/S_0(M)$ 的长度有限。我们也可以将 $\tilde{M}$ 看作 M 中的一个“格”。

注意对任意 $H_{r,s}$-子模 $N, N' \subset H_{r,s}^n$ 有

$$W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} (N \cap N') = (W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} N) \cap (W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} N')$$
$$\subset W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H_{r,s}^n \tag{5}$$

这是因为 $W(k)$ 在 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})$ 上平坦 (即无挠)。由此可见 $M \otimes \mathbb{Q}$ 中的所有包含 M 的特殊 A-子模的交也是特殊的, 即为包含 M 的唯一极小特殊子模, 记为 $S^0(M)$。

对给定的秩, 易见在同构之下只有有限多个特殊 A-模 (习题 5)。另一方面, 若 M 的秩为 n, 则可以证明 $p^n S^0(M) \subset S_0(M)$ (实际上还可以估计得更精细)。

引理 3 (“中山正引理”). 设 M 是甚特殊的, 则 M 模 $(F,V)M$ 的任一组生成元生成 M。

证. 首先注意, 对任意 $H_{r,s}$ $(r, s > 0)$ 有 $(F,V)^{r+s}H_{r,s} \subset pH_{r,s}$, 故对充分大的 m 有 $(F,V)^m S^0(M) \subset pS^0(M)$, 因而由上所述对 $n = m+r(M)$ 有

$$(F,V)^n M \subset (F,V)^n S^0(M) \subset pS_0(M) \subset pM \tag{6}$$

设 $x_1, ..., x_n$ 为 M 模 $(F,V)M$ 的任一组生成元, 则由归纳法易见对任意 $n > 0$, 它们模 $(F,V)^n M$ 生成 M, 故由 (6) 可见它们模 p 生成 M, 再由 (作为 $W(k)$-模的) 中山正引理可见它们生成 M。证毕。

下面我们来研究 $H_{r,s}$ 及其模的结构。若 $r = 1, s = 0$ 或 $r = 0, s = 1$, 易见 $H_{r,s} \cong \mathbb{Z}_p$。在一般情形, 由于 $H_{r,s} \otimes \mathbb{Q}$ 作为 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) \otimes \mathbb{Q}$-模的秩为 $r+s$, 可见 $H_{r,s}$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 上的秩为 $(r+s)^2$。

对于 $H_{r,s}$ 的“极大 order”, 即 $H_{r,s}$ 在 $H_{r,s} \otimes \mathbb{Q}$ 中的极大 $\mathbb{Z}_p$-自由扩环, 有 (习题 6)

引理 4. 每个 $H_{r,s}$ 有唯一极大 order $H'_{r,s}$, 由所有 $p^m F^n$ $(m, n \in \mathbb{Z}$, $m(r+s) + ns \geqslant 0)$ 生成。

对任意 $ap^mF^n \in H'_{r,s}$ $(a \in W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})^* = W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) - pW(\mathbb{F}_{p^{r+s}}))$, 记 $\deg(p^mF^n) = m(r+s)+ns$, 对任意元 $\alpha \in H'_{r,s}$, 定义 $\deg\alpha$ 为 α 中各非零项的最低次数 $(\deg(0)=\infty)$。令 $I \subset H'_{r,s}$ 为所有次数 $\geqslant 1$ 的元组成的子集, 易见 I 为双边理想, 且为主理想, 故 $I^i/I^{i+1} \cong \mathbb{F}_{p^{r+s}}$ $(\forall i \geqslant 0)$。

设 N 为有限生成无挠左 $H_{r,s}$-模, 在 $N\otimes\mathbb{Q}$ 中所有包含 N 的左 $H'_{r,s}$-子模的交 $S'(N)$ 显然是包含 N 的最小 $H'_{r,s}$-子模。不难验证它是自由 $H'_{r,s}$-模 (习题 7)。对任意元 $x \in S'(N)$, 定义次数 $\deg(x) = \min\limits_{x\in I^dS'(N)}(d)$ $(\deg(0)=\infty)$, 显然 $I^dS'(N)\cap N$ 为 N 中次数 $\geqslant d$ 的元全体组成的左 $H_{r,s}$-子模。所有 $I^dS'(N)$ 组成 N 的一个典范过滤。令 $d(N)$ 为 N 中所有非零元的次数的集合, 则显然有 $r+d(N)\subset d(N)$, $s+d(N)\subset d(N)$。

注 4. 设 $S'(N) = H'_{r,s}$, 令 t 为满足 $I^t \subset N$ 的最小整数, 则不难验证 $t \leqslant (r-1)(s-1)$ (习题 8)。可取 $l \geqslant t$ 使得 N/I^l 的长度为 $(r-1)(s-1)/2$, 令 $d'(N) = \{d \in d(N) - l + (r-1)(s-1) | d < l\}$, 则 $S = d'(N)$ 满足

$$\#(S) = (r-1)(s-1)/2,\ r+S \subset S\cup\mathbb{Z}_{\geqslant(r-1)(s-1)},\ s+S \subset S\cup\mathbb{Z}_{\geqslant(r-1)(s-1)} \tag{7}$$

满足 (7) 的任一整数集 $S \subset \{0,1,\dots,rs-r-s\}$ 称为容许的 (admissible), 特别地 $S_0 = \{rm+sn | m,n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, rm+sn < (r-1)(s-1)\}$ 为容许集, 此外易见若 S 是容许集则 $(rs-r-s)-S^c$ $(S^c = \{0,1,\dots,rs-r-s\}-S)$ 也是容许集 (“对偶性”)。一个初等的事实是: 令 $S_0 = \{a_1,a_2,\dots\}$ $(a_1<a_2<\dots)$, 若 $S=\{b_1,b_2,\dots\}$ $(b_1<b_2<\dots)$ 为容许集, 则 $a_i \leqslant b_i$ $(\forall i)$。这一事实与格罗滕迪克变形猜想密切相关 (见 [dJO]), 迄今尚无初等的证明。

设 A-模 M 只有一个牛顿斜率 $\frac{s}{r+s}$, 则其秩为 $(r+s)$ 的倍数。设 $r(M) = (r+s)n$, 记 $N = H'^n_{r,s}$, 令

$$S'(M) = W(k)S'(\widetilde{S^0(M)}_{r,s}) \subset M\otimes\mathbb{Q} \cong (B/B(F^r-V^s))^n \tag{8}$$

即 $M\otimes\mathbb{Q}$ 中包含 M 的最小的同构于 $W(k)\otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})}N$ 的左 A-子模, 则可将次数的定义扩充到 $S'(M)$ 上, 且 $I^dS'(M)\cap M$ 为 M 中次数 $\geqslant d$ 的元全体组成的左 A-子模。所有 $I^dS'(M)\cap M$ 组成 M 的一个典范过滤。

命题 2. 设 $k \supset \mathbb{F}_{p^{r+s}}$ 为完全域, $N = H'^n_{r,s}$, $M = W(k)\otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})}N$。对

任意 $v \in M$, 记 $\bar{v}$ 为 v 在 $M/IM \cong k^n$ 中的象。设 $\bar{v} = (a_1, ..., a_n)$, 则下列条件等价:

i) $S'(Av) = M$;

ii) $a_1, ..., a_n$ 在 $\mathbb{F}_{p^{r+s}}$ 上线性无关;

iii) 向量 $(a_1^{p^{i(r+s)}}, ..., a_n^{p^{i(r+s)}})$ $(0 \leqslant i < n)$ 在 k 上线性无关。

证. ii)⇔iii) 由引理 3.1 立得, 故只需证明 i)⇔ii)。

i)⇒ii): 若 $a_1, ..., a_g$ 在 $\mathbb{F}_{p^{r+s}}$ 上线性相关, 即存在非零向量 $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{F}_{p^{r+s}}^n$ 使得 $c \cdot (a_1, ..., a_n) = 0$, 定义 $\phi_c : M \to k, w \mapsto c \cdot \bar{w}$, 则 ϕ 可以看作 A-模的同态, 且 $\phi_c(v) = 0$, 故 $\phi_c(Av) = 0$, 从而 $Av \subset \ker(\phi_c)$。注意 ϕ_c 由 $\phi_c|_N : N \to \mathbb{F}_{p^{r+s}}$ 诱导, 而 $\ker(\phi_c|_N)$ 为 N 的余长度为 1 的 $H'_{r,s}$-子模, 且 $\ker(\phi_c) = W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} \ker(\phi_c|_N)$, 故 $S'(Av) \subset \ker(\phi_c) \neq M$, 与 i) 矛盾。

ii)⇒i): 注意上面的推导逐步可逆即得。证毕。

推论 2. 设 $k \supset \mathbb{F}_{p^{r+s}}$ 为无限完全域, $N = H'^n_{r,s}$, $M = W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} N$, $M' \subset M$ 为 A-子模使得 $S'(M') = M$, 则存在 $v \in M'$ 使得 $S'(Av) = M$。

证. 令 $V_0 = N/IN$, $V = M/IM \cong k \otimes \mathbb{F}_{p^{r+s}} k$, $V' \subset V$ 为 M' 在 V 中的象, 则由命题 2 的证明可见, 对任意非零向量 $c = (c_1, ..., c_n) \in V_0$, 线性泛函 $\phi_c : V \to k$ $(\bar{v} \mapsto c \cdot \bar{v})$ 在 V' 上的限制非零。由于这样的线性泛函只有有限多个, 而 k 是无限域, 故存在 $v \in M'$ 使得 $\phi_c(\bar{v}) \neq 0$ 对所有 $c \neq 0$ 成立。由命题 2 即可见 $S'(Av) = M$。证毕。

对于一般的 M 也可以定义 $S'(M)$, 即 $M \otimes \mathbb{Q}$ 中包含 M 的最小的形如

$$\bigoplus_i W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r_i+s_i}})} H'_{r_i,s_i} \tag{9}$$

的左 A-模。注意 $S'(M)$ 是典范的, 即若 $f : M_1 \to M_2$ 为 $W(k)$-无挠丢多涅模的同态, 则 f 诱导典范同态 $S'(f) : S'(M_1) \to S'(M)$。利用 $S'(M)$ 可以给出 M 的典范过滤, 其非零因子都同构于 k, 这就给出研究一般的丢多涅模的一个基本方法。

3. 拟极化丢多涅模的结构和分类初步

一个阿贝尔簇 X 连同一个极化 $\phi: X \to \hat{X}$ 称为一个**极化阿贝尔簇**, 我们下面将看到这个概念在分类学中的重要性。将丢多涅模函子 D 作用于一个极化阿贝尔簇, 就得出一个丢多涅模连同一个拟极化, 称为一个**拟极化丢多涅模**, 这个概念在分类学中也是重要的。

我们先来看对偶性。若 $M = W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H_{r,s}$, 则有

$$M^t \cong W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} Hom_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})}(H_{r,s}, W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})) \tag{1}$$

而由例 4.2 有 $M^t \otimes \mathbb{Q} \cong W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H_{s,r} \otimes \mathbb{Q}$, 这给出一个 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})$-双线性映射

$$\langle , \rangle : H_{s,r} \otimes \mathbb{Q} \times H_{r,s} \otimes \mathbb{Q} \to W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) \otimes \mathbb{Q} \tag{2}$$

由推论 4.4 可见它满足

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, Vy\rangle^{\sigma}, \quad \langle Vx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle^{\sigma^{-1}} \quad (\forall x \in H_{s,r}, y \in H_{r,s}) \tag{3}$$

且为 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) \otimes \mathbb{Q}$ 上的完全配对, 它可以看作 $\langle , \rangle : M^t \times M \to W(k)$ 的 "骨架" (即 $\langle , \rangle : M^t \otimes \mathbb{Q} \times M \otimes \mathbb{Q} \to W(k) \otimes \mathbb{Q}$ 为 (2) 的基扩张)。

引理 5. 若 $S'(M) = M$, 则 $S'(M^t) = M^t$。特别地, 若 $M \cong W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H'_{r,s}$, 则 $M^t \cong W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H'_{s,r}$。

证. 只需证明后一个断言。利用 $W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})$-双线性映射 (2), 只需验证 $H'_{r,s}$ 按 $\langle , \rangle$ 的对偶

$$\{x \in H_{s,r} \otimes \mathbb{Q} | \langle x, y\rangle \in W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}) \ (\forall y \in H'_{r,s}\} \tag{4}$$

同构于 $H'_{s,r}$ 即可。令 $\phi \in Hom_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})}(H_{r,s}, W(\mathbb{F}_{p^{r+s}}))$ 为由 $\phi(1) = 1$, $\phi(F^i) = 0$ $(0 < i < r+s)$ 给出的同态, 不难验证 (4) 的右边等于 $I^{1-r-s}H'_{s,r}\phi$。由上所述 I 是主理想, 故有 $H'_{s,r}$-模同构 $I^{1-r-s}H'_{s,r}\phi \cong H'_{s,r}$, 这当然也是 $H_{s,r}$-模同构。证毕。

设 $f: M_1 \to M_2$ 为 $W(k)$-无挠丢多涅模的同态, 则 $S'(f)$ 诱导 $S'(f)^t : S'(M_2)^t \to S'(M_1)^t$, 而 f^t 诱导 $S'(f^t): S'(M_2^t) \to S'(M_1^t)$ (注意 $S'(M)^t \subset M^t \subset S'(M^t)$)。

设 $\langle,\rangle: M^t \times M^t \to W(k)$ 为拟极化, 对应于 $\lambda: M^t \to M$, 则 λ 诱导 $S'(M^t) \to S'(M)$, 这等价于 $\langle,\rangle: S'(M^t) \times S'(M)^t \to W(k)$。这里 $S'(M^t)$ 为包含 M^t 且形如 (2.9) 的最小丢多涅模, 而由引理 5 可见 $S'(M)^t$ 为包含于 M^t 且形如 (2.9) 的最大丢多涅模。注意 $\langle,\rangle$ 由其在骨架上的限制决定。设 $S'(M)$ 由 (2.9) 给出, 则由引理 5 可见对任意 r,s, $H'_{r,s}$ 与 $H'_{s,r}$ 的拷贝同样多, 通常是将 (r_i,s_i) 按牛顿斜率 $\frac{s_i}{r_i+s_i}$ 从小到大排列, 这样就有

$$\begin{gathered} S'(M^t) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r_i+s_i}})} H'_{r_i,s_i} \\ \left(\frac{s_i}{r_i+s_i} \leqslant \frac{s_{i+1}}{r_{i+1}+s_{i+1}}, \frac{s_{n-i+1}}{r_{n-i+1}+s_{n-i+1}} = \frac{r_i}{r_i+s_i} \ \forall i\right) \end{gathered} \tag{5}$$

注意在 (5) 中, 除 $H'_{1,1}$ 外其他的 H'_{r_i,s_i} 和 H'_{s_i,r_i} 都是成对出现。总之有

命题 3. 设 M 为 $W(k)$-无挠丢多涅模, 若 M 有拟极化, 则 (5) 成立, 且 $S'(M) \cong S'(M^t) \cong S'(M)^t$。而 M 的一个拟极化 λ 诱导一个 $W(k)$-双线性型 $\langle,\rangle: S'(M^t) \times S'(M)^t \to W(k)$, 它唯一决定 λ, 且 $\langle,\rangle$ 由其在骨架上的限制决定。

我们来对$\langle,\rangle: S'(M^t) \times S'(M)^t \to W(k)$ 作等价分类。由引理 5 可见在 (5) 中, 每个直加项 $W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H'_{r,s}$ 仅与同构于 $W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} H'_{s,r}$ 的直加项的和有非零内积, 故我们只需考虑 $S'(M^t)$ 形如 $W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} (H'^n_{r,s} \oplus H'^n_{s,r})$ 和形如 $W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^2})} H'^n_{1,1}$ 这两种情形即可, 而且可以进一步化为 $\langle,\rangle$ 在 $H'^n_{r,s} \oplus H'^n_{s,r}$ 和 $H'^n_{1,1} \cong H^n_{1,1}$ 上的限制的研究。第一种情形较为容易 (习题 9):

引理 6. 设 $\langle,\rangle$ 为 $M^t = W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_{p^{r+s}})} (H'^n_{r,s} \oplus H'^n_{s,r})$ 的拟极化, 则可取 $H'^n_{r,s}$ 在 $H'_{r,s}$ 上的自由生成元 $x_1,\dots,x_n$ 及 $H'^n_{s,r}$ 在 $H'_{s,r}$ 上的自由生成元 $y_1,\dots,y_n$ 使得 $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}p^{m_{ij}}$ ($\forall i,j$, 其中 $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$)。

对第二种情形, 注意 $H_{s,r} \otimes \mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 上的四元数代数, 记 $|\,|: H_{1,1} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$ 为绝对值映射, 即

$$|a+bF| = (a+bF)(a^\sigma - bF) = aa^\sigma + pbb^\sigma \quad (a,b \in W(\mathbb{F}_{p^2}) \otimes \mathbb{Q}) \tag{6}$$

则其限制 $|\,|: H_{1,1} \to \mathbb{Z}_p$ 为满射 (习题 10)。

引理 7 ([LO, Proposition 6.1]). 设 $N = H_{1,1}^n$, $\langle,\rangle$ 为 $M^t = W(k)\otimes_{W(\mathbb{F}_{p^2})} N$ 的拟极化, 则有正交分解

$$N \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_d \tag{7}$$

其中每个 N_i 为下面两个类型之一:

i) 秩 1 $H_{1,1}$-自由模 $H_{1,1}x$, 使得 $\langle x, Fx\rangle = p^d\epsilon$, 其中 $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 而 $\epsilon \in W(\mathbb{F}_{p^2}) - pW(\mathbb{F}_{p^2})$ 满足 $\epsilon^\sigma = -\epsilon$; 或

ii) 秩 2 $H_{1,1}$-自由模 $H_{1,1}x \oplus H_{1,1}y$, 使得 $\langle x, y\rangle = p^d$, 其中 $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 且 $\langle x, Fx\rangle = \langle y, Fy\rangle = \langle x, Fy\rangle = \langle y, Fx\rangle = 0$。

证. 简记 $H = H_{1,1}$。首先取 $d \in \mathbb{Z}$ 使得 $\langle N, N\rangle \subset p^d W(\mathbb{F}_{p^2})$ 而 $\langle N, N\rangle \not\subset p^{d+1}W(\mathbb{F}_{p^2})$。令

$$N' = \{x \in N | \langle x, N\rangle \subset p^{d+1}W(\mathbb{F}_{p^2})\} \tag{8}$$

则 $pN \subset N'$, 故 $\overline{N} = N/N'$ 为 $\mathbb{F}_{p^2}$-线性空间, 带有半线性自同态 F, 而 $F^2 = p\cdot$ 为零同态。令 $\overline{N}_0 = \ker(F)$, 则有 $F\overline{N} \subset \overline{N}_0$。注意 $\langle\ ,\ \rangle$ 诱导 $\mathbb{F}_{p^2}$-双线性交错型

$$\overline{N} \times \overline{N} \to p^d W(\mathbb{F}_{p^2})/p^{d+1}W(\mathbb{F}_{p^2}) \cong \mathbb{F}_{p^2} \tag{9}$$

由上面的构造过程易见它是非退化的。此外有 $(F\overline{N})^\perp = \overline{N}_0$, 这是因为

$$\langle \bar{x}, F\overline{N}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \langle F\bar{x}, \overline{N}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ F\bar{x} = 0 \tag{10}$$

有两种可能的情形:

情形 1: $\overline{N} \neq \overline{N}_0$。此时可取 $\bar{x} \in \overline{N}$ 使得 $\langle \bar{x}, F\bar{x}\rangle \neq 0$, 方法是先取 $\bar{x}$ 使得 $F\bar{x} \neq 0$, 再取 $\bar{y}$ 使得 $\langle F\bar{x}, \bar{y}\rangle \neq 0$, 这样对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}_{p^2}$ 有

$$\langle \bar{x} + \lambda\bar{y}, F(\bar{x} + \lambda\bar{y})\rangle = \langle \bar{x}, F\bar{x}\rangle + \lambda\lambda^\sigma\langle \bar{y}, F\bar{y}\rangle + \lambda^\sigma\langle \bar{x}, F\bar{y}\rangle + \lambda\langle \bar{y}, F\bar{x}\rangle \tag{11}$$

注意 (11) 的最后一项等于 $-(\lambda^\sigma\langle \bar{x}, F\bar{y}\rangle)^\sigma$。若 $\langle \bar{x}, F\bar{x}\rangle = \langle \bar{y}, F\bar{y}\rangle = 0$, 则可取 λ 使得 $\lambda^\sigma\langle \bar{x}, F\bar{y}\rangle \notin \mathbb{F}_p$, 从而 $\langle \bar{x} + \lambda\bar{y}, F(\bar{x} + \lambda\bar{y})\rangle \neq 0$。这样我们就可得到 $x \in N$ 使得 $\langle x, Fx\rangle \notin p^{r+1}W(\mathbb{F}_{p^2})$。显然有 $\langle x, Fx\rangle = p^d\epsilon$, 其中

$\epsilon \in W(\mathbb{F}_{p^2}) - pW(\mathbb{F}_{p^2})$ 满足 $\epsilon^\sigma = -\epsilon$。注意若 $\epsilon' \in W(\mathbb{F}_{p^2}) - pW(\mathbb{F}_{p^2})$ 满足 $\epsilon'^\sigma = -\epsilon'$, 则存在 $c \in W(\mathbb{F}_p) - pW(\mathbb{F}_p)$ 使得 $\epsilon' = c\epsilon$。由于 $|\;| : H_{1,1} \to W(\mathbb{F}_p)$ 为满射 (习题 10), 可取 $\alpha = a + bF \in H$ 使得

$$c = |\alpha| = aa^\sigma - pbb^\sigma = (a + bF)(a^\sigma - bF) \tag{12}$$

故 $\langle \alpha x, F\alpha x\rangle = p^d\epsilon'$, 因而我们可以在选择 x 前固定一个 ϵ。令 $N_1 = Hx$, 不难验证 $N \cong N_1 \oplus N_1^\perp$。

情形 2: $\overline{N} = \overline{N}_0$ (即 $\langle FN, N\rangle \subset p^{d+1}W(\mathbb{F}_{p^2})$)。由于在 $\overline{N}$ 上有一个非退化交错型, 有 $\dim_{\mathbb{F}_{p^2}} \overline{N} \geqslant 2$。取 $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{N}$ 使得 $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \neq 0$ 并提升为 $x, y \in N$。不妨设 $\langle Fx, y\rangle = 0$, 否则可用 $y - \lambda Fy$ 代替 y, 其中 $\lambda = \langle Fx, y\rangle / p\langle x, y\rangle^\sigma$。记 v 为 p-进赋值。若 $\langle x, Fx\rangle \neq 0$ 且 $\langle y, Fy\rangle \neq 0$, 例如 $v(\langle x, Fx\rangle) \geqslant v(\langle y, Fy\rangle)$, 则对任意 $x' = x + \alpha y$ $(\alpha \in H_{1,1})$, 不难算出 $\langle x', Fx'\rangle = \langle x, Fx\rangle + |\alpha|\langle y, Fy\rangle$, 而 $\langle x, Fx\rangle / \langle y, Fy\rangle \in \mathbb{Z}_p$。由于 $|\;| : H_{1,1} \to W(\mathbb{F}_p)$ 是满射, 可取 α 使得 $\langle x', Fx'\rangle = 0$。用 x' 代替 x, 像上面一样可取 y 使得 $\langle y, Fx\rangle = 0$。若 $\langle y, Fy\rangle \neq 0$, 取 $y' = y + \beta Fx$ $(\beta \in W(\mathbb{F}_{p^2}))$ 代替 y, 不难算出

$$\langle y', Fy'\rangle = \langle y, Fy\rangle + p(\beta\langle x, y\rangle^\sigma - \beta^\sigma\langle x, y\rangle) \tag{13}$$

这样又可取 β 使得 $\langle y', Fy'\rangle = 0$。总之我们可取 $x, y \in N - N'$ 使得 $\langle x, Fx\rangle = \langle y, Fy\rangle = \langle x, Fy\rangle = \langle y, Fx\rangle = 0$, 且 $\langle x, y\rangle \notin p^{r+1}W(\mathbb{F}_{p^2})$。用 $p^d\langle x, y\rangle^{-1}y$ 代替 y, 则有 $\langle x, y\rangle = p^d$。令 $N_1 = Hx + Hy$, 同样可以验证 $N \cong N_1 \oplus N_1^\perp$。

由归纳法引理得证。证毕。

对于一般的拟极化丢多涅模 M, 利用 $S'(M^t)$ 给出的 M 的典范过滤, 可考虑 $S'(M^t)$ 的拟极化诱导的 M 的过滤的拟极化, 这是研究一般的拟极化丢多涅模的一个基本方法。

习题

1. 写出引理 1 的证明细节。

2. 证明 (注 1 中的) A_1 中任一常数项为 1 的元是可逆元。

3. 记号如引理 2。设 ϕ 为 $W[\pi]$ 上的 $r+1$ 元多项式, $\bar{\phi}$ 为 ϕ 模 π 所得的 k 上的多项式, 且设 $\bar{\phi} \neq 0$。设 $a_0 \in k$ 满足 $\bar{\phi}(a_0, a_0^p, ..., a_0^{p^r}) = 0$, 且 $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}(a_0, a_0^p, ..., a_0^{p^r})$ $(1 \leqslant i \leqslant r+1)$ 中至少有一个不等于 0。证明存在 $a \in W[\pi]$ 使得 $\phi(a, a^\sigma, ..., a^{\sigma^r}) = 0$ 且 $a_0 = a \pmod{\pi}$。

4. 证明任意 K-有限维 B-模 M 的牛顿斜率的集合与基的选取无关, 即由 M 决定。

5. 证明对任意 $H_{r,s}$, 在同构之下只有有限多个给定有限秩的 $H_{r,s}$-模。故在任意代数闭域 k 上, 在同构之下只有有限多个给定有限秩的特殊 A-模。

6. 证明引理 4。

7. 证明任意有限生成且在 $\mathbb{Z}_p$ 上平坦的 $H'_{r,s}$-模 $(r, s > 0)$ 为自由模。(提示: 利用 I-进中山正引理, 即有限生成 $H'_{r,s}$-模的任一组模 I 的生成元生成整个模。)

8. 设 $N \subset H'_{r,s}$ 为 $H_{r,s}$-子模 $(r, s > 0)$, 令 t 为满足 $I^t \subset N$ 的最小整数, 证明 $t \leqslant (r-1)(s-1)$。

9. 证明引理 6。

10. 证明 $|\ | : H_{1,1} \to \mathbb{Z}_p$ 为满射。

11. 证明任意代数闭域上的源晶体作为 B-模由一个元生成。

12. 对任意两个 F-晶体 M, N 可以定义张量积 $M \otimes N$: 作为 $W(k)$-模 $M \otimes N = M \otimes_{W(k)} N$, 而 F 的作用为 $F(v \otimes_{W(k)} w) = Fv \otimes_{W(k)} Fw$。验证这个定义的合理性, 并证明所有 F-晶体组成一个阿贝尔张量范畴。

13. 给出一个没有主极化的阿贝尔簇的例子。(提示: 构造一个没有主拟极化的丢多涅模使其对应于一个阿贝尔簇。)

第 Ⅸ 章 自同构群概形

第 1 节 一些基本性质和特殊情形

1. 自同构群概形的一些基本性质

由定理 Ⅳ.2.2.iv) 我们看到, 对一个局部诺特概形 S 上的平坦相对射影概形 X, 存在 S 上的局部拟射影群概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$ ($X \to S$ 的自同构群概形), 代表预层

$$\begin{aligned} \mathfrak{Aut}_{X/S}\colon \mathfrak{Sch}_S &\to ((\text{groups})) \\ T &\mapsto \operatorname{Aut}(X \times_S T/T) \end{aligned}$$

详言之, 在 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 上有一个 $X \times_S \mathcal{A}ut(X/S)$ 的泛自同构 $\Phi_{X/S}$, 一个 S-态射 $f : T \to \mathcal{A}ut(X/S)$ 在 $\mathfrak{Aut}_{X/S}$ 下所对应的 $X \times_S T$ 的 T-自同构是 $\Phi_{X/S}$ 通过 f 的基变换。由抽象废话易见 (参看注 Ⅳ.1.1):

引理 1. 设 S 为局部诺特概形而 X 为 S 上的平坦相对射影概形。

i) 自同构群概形与基变换交换, 即若 T 为局部诺特 S-概形, 有

$$\mathcal{A}ut(X \times_S T/T) \cong \mathcal{A}ut(X/S) \times_S T$$

ii) $(\mathcal{A}ut(X/S), \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_{X/S})$ 代表预层:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Act}_{X/S}\colon ((S\text{-group schemes})) &\to ((\text{sets})) \\ G &\mapsto \{G \text{ 在 } X \text{ 上的作用}\} \end{aligned}$$

详言之, $\rho_{X/S} = \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_{X/S} : X \times_S \mathcal{A}ut(X/S) \to X$ 为典范作用, 而任一 S-群概形的同态 $h : G \to \mathcal{A}ut(X/S)$ 在 $\mathfrak{Act}_{X/S}$ 下所对应的作用为 $\rho_{X/S} \circ (\mathrm{id}_X \times_S h) : X \times_S G \to X$。

例 1. 设 S 为连通诺特概形, $\pi : C \to S$ 为亏格 $g > 1$ 的光滑相对射影曲线族, 则由例 Ⅳ.3.1 可知 $\mathcal{A}ut(C/S) \to S$ 为拟有限无分歧态射。特别地, 若 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域), 则 $\mathcal{A}ut(C/k)$ 在 k 上是有限平展的。

注 1. 上述 $X \to S$ 的相对射影性假设是相当实质性的，由下面的例子可以看出，非射影的概形一般没有自同构群概形。

例 2. 设 k 为任意域，$X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$。我们知道 (习题 6) X 的任一 k-自同构形如 $x \mapsto ax+b$ $(a, b \in k,\ a \neq 0)$，但 $\mathfrak{Aut}_{X/k}$ 不是可代表的。我们用反证法证明这一事实：设 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 存在，取其中包含 0 的一个仿射开子概形 $\mathrm{Spec}R$，则泛同构 $\Phi_{X/k}$ 给出一个 k-代数自同构 $\Phi^*_{X/k} : R[x] \to R[x]$，记 $\phi(x) = \Phi^*_{X/k}(x)$。令 $A = k[t]/(t^2)$，$T = \mathrm{Spec}(A)$，则 $x \mapsto x + tx^n$ 给出 $X \times_k T$ 的一个 T-自同构 f，但当 $n > \deg \phi$ 时，显然没有同态 $R \to A$ 诱导 f，与自同构群概形的定义矛盾。

注 2. 设 X 为域 k 上的射影概形，则 $\mathcal{A}ut(X/k)(k)$ 的群结构可看作 $\mathrm{Aut}(X/k)$，即 X 的 k-自同构组成的群。特别地，若 $X = \mathrm{Spec}k'$，其中 k' 是 k 的有限扩域，则 $\mathcal{A}ut(X/k)(k)$ 的群结构可看作 $\mathrm{Gal}(k'/k)$。

注 3. 设 S-概形 X 有自同构群概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$，则由习题 Ⅱ.2.7 可知对任意 S-群概形 G，一个 G 在 X 上的作用等价于 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的一个群预层自然变换 $\underline{G} \to \underline{\mathcal{A}ut(X/S)}$，而这又等价于一个 S-群概形同态 $G \to \mathcal{A}ut(X/S)$，即一个"表示"。换言之，若 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 存在，则群概形的作用可以理解为表示。

2. 线性情形

引理 2. 设 S 为连通诺特概形，$\pi : X \to S$ 为平坦相对射影态射，具有几何约化连通纤维，且对任意 $s \in S$ 有 $H^1(O_{X_s}) = 0$。设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的可逆层。若存在 $s \in S$ 使得 $\mathcal{F}$ 在 s 上的纤维 $\mathcal{F}_s \cong O_{X_s}$，则 $\mathcal{F}$ 为局部平凡层，即存在 S 上的 (唯一) 可逆层 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{F} \cong \pi^*\mathcal{E}$。

证. 由引理 Ⅵ.1.1 可知存在 S 的极大闭子概形 S_0 使得 $\mathcal{F}|_{S_0}$ 为局部平凡的。由所设 $S_0 \neq \emptyset$。对任意 $s \in S_0$，由所设有 $h^1(O_{X_s}) = 0$，$h^0(O_{X_s}) = 1$，故由命题 I.1.3.1 可见存在 s 的一个开邻域 U 使得对任意 $s' \in U$ 有 $h^1(\mathcal{F}_{s'}) = 0$，且 $\pi_*\mathcal{F}|_U \cong O_U$，从而存在同构 $O_{X \times_S U} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}|_{X \times_S U}$。这说明 S_0 是开子概形。由 S 的连通性有 $S = S_0$。证毕。

特别地，若 π 有一个截口且具有几何整纤维，则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 存在，将引理 2 应用于庞加莱层 $\mathcal{P}_{X/S}$ 就得到

推论 1. 设 S 为连通诺特概形，$\pi : X \to S$ 为平坦相对射影态射，具有几何整纤维且有一个截口。如果对任意 $s \in S$ 有 $H^1(O_{X_s}) = 0$，则有 $\mathcal{P}ic^\tau(X/S) \cong S$。特别地，若 $X = \mathbb{P}^n_S$ (n 为正整数)，则 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 同构于 $\mathbb{Z}$ 在 S 上的离散群概形结构，换言之对 X 上的任意可逆层 $\mathcal{F}$，存在 S 上的可逆层 $\mathcal{E}$ 及整数 m 使得 $\mathcal{F} \cong \pi^*\mathcal{E} \otimes_{O_X} O_X(m)$。

为方便起见，对于 X 上的两个可逆层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$，若存在 S 上的可逆层 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{F} \cong \mathcal{G} \otimes_{O_X} \pi^*\mathcal{E}$，则简记 $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$。

命题 1. 设 S 为连通诺特概形，$\pi : X \to S$ 为平坦相对射影态射，具有几何约化连通纤维及一个截口 $S \to X$，且对任意 $s \in S$ 有 $H^1(O_{X_s}) = 0$。则 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 为 S-相对线性群概形，特别地它是 S-有限型仿射的。

证. 取 $O_X(1)$ 使得对任意 $s \in S$ 及 $i > 0$ 有 $H^i(X_s, O_{X_s}(1)) = 0$，则由命题 I.3.1 可知 $\mathcal{F} = \pi_* O_X(1)$ 是局部自由的，且典范同态 $\pi^*\mathcal{F} \to O_X(1)$ 是满的。定义 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$F:\ T \mapsto \{f \in \mathrm{Aut}(X \times_S T/T) | f^*\mathrm{pr}_1^* O_X(1) \sim \mathrm{pr}_1^* O_X(1)\}$$

注意 $f^*O_{X\times_S T}(1) \sim O_{X\times_S T}(1)$ 等价于 $f^*O_{X\times_S T}(1) \otimes_{O_{X\times_S T}} O_{X\times_S T}(-1) \sim O_{X\times_S T}$，由引理 VI.1.1 可见 F 由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的一个闭子概形 H 代表，而由抽象废话可见 H 是 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的一个闭子群概形。

设在仿射开子概形 $S' = \mathrm{Spec}(R) \subset S$ 上 $\mathcal{F}$ 的限制同构于 $O_{S'}^{\oplus m}$，任取 $\mathcal{F}(S')$ 的一组生成元 $s_1, ..., s_m$，给出一个 S'-闭嵌入 $\phi : X \times_S S' \to Z = \mathbb{P}^{m-1}_{S'}$。由于 H 的作用保持 $O_X(1)$，它诱导 $H \times_S S'$ 在 Z 上的射影线性作用，与其在 $X \times_S S'$ 上的作用相容。由推论 IV.2.3 有一个闭子概形 $H' \subset PGL_{m/S'}$ 代表 $\mathfrak{Sch}_{S'}$ 上的预层

$$F':\ T \mapsto \{f \in PGL_{m/T} | f(X \times_{S'} T) = X \times_{S'} T\}$$

由抽象废话可见 H' 是 $PGL_{m/S'}$ 的闭子群概形且 $H' \cong H \times_S S'$，故 H 局部可嵌入 $PGL_{m/S}$ 作为闭子群概形，特别地 H 是 S-有限型仿射的。

设 U 是 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的一个连通分支。若 $U \cap H \neq \emptyset$，则由引理 2 可见

$U \subset H$, 故 H 由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的一些连通分支的并组成, 从而是 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的开子群概形。

由命题 Ⅵ.2.2 有一个 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的典范诱导作用 ρ, 显然 ρ 保持可逆层的希尔伯特多项式, 而由定理 Ⅵ.2.1 可见 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 中只有有限多个连通分支上的 $\mathcal{P}_{X/S}$ 与 $O_X(1)$ 有相同的希尔伯特多项式, 令 V 为这些分支的并, 则 ρ 给出 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 在 V 上的作用。令 $V_0 \subset V$ 为包含对应于 $O_X(1)$ 的截口 $S \to V$ 的连通分支, 则由推论 1 可见 $V_0 \cong S$。注意 ρ 置换 V 的连通分支, 在此置换作用下 H 是 V_0 的安定子群概形, 不难看到 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 只有有限多个连通分支 (习题 9)。证毕。

例 3. 由命题 1 的证明和推论 1 可见 $\mathcal{A}ut(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}) \cong PGL_{n+1/\mathbb{Z}}$。

例 4. 设 S 为诺特概形, $\pi: X \to S$ 为有限平坦态射, 则由命题 1 的证明可见 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 可嵌入 $GL_{\mathbb{V}(\pi_* O_X)/S}$ 作为闭子群概形。

设 X 为 S 的 (n 次) 平展覆盖, 由引理 I.1.6 可知存在有限平展覆盖 $T \to S$ 使得 $X' = X \times_S T$ 为 n 个 T 的拷贝的无交并, 显然 $G = \mathcal{A}ut(X'/T)$ 同构于对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的离散 T-群概形结构, 作为一个 S-概形它是 T 的 $n!$ 次平展覆盖。注意 $T \to S$ 忠实平坦, 由引理 1 可见 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 为 S 的 ($n!$ 次) 平展覆盖, 且 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 在 X 上的泛作用为可迁的。

设 $X = \mathrm{Spec}(L)$, 其中 $L \supset K$ 为有限域扩张, 我们简记 $\mathcal{A}ut(X/K) = G_{L/K}$。由注 2, $G_{L/K}$ 的 K-点组成的群恰为 $\mathrm{Gal}(L/K)$, 而 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 可以看作离散 K-群概形。由例 4 可见, 若 $L \supset K$ 为可分扩张, 则除 $K = L$ 和 $[L:K] = 2$ 两种情形外, $G_{L/K}$ 的次数都大于 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的阶, 从而 $G_{L/K}$ 有非 K-点。下面将看到在 $L \supset K$ 不可分时 $\dim(G_{L/K}) > 0$, 从而 $G_{L/K}$ 也有非 K-点。

在 $L \supset K$ 为单纯扩张的情形, 不难直接计算 $G_{L/K}$ 如下。

设 $L \cong K[x]/(f(x))$, 其中 $f(x) \in K[x]$ 为首一不可约多项式。记 $\bar{x} \in L$ 为 x 的像, $n = \deg(f)$。由例 4 可设 $G_{L/K} = \mathrm{Spec}(R)$, 其中 R 是有限生成的 K-代数。令 $\phi: R \otimes_K L \to R \otimes_K L$ 为 $G_{L/K} \times_K X$ 的泛自同构所对应的 R-代数同构, 则可取 $c_0, c_1, ..., c_{n-1} \in R$ 使得

$$\phi(1 \otimes_K \bar{x}) = c_0 \otimes_K 1 + c_1 \otimes_K \bar{x} + \cdots + c_{n-1} \otimes_K \bar{x}^{n-1} \qquad (1)$$

由 $f(\bar{x})=0$ 有

$$f(c_0\otimes_K 1+c_1\otimes_K\bar{x}+\cdots+c_{n-1}\otimes_K\bar{x}^{n-1})=0 \tag{2}$$

将此展开, 易见有多项式 $f_i\in K[x_0,...,x_{n-1}]$ $(0\leqslant i<n)$ 使得

$$\begin{aligned}f(c_0\otimes_K 1+c_1\otimes_K\bar{x}+\cdots+c_{n-1}\otimes_K\bar{x}^{n-1})=f_0(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K 1+\\ f_1(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K\bar{x}+\cdots+f_{n-1}(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K\bar{x}^{n-1}\end{aligned} \tag{3}$$

由 (1) 可见对任意 i $(0\leqslant i<n)$ 有多项式 $\phi_{ij}\in K[x_0,...,x_{n-1}]$ $(0\leqslant j<n)$ 使得

$$\begin{aligned}\phi(1\otimes_K\bar{x}^i)=&\phi_{i0}(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K 1+\phi_{i1}(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K\bar{x}+\cdots\\ &+\phi_{i(n-1)}(c_0,...,c_{n-1})\otimes_K\bar{x}^{n-1}\end{aligned} \tag{4}$$

令 $D=\det(\phi_{ij})$, 注意 $1,\bar{x},...,\ \bar{x}^{n-1}$ 组成 L 的一组 K-基, 可见 (1) 给出 $R\otimes_K L$ 的 R-自同构当且仅当 $D(c_0,...,c_{n-1})$ 为单位。由此可见

$$R\cong K[x_0,...,x_{n-1},\det(\phi_{ij})^{-1}]/(f_i(x_0,...,x_{n-1})|0\leqslant i<n) \tag{5}$$

而 $G_{L/K}$ 在 X 上的泛作用 ρ 由

$$\rho^*(\bar{x})=x_0\otimes_K 1+x_1\otimes_K\bar{x}+\cdots+x_{n-1}\otimes_K\bar{x}^{n-1} \tag{6}$$

给出。由此及 $\rho\circ(\mathrm{id}_{G_{L/K}}\times_K\rho)=\rho\circ(m_{G_{L/K}}\times_K\mathrm{id}_X)$ 可明确给出 $G_{L/K}$ 的群概形结构。

例 5. 设 $K=\mathbb{Q}$, $L=\mathbb{Q}[x]/(x^3-2)\cong\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$。由例 4 我们知道 $G_{L/K}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的 6 次平展群概形。按上面的方法计算可得 $G_{L/K}=\mathrm{Spec}(R)$, 其中

$$R=\mathbb{Q}[r,s,t]/(r-s^2-s+t^3/2-1,rs,rt,st)\cong\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]\times\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \tag{7}$$

它的群概形结构由

$$\begin{aligned}m^*(r)=&r\otimes r+\frac{1}{3}(s\otimes s+s^2\otimes s^2+s^3\otimes s^3)\\ &+\frac{1}{12}(2t^2\otimes t+2t\otimes t^2+t^3\otimes t^3),\\ m^*(s)=&r\otimes s+s\otimes r+\frac{1}{3}(2s\otimes s-s^2\otimes s^2-s^3\otimes s^3)\\ &+\frac{1}{12}(4t^2\otimes t-2t\otimes t^2-t^3\otimes t^3),\\ m^*(t)=&r\otimes t+t\otimes r+s^2\otimes t+t\otimes s,\\ \iota^*(r)=&\ r,\iota^*(s)=s^2,\iota^*(t)=t,o^*(r)=1,o^*(s)=o^*(t)=0\end{aligned} \tag{8}$$

给出, 而它在 $X=\mathrm{Spec}(L)$ 上的作用 $\rho: G_{L/K}\times_K X\to X$ 由

$$\rho^*(\bar{x})=r\otimes 1+s\otimes \bar{x}+\frac{1}{2}t^2\otimes \bar{x}^2 \tag{9}$$

给出。注意在分母中有 2 和 3, 对此可以这样理解: 令 $O_L\subset L$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 L 中的整闭包, $G=\mathcal{A}ut(\mathrm{Spec}(O_L)/\mathbb{Z})$, 则由引理 1.i), 对任一素数 p 有 $G_{(p)}\cong \mathcal{A}ut(\mathrm{Spec}(O_L/pO_L)/\mathbb{F}_p)$, 而 $G\otimes\mathbb{Q}\cong G_{L/K}$, 由于 O_L 在 2 和 3 处有坏约化 (但在其他的位都有好约化), 公式 (8) 在 2 和 3 处无效 (但在其他的位都有效)。

此外注意 L 出现在 $G_{L/K}$ 的结构环中, 我们将看到这是相当普遍的情形, 这是 $G_{L/K}$ 与 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的一个很不相同之处。

例 6. 设 K 为特征 $p>0$ 的域, 而 $L=K[t^{\frac{1}{p}}]\cong K[x]/(x^p-t)$, 其中 $t\in K-K^p$。按上面的方法计算可得 $G_{L/K}=\mathrm{Spec}(R)$, 其中

$$R=K[y_0,y_1,...,y_{p-1},(\sum_{i=1}^{p-1} it^{i-1}y_i^p)^{-1}]/(y_0^p+(y_1^p-1)t+y_2^pt^2+\cdots+y_{p-1}^pt^{p-1}) \tag{10}$$

而它在 $X=\mathrm{Spec}(L)$ 上的作用 $\rho: G_{L/K}\times_K X\to X$ 由

$$\rho^*(\bar{x})=y_0\otimes_K 1+y_1\otimes_K \bar{x}+\cdots+y_{p-1}\otimes_K \bar{x}^{p-1} \tag{11}$$

给出 (为简单起见我们略去群概形运算公式, 例如当 $p=2$ 时, $G_{L/K}$ 的群概形结构由 $m^*(y_0)=y_0\otimes 1+y_1\otimes y_0$, $m^*(y_1)=y_1\otimes y_1$, $\iota^*(y_0)=y_0y_1^{-1}$, $\iota^*(y_1)=y_1^{-1}$, $o^*(y_0)=0$, $o^*(y_1)=1$ 给出)。我们看到 $\dim(G_{L/K})=p-1>0$ 且 $G_{L/K}$ 为非交换的。此外, $G_{L/K}$ 是整的但不是几何整的, 也不是正规的 (习题 10)。

在有限情形还可以利用基变换来计算自同构群概形。取有限正规扩张 $F\supset K$ 及有限 K-群概形 G 使得 $T=\mathrm{Spec}F$ 为 G-挠子 (见引理 Ⅵ.1.1)。则有范畴等价 (见命题 Ⅵ.1.5)

$$((K\text{-概形}))/\sim\ \leftrightarrow\ ((F\text{-概形, 带有 } G \text{ 的作用, 与 } G \text{ 在 } T \text{ 上的作用相容}))/\sim$$

特别地 (见例 Ⅵ.1.6) 在 $F\supset K$ 为伽罗瓦扩张的情形可取 G 为 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的离散群概形结构, 而有范畴等价

$$\{\text{在 } F \text{ 上分裂的有限平展 } K\text{-概形}\}/\sim\ \leftrightarrow \{G \text{ 的有限置换表示}\}/\sim$$

设 X 为 K 上的 n 次平展概形, 则 $X = \operatorname{Spec}\prod_{i=1}^{r} K_i$, 其中每个 K_i 是 K 的可分域扩张。取最小伽罗瓦扩张 $F \supset K$ 使得每个 K_i 都可嵌入 F 作为子域, 则 X 在 F 上分裂。由例 4 可知 $\mathcal{A}ut(X/K) \otimes_K F$ 同构于 $\mathfrak{S}_n$ 的离散 F-群概形结构。因此有 $G = \operatorname{Gal}(F/K)$ 在 $\mathfrak{S}_n$ 上的作用 (这等价于 G 到 $\mathfrak{S}_n$ 的自同构群的一个同态), 与 $\mathfrak{S}_n$ 在 $X \otimes_K F$ (作为集合) 上的置换作用相容 (即对任意 $\sigma \in G$, $g \in \mathfrak{S}_n$, $x \in X \otimes_K F$ 有 $\sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x)$)。设 G 在 $X \otimes_K F$ (作为集合) 上的作用是忠实的, 则 G 可以看作 $\mathfrak{S}_n$ 的子群。将 $\mathfrak{S}_n$ 的作用视为左乘作用, 则有

$$(\sigma \circ g)x = \sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x) = (\sigma(g) \circ \sigma)x \tag{12}$$

由此得

$$\sigma(g) = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \quad (\forall \sigma \in G,\ g \in \mathfrak{S}_n) \tag{13}$$

由此我们有一一对应

$$\mu : \{\mathfrak{S}_n \text{ 的 } G\text{-共轭类}\} \to \{K_i | 1 \leqslant i \leqslant r\}$$

其中对于任一 $g \in \mathfrak{S}_n$ 的 G-共轭类 C_g, $K' = \mu(C_g)$ 是对应于 g 的中心化子 H_g 的中间域, 且 $\#(C_g) = [K' : K]$, $|H_g| = [F : K']$, 故 $\sum_{i=1}^{r}[K_i : K] = n!$。

例 7. 若 $L \supset K$ 为伽罗瓦扩张且 $[L : K] > 2$, 则可取 $F = L$, 此时每个 $K \subset L$ 的中间域都作为某个 K_i 出现。为证明这一点, 由上所述只需证明任一子群 $H \subset G$ 都等于某个 H_g $(g \in \mathfrak{S}_n)$。

不妨设 $H \neq G$, 令 $r = i_G(H)$。取 $u_1 = e, u_2, \ldots, u_r$ 使得 $G = Hu_1 \cup \cdots \cup Hu_r$。若 $r > 2$, 定义 $g \in \mathfrak{S}_n$ 为 $g(hu_1) = hu_1$, $g(hu_i) = hu_{i+1}$ $(2 \leqslant i < r)$, $g(hu_r) = hu_2$ $(\forall h \in H)$。显然对任意 $h \in H$ 有 $g \circ \phi_h = \phi_h \circ g$, 其中 $\phi_h : H \to H$ 为用 h 左乘; 但对 $u \in G - H$ 有 $g \circ \phi_u \neq \phi_u \circ g$, 因为 $g(u \cdot e) \neq u \cdot e$。若 $r = 2$, 则 $|H| > 1$, 取 $a \neq e \in H$ 并定义 $g \in \mathfrak{S}_n$ 为 $g(hu_i) = hau_i$ $(\forall i > 1)$, $g(hu_1) = hu_1$ ($\forall h \in H$), 仍有 $g \circ \phi_h = \phi_h \circ g$ $(\forall h \in H)$ 但 $g \circ \phi_u \neq \phi_u \circ g$ $(\forall u \in G - H)$, 因为 $g(u \cdot e) \neq u$。在每一情形都有 $H_g = H$。

当 $[L : K] = 2$ 时显然每个 $K_i = K$。

若 $L\supset K$ 不是伽罗瓦扩张, 可能有 K_i 不是 $K\subset L$ 的中间域, 也可能有 $K\subset F$ 的中间域不作为一个 K_i 出现 (参看例 5)。此外, 此时 $G_{L/K}$ 中也不一定有子群概形自由可迁地作用于 $\mathrm{Spec}L$ 上。例如设 $[L:K]=5$ 而 $\mathrm{Gal}(F/K)\cong\mathfrak{S}_5$, 由于 $\mathfrak{S}_5$ 的所有 5 阶元都在同一个共轭类中, 它们对应于恰一个 K_i ($[K_i:K]=24$), 故 $G_{L/K}$ 没有 5 次子群概形。

3. 阿贝尔概形的自同构群概形

对于一个群概形 $G\to S$, 记 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{gs}}(G/S)$ 为 G 的所有 S-群概形自同构组成的群, 以区别于 $\mathrm{Aut}(G/S)$ (为 G 作为 S-概形的自同构群)。

命题 2. 设 S 为连通诺特概形, $\pi:X\to S$ 为阿贝尔概形, 则

i) $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的包含零截口的连通分支 $\mathcal{A}ut^0(X/S)\cong X$, 其中 X 在 X 上的作用为平移。

ii) 存在 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的闭子群概形 $\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$, 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Aut}^{\mathrm{gs}}_{X/S}:T\mapsto\mathrm{Aut}^{\mathrm{gs}}(T\times_S X/T)$$

且 $\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$ 的零分支同构于 S。

iii) $\mathcal{A}ut(X/S)\cong X\rtimes_S\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$, 故 $\mathcal{A}ut(X/S)/\mathcal{A}ut^0(X/S)\cong\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$。

证. i) 令 $\rho:\mathcal{A}ut^0(X/S)\times_S X\to X$ 为泛作用,

$$\zeta=\rho\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{A}ut^0(X/S)}\times_S o):\mathcal{A}ut^0(X/S)\to X \tag{1}$$

并令 $\rho'=m\circ(\zeta\times_S\mathrm{id}_X):\mathcal{A}ut^0(X/S)\times_S X\to X$, 则在 $\mathcal{A}ut^0(X/S)$ 的零截口上 ρ 与 ρ' 的限制相等, 故由刚性引理 (引理 Ⅶ.1.1) 可见 $\rho=\rho'$。另一方面, 由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的泛性, X 在自身上的平移作用诱导一个 S-态射 $\eta:X\to\mathcal{A}ut(X/S)$, 使得 $\zeta\circ\eta=\mathrm{id}_X$, 再由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的泛性可见 η 给出同构 $X\to\mathcal{A}ut^0(X/S)$。

ii) 一个自同构 $f\in\mathrm{Aut}(T\times_S X/T)$ 在 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{gs}}(T\times_S X/T)$ 中当且仅当

$$f\circ(\mathrm{id}_T\times_S o)=\mathrm{id}_T\times_S o:T\to T\times_S X \tag{2}$$

注意 (2) 是一个闭条件, 由此及推论 IV.2.3 立见 $\mathfrak{Aut}^{gs}_{X/S}$ 由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的一个闭子概形代表, 且易见它是 S-闭子群概形。

设 $H \subset \mathcal{A}ut^{gs}(X/S)$ 为零分支, $\phi : X \times_S H \to X \times_S H$ 为泛自同构。令 $\psi = \mathrm{pr}_1 \circ \phi - \mathrm{pr}_1 : X \times_S H \to X$, 则由刚性引理易见 $\psi = 0$, 即 $\phi = \mathrm{id}$, 这说明 id_H 经过 S。

iii) 由 i) 和 ii) 可见有 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层自然变换

$$\Phi : \underline{X} \times \underline{\mathcal{A}ut^{gs}(X/S)} \to \underline{\mathcal{A}ut(X/S)} \tag{3}$$

由推论 VII.1.2.ii) 可见 Φ 是自然等价, 故 Φ 诱导 S-概形同构

$$X \times_S \mathcal{A}ut^{gs}(X/S) \to \mathcal{A}ut(X/S) \tag{4}$$

再注意 $\mathcal{A}ut^0(X/S) \lhd \mathcal{A}ut(X/S)$ 即可见 (4) 是半直积分解。证毕。

特别地, 若 $S = \mathrm{Spec}(k)$, k 为代数闭域, 则 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 同构于 X 和一个离散群概形的半直积。

习题

1. 设 k 为域, 计算 $\mathcal{A}ut(\mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k/k)$。(提示: 参看 [H, Example II.6.6.2]。)

2. 设 C, C' 为域 k 上的亏格大于 1 的光滑射影曲线,计算 $\mathcal{A}ut(C \times_k C'/k)$。

3. 设 E 为域 k 上的椭圆曲线, $X = E^2 = E \times_k E$, 计算 $\mathcal{A}ut(X/k)$。

4. 设 $L \supset K$ 为伽罗瓦扩张, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, 则 G 可看作 $G_{L/K}(K)$。注意 $G_{L/K}$ 等价于 G 在 $\mathfrak{S}_n$ 上的共轭作用 ρ。证明 ρ 保持 $G_{L/K}(K) \subset \mathfrak{S}_n$ 的每个元不动, 而 $G \subset \mathfrak{S}_n$ 为 $G_{L/K}(K)$ 在 $\mathfrak{S}_n$ 中的中心化子。

5. 设 $L = k(x_1, ..., x_6)$ 为域 k 的纯超越扩域, $K = k(\sigma_1, ..., \sigma_6)$ ($\sigma_1, ..., \sigma_6$ 为 $x_1, ..., x_6$ 的初等对称多项式)。给出所有中间域 $L \supset K' \supset K$ 使得 $[L : K'] = 6$, 并计算 $\mathcal{A}ut(L/K')$。

6. 设 k 为任意域, $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$, $f \in \mathrm{Aut}(X/k)$。证明存在 $a, b \in k$ $(a \neq 0)$ 使得 $f^*(x) = x \mapsto ax + b$。

7. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, H 为 $\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/k)$ 的有限非零闭子群概形。证明 X/H 不是阿贝尔簇。

8. 设 $X \to S$ 为阿贝尔概形, ρ 为 X 在自身上的平移作用。记 $\hat{\rho}$ 为 ρ 诱导的 $X^{\mathrm{op}} \cong X$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的作用 (参看命题 VI.2.2)。证明 $\hat{\rho}$ 诱导 $\hat{X}$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的一个忠实作用, 但 $\hat{\rho}$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)^0 = \hat{X}$ 上的限制为平凡作用。

9. 将命题 1 的证明补充完整。

10. 证明例 6 中的 $G_{L/K}$ 是整的但不是几何整的 (即 R 是整环而 $R \otimes_K \bar{K}$ 不是整环), 也不是正规的 (即 R 不是整闭的)。

第 2 节　自同构群概形的微积分

1. 自同构的变形

定义 1. 设 S 为诺特概形, $\tau : X \to S$ 为有限型分离态射。设 S-概形 $\pi_T : T \to S$ 具有一个截口 $o_T : S \to T$, 一个 T-自同构 $f \in \mathrm{Aut}(T \times_S X/T)$ 称为 变形的, 如果

$$o_T \times_T f = \mathrm{id}_X \in \mathrm{Aut}(X/S) \tag{1}$$

显然所有这些变形 T-自同构组成 $\mathrm{Aut}(T \times_S X/T)$ 的一个子群, 记为 $\mathrm{DefAut}(T \times_S X/T)$。

命题 1. 设 $\tau : X \to S$ 为分离态射, $\pi_T : T \to S$ 为 S 在 S 上的无穷小扩张, 即 $\ker(o_T^*)^{n+1} = 0$ 对某个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立。则 $T \times_S X$ 的一个变形 T-自同构 f 典范等价于一个 (左) O_X-代数同态

$$\phi : P^n_{X/S} \to \tau^* \pi_{T*} O_T \tag{2}$$

使得 $(o_T \times_S \mathrm{id}_X)^* \circ \phi : P^n_{X/S} \to O_X$ 为对角态射 $\Delta : X \to X \times_S X$ 诱导的同态。故存在典范一一对应

$$\begin{aligned}&\mathrm{DefAut}(T \times_S X/T) \leftrightarrow \\ &\{\phi \in \mathrm{Hom}_{O_X\text{-代数}}(P^n_{X/S}, \tau^* \pi_{T*} O_T) | (o_T \times_S \mathrm{id}_X)^* \circ \phi = \Delta^*\}\end{aligned} \tag{3}$$

其中一个 $f \in \mathrm{DefAut}(T \times_S X/T)$ 对应于 $\phi = \alpha'^*$, 这里

$$\alpha' = (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2 \circ f) : T \times_S X \to X \times_S X \tag{4}$$

(即 $(t,x) \mapsto (x,(f(t,x)))$。此外, 若 T 是一个 S-群概形 G 的闭子概形, $\rho : G \times_S X \to X$ 为作用, 而 $f = \mathrm{pr}_1 \times_S \rho|_{T\times_S X}$, 则 (4) 与 Ⅲ.2.2 中的 α' 一致。

证. 易见有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\tau} & X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle o_T} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ T & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} & T\times_S X & \xrightarrow{\alpha'} & X\times_S X \end{array} \tag{5}$$

其中 $i = o_T \times_S \mathrm{id}_X$ (即 $x \mapsto (o_T \circ \tau(x), x)$)。令 $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I}'$, $\mathcal{M}$) 为 Δ (i, o_T) 的理想层。由 (5) 的右方框可见 α' 诱导同态 $\alpha'^*\mathcal{I} \to \mathcal{I}'$, 故诱导同态

$$P^n_{X/S} \to i^{-1}(O_{T\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1}) \tag{6}$$

另一方面, (5) 的左方框是拉回且 o_T 为 $\pi_T : T \to S$ 的截口, 对于正合列 $0 \to \mathcal{M} \to O_T \to o_{T*}O_S \to 0$ 应用 pr_1^* 得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathrm{pr}_1^*\mathcal{M} & \to & \mathrm{pr}_1^*O_T & \to & \mathrm{pr}_1^* o_{T*}O_S & \to 0 \\ & & & \downarrow{\simeq} & & \downarrow{\simeq} & \\ 0 \to & \mathcal{I}' & \to & O_{T\times_S X} & \to & i_*O_X & \to 0 \end{array} \tag{7}$$

其行都是正合的。故 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M} \cong \mathcal{I}'$。因此有

$$O_{T\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1} \cong \mathrm{pr}_1^*(O_T/\mathcal{M}^{n+1}) \cong \mathrm{pr}_1^*(O_T) \tag{8}$$

因为由所设 $\mathcal{M}^{n+1} = 0$。应用 i^{-1} 得同构

$$i^{-1}(O_{T\times_S X}/\mathcal{I}'^{n+1}) \cong i^{-1}(\mathrm{pr}_1^*O_T) \cong \tau^* o_T^{-1}(O_T) \cong \tau^*\pi_{T*}O_T \tag{9}$$

将 (6) 和 (9) 合起来得到同态 $\phi : P^n_{X/S} \to \tau^*\pi_{T*}O_T$。

当 T 为 S 上的一个群概形 G 的闭子概形而 $f = \mathrm{pr}_1 \times_S \rho|_{T\times_S X}$ 由一个作用 $\rho: G\times_S X \to X$ 给出时, 由上面的讨论及命题 Ⅲ.2.1 的证明易见 ϕ 与 α'^* 一致。

反之, 给定 O_X-代数同态 $\phi: P^n_{X/S} \to \tau^*\pi_{T*}O_T$, 注意 $\mathcal{A} = \tau^*\pi_{T*}O_T$ 可以看作 $T\times_S X$ 的结构层, 因为 T 的拓扑空间就是 S 的拓扑空间。另一方面, $P^n_{X/S}$ 可以看作理想层 $\mathcal{I}^{n+1}$ 所定义的闭子概形 $Y \subset X\times_S X$ 的结构层, 而 Y 的拓扑空间与 $\Delta(X) \cong X$ 的拓扑空间同构。故可定义一个态射 $\alpha': T\times_S X \to Y$, 其拓扑空间连续映射为单位映射, 而结构层同态为 ϕ。我们来证明

$$f = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \circ \alpha'): T\times_S X \to T\times_S X \tag{10}$$

为变形 T-自同构。由于 f 的拓扑空间连续映射为单位映射, 只需验证 f^* 为 O_T-代数同构即可。由所设 $f^* \equiv \mathrm{id} \pmod{\mathcal{M}}$, 而 $\mathcal{A}$ 作为 O_T-模有一个过滤

$$0 = \mathcal{M}^{n+1}\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^n\mathcal{A} \subset \cdots \subset \mathcal{M}\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \tag{11}$$

由于 f^* 是 O_T-线性的, 它对任意 i $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ 诱导 $\mathcal{M}^i\mathcal{A} \to \mathcal{M}^i\mathcal{A}$, 故诱导

$$f_i^*: \mathcal{M}^i\mathcal{A}/\mathcal{M}^{i+1}\mathcal{A} \to \mathcal{M}^i\mathcal{A}/\mathcal{M}^{i+1}\mathcal{A} \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{12}$$

注意 $\mathcal{M}^i\mathcal{A}/\mathcal{M}^{i+1}\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}/\mathcal{M}\mathcal{A} \cong O_X$-模, 故每个 f_i^* 是 O_X-线性的。此外, f^* 在 $O_T \otimes_{O_S} 1$ 上等于单位映射, 故每个 f_i^* 在 $\mathcal{M}^i\mathcal{A}/\mathcal{M}^{i+1}\mathcal{A}$ 上等于单位映射。由此用 5-引理与归纳法即可见 f^* 为同构。证毕。

特别地, 当 $n = 1$ 时, 一个满足 $o_T^* \circ \phi = \Delta^*$ 的 O_X-代数同态 $\phi: P^1_{X/S} \to \tau^*\pi_{T*}O_T$ 等价于一个 O_X-线性同态 $\Omega^1_{X/S} \to \tau^*\pi_{T*}\mathcal{M}$。故有

推论 1. 设 $\tau: X \to S$ 为分离态射, $\pi_T: T \to S$ 为 S 在 S 上的无穷小扩张使得 $\mathcal{M} = \ker(o_T^*)$ 满足 $\mathcal{M}^2 = 0$。则 $T\times_S X$ 的一个变形 T-自同构 f 典范等价于一个 (左) O_X-线性同态 $-\phi: \Omega^1_{X/S} \to \tau^*\pi_{T*}\mathcal{M}$, 故有典范一一对应

$$\mathrm{DefAut}(T\times_S X/T) \leftrightarrow \mathrm{Der}_{O_S}(O_X, \tau^*\pi_{T*}\mathcal{M}) \tag{13}$$

当 τ 为平坦紧的且具有几何连通约化纤维时, 应用 τ_* 立得

推论 2. 设 $\tau : X \to S$ 为平坦紧态射且具有几何连通约化纤维, $\pi_T : T \to S$ 为 S 在 S 上的无穷小扩张使得 $\ker(o_T^*)^{n+1} = 0$。则 $T \times_S X$ 的一个变形 T-自同构诱导一个典范 O_S-代数同态 $\tau_* P^n_{X/S} \to \pi_{T*} O_T$。

2. 自同构群概形与变形

将命题 1 和推论 1 应用于自同构群概形可得如下结果。

定理 1. 设 $\tau : X \to S$ 为分离态射使得存在自同构群概形 $G = \mathcal{A}ut(X/S)$。记 $\mathcal{M} = \ker(o_G^*)$。对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 记 $T_n \subset G$ 为 $\mathcal{M}^{n+1}$ 定义的闭子概形, 并记 $\mathcal{A}_n = \pi_{T_n*} O_{T_n}$ 和 $\phi_n : P^n_{X/S} \to \tau^* \mathcal{A}_n$ 为命题 1 中的典范同态 (对于 $T = T_n$, $\phi = \phi_n$)。则 $(\mathcal{A}_n, \phi_n)$ 具有如下泛性:

(*) 对于 S 在 S 上的任意无穷小扩张 $\pi_T : T \to S$ 使得 $\ker(o_T^*)^{n+1} = 0$, 及任意 (左) O_X-代数同态 $\phi : P^n_{X/S} \to \tau^* \pi_{T*} O_T$, 存在唯一 O_S-代数同态 $\psi : \mathcal{A}_n \to \pi_{T*} O_T$ 使得 $\tau^*(\psi) \circ \phi_n = \phi$。

此外, 典范同态 $\alpha'^* : \Omega^1_{X/S} \to \tau^* \omega_{G/S}$ 具有如下泛性:

(**) 对于 S 在 S 上的任意无穷小扩张 $\pi_T : T \to S$ 及任意 (左) O_X-模同态 $\phi : \Omega^1_{X/S} \to \tau^* o_T^*(\ker(o_T^*))$, 存在唯一 O_S-模同态 $\psi : \omega_{G/S} \to o_T^*(\ker(o_T^*))$ 使得 $\tau^*(\psi) \circ \alpha'^* = \phi$。

证. 令 $\Phi : G \times_S X \to G \times_S X$ 为泛 G-自同构, 则任意 O_X-代数同态 $\phi_n : P^n_{X/S} \to \tau^* \mathcal{A}_n$ 由

$$\alpha' = (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2 \circ \Phi) : G \times_S X \to X \times_S X \tag{1}$$

诱导。由命题 1, ϕ 典范等价于 $T \times_S X$ 的一个变形 T-自同构 f。由 G 的泛性, 存在唯一 S-态射 $\zeta : T \to G$ 使得 f 等于 Φ 通过 ζ 的拉回。注意 $\alpha' \circ (\zeta \times_S \mathrm{id}_X) : T \times_S X \to X \times_S X$ 诱导 ϕ, 故 $\tau^*(\zeta^*) \circ \phi_n = \phi$, 其中 $\zeta^* : \mathcal{A}_n \to \pi_{T*} O_T$ 由 ζ 诱导。反之, 若 $\psi : \mathcal{A}_n \to \pi_{T*} O_T$ 满足 $\tau^*(\psi) \circ \phi_n = \phi$, 令 $\zeta' : T \to G$ 为由 ψ 诱导的 S-态射, 而 $f' \in \mathrm{Aut}(T \times_S X/T)$ 为 Φ 通过 ζ' 的拉回, 则由命题 1 可见 f' 由 ϕ 决定, 从而 $f' = f$。故由 G 的泛性可见 $\zeta' = \zeta$。这就证明了 (*)。

对于 (**), 可以约化到 $\ker(o_T^*)^2=0$ 的情形, 此时一个 (左) O_X-模同态 $\Omega^1_{X/S}\to\tau^*o_T^*(\ker(o_T^*))$ 等价于一个 (左) O_X-代数同态 $P^1_{X/S}\to\tau^*\pi_{T*}O_T$, 故 (**) 是 (*) 的特殊情形。证毕。

特别地, 取 $T=\mathbf{Spec}O_S[t]/(t^2)$ 并取 $o_T:S\to T$ 为 (t) 定义的嵌入, 则由 (**) 及推论 1 得

推论 3. 设 $\tau:X\to S$ 为分离态射使得存在自同构群概形 $G=\mathcal{A}ut(X/S)$。令 $T=\mathbf{Spec}O_S[t]/(t^2)$ 而 $o_T:S\to T$ 为 (t) 定义的嵌入, 则对 $T\times_S X$ 的一个变形 T-自同构 f, 存在唯一 $\bar{D}\in\mathrm{Hom}_{O_S}(\omega_{G/S},O_S)$ 使得 $\tau^*(\bar{D})\circ\alpha'^*:\Omega^1_{X/S}\to O_X$ 等于推论 1 中的同态 $-\phi$, 它在 $-\rho_*$ 之下对应于 $\psi(\bar{D})$。故有典范一一对应

$$\mathrm{Lie}(G/S)\leftrightarrow\mathrm{DefAut}(T\times_S X/T)\tag{2}$$

注 1. 定理 1 中的泛性可以用来局部地确定 $G=\mathcal{A}ut(X/S)$ 的群概形结构, 即对任意 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 确定 $m:G\times_S G\to G$ 所诱导的 $T_n\times_S T_n\to T_{2n}$。令

$$\delta^{n,n}:P^{2n}_{X/S}\to P^n_{X/S}\otimes_{O_X}P^n_{X/S}\tag{3}$$

为同态 $\overline{a\otimes_{O_S}b}\mapsto\overline{a\otimes_{O_S}1}\otimes_{O_X}\overline{1\otimes_{O_S}b}$ (参看 Ⅲ.2 节), 则 ϕ_n 诱导

$$(\phi_n\otimes_{O_X}\phi_n)\circ\delta^{n,n}:P^{2n}_{X/S}\to\tau^*\mathcal{A}_n\otimes_{O_X}\tau^*\mathcal{A}_n\cong\tau^*(\mathcal{A}_n\otimes_{O_S}\mathcal{A}_n)\tag{4}$$

由 $(\mathcal{A}_{2n},\phi_{2n})$ 的泛性, 这诱导 O_S-代数同态 $\mathcal{A}_{2n}\to\mathcal{A}_n\otimes_{O_S}\mathcal{A}_n$, 它等价于一个 S-态射 $\mu_n:T_n\times_S T_n\to T_{2n}$。不难验证 μ_n 由

$$m\circ(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1):G\times_S G\to G\tag{5}$$

(即 $(g,g')\mapsto g'g$) 诱导。

3. 自同构群概形微积分的基本定理

定理 2. 设 S 为诺特概形, $\tau:X\to S$ 为有限型分离态射使得存在自同构群概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$。记 $\rho_{X/S}:\mathcal{A}ut(X/S)\times_S X\to X$ 为泛作用。

i) $\rho_{X/S}$ 诱导的典范 O_S-李代数凝聚层同态 (见定理 Ⅲ.2.1)

$$-\rho_{X/S*} : Lie(\mathcal{A}ut(X/S)/S) \to Der_{O_S}(O_X, O_X) \tag{1}$$

为同构。

ii) 当 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形 (p 为素数) 时, (1) 为 O_S 上的 p-李代数层的同构。

iii) 设 $G \to S$ 为交换群概形而 $\rho : G \times_S X \to X$ 为 G 在 X 上的一个作用, 则 ρ 诱导的典范 O_S-李代数层同态

$$Lie(G/S) \to Lie(\mathcal{A}ut(X/S)/S) \to Der(O_X, O_X) \tag{2}$$

经过 $Der_S(O_X, O_X)^{\rho_{X/S}}$。特别地当 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 为交换群概形时有

$$Der_{O_S}(O_X, O_X)^{\rho_{X/S}} = Der_{O_S}(O_X, O_X) \tag{3}$$

故此时有交换 O_S-李代数凝聚层的典范同构 $Lie(\mathcal{A}ut(X/S)/S) \xrightarrow{\simeq} Der_S(O_X, O_X)^{\rho_{X/S}}$。

证. i) 只需考虑 S 为仿射的情形, 故设 $S = \mathrm{Spec}(R)$。记 $o : S \to \mathcal{A}ut(X/S)$ 为 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的单位截口。令 $T = \mathrm{Spec}R[t]/(t^2)$ 而 $o_T : S \to T$ 为 (t) 定义的嵌入。则 $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}ut(X/S)/S)$ 的一个截口对应于 $Hom_{O_S}(\omega_{\mathcal{A}ut(X/S)/S}, O_S)$ 的一个截口, 它等价于一个 S-态射 $\zeta : T \to \mathcal{A}ut(X/S)$ 使得 $\zeta \circ o_T = o$。由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的泛性, 这样一个 ζ 等价于一个变形 T-自同构 $T \times_S X \to T \times_S X$。由定理 1, 这等价于一个 O_X-线性同态 $\Omega^1_{X/S} \to O_X$, 而这又等价于 $\mathrm{Der}_S(O_X, O_X)$ 的一个元。这样合成 (见 (2.2))

$$\begin{aligned}\eta : \mathrm{Lie}(\mathcal{A}ut(X/S)/S) &\to \{\zeta : T \to \mathcal{A}ut(X/S) | \zeta \circ o_T = o\} \to \\ &\to \mathrm{DefAut}(T \times_S X/T) \to \mathrm{Der}_S(O_X, O_X)\end{aligned} \tag{4}$$

为一一对应 (这由推论 3 也可看出)。注意 $-\eta$ 是由 $\rho_{X/S}$ 诱导的映射 (见命题 1 和定理 Ⅲ.2.1.iii)), 它是 R-李代数同态。故 (1) 是 O_S-李代数同构。

ii) 当 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形时, 由定理 Ⅲ.2.1.iii) 可知 (1) 为 p-李代数同态, 故为 O_S 上的 p-李代数同构。

iii) 由定理 Ⅲ.2.1 立得。证毕。

注 2. 对于 $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k 为域) 而 X 为 k 上的射影概形的情形, 定理 2 说 X 的自同构群概形的李代数典范同构于其向量场组成的李代数。这是几何学中的一个普遍事实, 我们下面对此做一个简单的解释 (参看 [L-5])。

先看复几何的情形。设 $\phi : X \to Y$ 为复解析空间的解析映射, 若 ϕ 是一一映射且 ϕ^{-1} 也是解析的, 则称 ϕ 为解析自同构。显然一个复解析空间 X 的所有解析自同构组成一个群 $Aut(X)$, 称为 X 的解析自同构群。若 X 是紧致的, 则 $Aut(X)$ 具有自然的几何结构: $Aut(X)$ 是一个复解析空间, 它的群运算是解析映射, 且 $Aut(X)$ 在 X 上的典范作用 $Aut(X)\times X \to X$ (即 $(\phi, x) \mapsto \phi(x)$) 是解析映射; $Aut(X)$ 有一个正规子群 $Aut^0(X)$ 为连通李群, 而商群 $Aut(X)/Aut^0(X)$ 是离散群, 换言之作为解析空间, $Aut(X)$ 是一些 $Aut^0(X)$ 的拷贝的直并。令 Θ_X 为 X 的所有 (整体) 向量场组成的李代数, 则有典范的复李代数同构 $\Theta_X \to Lie(Aut(X))$。

再来看微分几何的情形。对于一个紧致实流形 X, 同样可以定义 X 上的实向量场李代数 Θ_X, 但它一般是无穷维的。如果 X 作为流形的自同构群 $Aut(X)$ 具有李群结构, 则也应有典范同构 $Lie(Aut(X)) \cong \Theta_X$, 但我们还没有无穷维李群的很好的定义。因此我们设法限制 Θ_X 到有限维线性空间。对此有多种方法, 一种方法是取一组线性微分方程, 考虑所有"调和"的向量场和"调和"的自同构; 另一种方法是取 X 上的一个适当的度量, 而考虑所有正交向量场和保距自同构。只要能有自然的途径将 Θ_X 限制到有限维, 就可以保证 $Aut(X)$ 具有李群结构且有典范同构 $Lie(Aut(X)) \cong \Theta_X$。

下面的命题说明对于有限平展覆盖, 无穷小变形自同构可以自由地提升 ([L-10])。

命题 2. 设 $X \to S$ 为有限型分离态射, $e : \tilde{X} \to X$ 为有限平展覆盖, T 为 S 在 S 上的无穷小扩张。则 $T \times_S X$ 的任一变形 T-自同构 f 可以唯一地提升为 $T \times_S \tilde{X}$ 的一个变形 T-自同构。

证. 为简单起见设 e 为 n 次平展态射。令 Y 为 $e\times_S e : \tilde{X}\times_S\tilde{X} \to X\times_S X$

和 $\alpha' = (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2 \circ f) : T \times_S X \to X \times_S X$ 的拉回，则下面的交换图是拉回:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\beta} & \tilde{X} \times_S \tilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle e\times_S e} \\ T \times_S X & \xrightarrow{\alpha'} & X \times_S X \end{array} \tag{5}$$

故在集合论意义下 $\beta(Y) = (e \times_S e)^{-1}(\Delta_X) \supset \Delta_{\tilde{X}}$。因 e 是平展的，$\Delta_{\tilde{X}}$ 在 $(e \times_S e)^{-1}(\Delta_X) \cong \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ 中是既开又闭的。令 Y_0 为 Y 既开又闭子概形使得作为集合有 $\beta(Y_0) = \Delta_{\tilde{X}}$，则 $\gamma|_{Y_0}$ 为 n 次平展的。令

$$\mu = (\mathrm{pr}_1 \circ \gamma|_{Y_0}, \mathrm{pr}_2 \circ \beta|_{Y_0}) : Y_0 \to T \times_S \tilde{X} \tag{6}$$

我们来说明 μ 是闭嵌入，为此只需在 X 上的纤维上验证即可，而这是显然的。由于 Y_0 和 $T \times_S \tilde{X}$ 都是在 $T \times_S X$ 上 n 次平坦的，可见 μ 是同构。令

$$\tilde{f} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \circ \beta|_{Y_0} \circ \mu^{-1}) : T \times_S \tilde{X} \to T \times_S \tilde{X} \tag{7}$$

则有交换图:

$$\begin{array}{ccc} T \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & T \times_S \tilde{X} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e} \\ T \times_S X & \xrightarrow{f} & T \times_S X \end{array} \tag{8}$$

由标准的形式完备化方法，不难验证 $\tilde{f}$ 为变形 T-自同构。

最后，由形式完备化方法不难验证 $\tilde{f}$ 的唯一性。证毕。

由定理 1 和定理 2 及命题 2 的证明立得

推论 4. 设 S 为诺特概形，$\tau : X \to S$ 为有限型分离态射，$e : \tilde{X} \to X$ 为有限平展覆盖，使得存在自同构群概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 和 $\mathcal{A}ut(\tilde{X}/S)$，且它们在 S 上是局部有限型的。设 $T \subset \mathcal{A}ut(X/S)$ 为 S 在 S 上的一个无穷小扩张，则 e 诱导闭嵌入 $T \hookrightarrow \mathcal{A}ut(\tilde{X}/S)$。

一个特殊情形是 $X \cong \tilde{X}/H$，其中 H 为 n 次离散群概形 (可看作群)

自由地作用于 $\tilde{X}$ 上。此时对任意 $\sigma \in H$ 有交换图

$$
\begin{array}{ccccccc}
T \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}_T \times \sigma} & T \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & T \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}_T \times \sigma^{-1}} & T \times_S \tilde{X} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \times_S e} \\
T \times_S X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T \times_S X & \xrightarrow{f} & T \times_S X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T \times_S X
\end{array} \tag{9}
$$

将 σ 看作 $G = \mathcal{A}ut(\tilde{X}/S)$ 的截口，它在 G 上的共轭作用记为 $\tilde{\sigma}$。由命题 2 中提升的唯一性及 (9) 有

$$
(\mathrm{id}_T \times \sigma^{-1}) \circ \tilde{f} \circ (\mathrm{id}_T \times \sigma) = \tilde{f} \tag{10}
$$

由 G 的泛性这说明 $\tilde{\sigma}|_T = \mathrm{id}_T$。由 H 的离散性不难定义其中心化子

$$
C_G(H) = \bigcap_{\sigma \in H} \sigma G \sigma^{-1} \tag{11}
$$

上面的讨论说明 $T \subset C_G(H)$。注意 X 是 H 在 $\tilde{X}$ 上的作用 ρ_H 与 $\mathrm{pr}_2 : H \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ 的推出，故下图是推出:

$$
\begin{array}{ccc}
H \times C_G(H) \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{23}} & C_G(H) \times_S \tilde{X} \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_2, \rho_H \circ \mathrm{pr}_{13})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{C_G(H)} \times_S e} \\
C_G(H) \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{C_G(H)} \times_S e} & C_G(H) \times_S X
\end{array} \tag{12}
$$

令 $\tilde{f} : C_G(H) \times_S \tilde{X} \to C_G(H) \times_S \tilde{X}$ 为 $\mathcal{A}ut(\tilde{X}/S) \times_S \tilde{X}$ 的典范自同构所诱导的 $C_G(H)$-自同构，由 (11) 可见下图交换:

$$
\begin{array}{ccc}
H \times C_G(H) \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}_H \times \tilde{f}} & H \times C_G(H) \times_S \tilde{X} \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_2, \rho_H \circ \mathrm{pr}_{13})} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_2, \rho_H \circ \mathrm{pr}_{13})} \\
C_G(H) \times_S \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & C_G(H) \times_S \tilde{X}
\end{array} \tag{13}
$$

故由推出 (12) 可见 $\tilde{f}$ 诱导一个 $C_G(H)$-自同构 $f \in \mathrm{Aut}(C_G(H) \times_S X/C_G(H))$，这给出一个典范同态 $\eta_e : C_G(H) \to \mathcal{A}ut(X/S)$。由例 1.4 可知 $\ker(\eta_e)$ 的一个元 σ 等价于 $\tilde{X} \times_X \tilde{X} \cong H \times \tilde{X}$ 的一个 $\tilde{X}$-自同构与 H 的作用交换，将 σ 和 H 的元都看作 $\mathrm{Aut}(\tilde{X} \times_X \tilde{X}/\tilde{X}) \cong \mathfrak{S}_n$ 的元，这

等价于 $\sigma \in C_{\mathfrak{S}_n}(H)$。由 $C_{\mathfrak{S}_n}(H) \cong H$ (习题 2) 可见 $\ker(\eta_e)$ 是有限平展的且 $\deg(\ker(\eta_e)) = n$。

在 $S = \mathrm{Spec} k$ (k 为域) 的情形, 由命题 2 (和平移) 可见 η_e 是平展的, 故由引理 Ⅱ.1.5 可见 $\mathcal{A}ut^0(X/k) \subset \eta_e(C_G(H))$。记 $C_G^0(H)$ 为 $C_G(H)$ 的零分支, 则

$$\mathcal{A}ut^0(X/k) \cong C_G^0(H)/(C_G^0(H) \cap \ker(\eta_e)) \tag{14}$$

其中 $C_G^0(H) \cap \ker(\eta_e)$ 的次数整除 n。总之有

推论 5. 设 S 为诺特概形, $\tau : X \to S$ 为有限型分离态射, $e : \tilde{X} \to X$ 为有限平展覆盖, 使得存在自同构群概形 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 和 $\mathcal{A}ut(\tilde{X}/S)$, 且它们在 S 上是局部有限型的; H 为 n 次离散群概形自由地作用于 $\tilde{X}$ 上, 使得 $X \cong \tilde{X}/H$。将 H 看作 $G = \mathcal{A}ut(\tilde{X}/S)$ 的闭子群概形, 并定义 H 在 G 中的中心化子 $C_G(H)$ 如 (11), 则有典范拟有限同态 $\eta_e : C_G(H) \to \mathcal{A}ut(X/S)$, 其像包含 $\mathcal{A}ut^0(X/S)$ 的一个稠密开子概形, 而其核是 n 次有限平展的。在 $S = \mathrm{Spec} k$ (k 为域) 的情形 η_e 是平展的且 (14) 成立, 其中 $C_G^0(H)$ 为 $C_G(H)$ 的零分支。

4. 一些应用

推论 6 (塞尔-兰定理, 参看 [M3]). 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, $e : Y \to X$ 为有限平展覆盖, 其中 Y 为 k-代数簇且有一个 k-点。则 Y 也是阿贝尔簇。

证. 不妨设 k 是代数闭域。由 X 是阿贝尔簇及 e 有限平展可见 Y 是 k 上的射影簇。令 $G = \mathcal{A}ut^0(Y/k)$, $\rho : G \times_k Y \to Y$ 为泛作用。对任意闭点 $y \in Y$, ρ 在 $G \times_k \{y\}$ 上的限制 $\rho_y : G \times_k \{y\} \to Y$ 诱导一个 k-线性映射 $\rho_{y*} : Lie(G/k) \to T_{Y,y}$。由 X 是阿贝尔簇可见 $\Omega^1_{X/k}$ 平凡, 而由 e 平展有同构 $\Omega^1_{Y/k} \cong e^*\Omega^1_{X/k}$, 从而也平凡。故由定理 2 可见对任意闭点 $y \in Y$ 有

$$\rho_{y*} : Lie(G/k) \cong \Gamma(Y, \mathcal{T}_{Y/k}) \xrightarrow{\cong} T_{Y,y} \tag{1}$$

特别地这说明 $\dim(G) \leqslant \dim(Y)$。另一方面, 对 $0 \in X$ 的任意无穷小扩张 $T \subset X$, 由命题 1.2 有闭嵌入 $T \to \mathcal{A}ut(X/k)$, 再由推论 4 有闭嵌入

$T \to G$, 故由维数理论 (参看 [L1, 第 X 章] 或其他交换代数教科书) 有 $\dim(G) \leqslant \dim(Y)$。由此得 $\dim(G) = \dim(Y)$, 且 G 是光滑的。而 (1) 说明 $\rho_y : G \times_k \{y\} \to Y$ 是光滑的, 从而是开映射, 故 y 的 ρ-轨迹是开集。由于 Y 是整的, 任何两个非空开子集相交, 由此可见 ρ 是可迁的。而由 $\dim(G) = \dim(Y)$ 可见 ρ_y 是一般有限的, 从而由 ρ 是作用可见 ρ_y 是拟有限的, 再由 ρ 的可迁性可见 ρ_y 是有限的, 从而 G 在 k 上是射影的, 故为阿贝尔簇。

任意取定闭点 $y \in Y$, 则由 $\dim(G) = \dim(Y)$ 可见 y 的安定子群概形 $H_y \subset G$ 是有限的, 而由 G 交换可见任意闭点 $y' \in Y$ 的安定子群概形都是 H_y, 故 H_y 在 Y 上的作用平凡, 从而由 G 的泛性有 $H_y = 0$。这说明 ρ_y 是 k-概形的同构。证毕。

我们注意上面证明的一个关键之处是证明 $\dim(G) \leqslant \dim(Y)$, 由 (1) 这等价于 G 是光滑的。但当 k 的特征为 0 时 G 总是光滑的 (见推论 Ⅲ.1.2), 故由上面的论证过程可以证明下列两个事实。

推论 7. 设 X 为特征 0 的域 k 上的射影代数簇, 有一个 k-点。则 X 是阿贝尔簇当且仅当 $\Omega^1_{X/k}$ 平凡。

推论 8. 设 X 为域 k 上的射影代数簇, 有一个 k-点且 $\Omega^1_{X/k}$ 平凡。则 X 是阿贝尔簇 $\Leftrightarrow \dim(\mathcal{A}ut(X/k)) \geqslant \dim(X) \Leftrightarrow \mathcal{A}ut^0(X/k)$ 在 X 上的典范作用是可迁的。

例 1. 特征非零的域上切从平凡的光滑射影代数簇不一定是阿贝尔簇, 下面是 Igusa 给出的一个著名例子 (见 [I])。

设 k 为特征 2 的域, E_1, E 为 k 上的椭圆曲线, 其中 E_1 是正常的, $t \in E_1$ 为 2 阶元。令 $X = E_1 \times_k E$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, 并定义 G 在 X 上的作用 ρ 为 $\bar{1}(x, y) = (x + t, -y)$, 则 ρ 为自由作用, 故 $Y = X/G$ 在 k 上光滑 (因为投射 $X \to Y$ 是光滑的)。易见 Y 不是阿贝尔簇, 因若不然, 由推论 Ⅶ.1.2.ii) 可知投射 $q : X \to Y$ 是同态, 故 $q(x, 2y) = q(x, y) + q(0, y) = q(x, y) + q(t, -y) = q(x + t, 0)$, 这样 q 不可能是满射, 矛盾。另一方面, 易见 G 的作用与 $X[F]$ 的左乘作用交换, 故诱导 $X[F]$ 在 Y 上的自由作用, 从而由命题 Ⅲ.2.1 可见 $\Omega^1_{Y/k}$ 是平凡的。

由此还可给出一个例子说明, 在特征非零的情形光滑射影代数簇的皮卡概形不一定是约化的。令 $E_2 = E_1/(0,t)$, 则易见投射 $X \to E_2$ 等化 ρ 与 $\mathrm{pr}_2 : G \times_k X \to X$, 故诱导满态射 $Y \to E_2$。易见 $E_2 = Alb(Y)$: 因为诱导的 $f : X \to Alb(Y)$ 必为阿贝尔簇的满同态, 故由上面的讨论可见 $f(x,y) = f(x,0)$, 从而有满同态 $f' : E_1 \to Alb(Y)$, 且显然 $t \in \ker(f')$。由命题 Ⅶ.4.2 得 $\hat{Y} \cong \hat{E}_2 \cong E_2$。若 E 是超奇的, 易见 $H = \ker(2_E)$ 在 X 上的平移作用与 G 的作用交换, 故诱导 H 在 Y 上的自由作用, 且有 $Y/H \cong Y$ (因为 $X/H \cong X$)。由此及命题 Ⅵ.2.3 可见 $\mathcal{P}ic(Y/k)$ 有一个子群概形同构于 $H^D \cong H$。由例 Ⅶ.2.3 可见 $\hat{E}_2$ 与 H 不可能有非零交, 故有单同态 $\hat{E}_2 \times_k H \hookrightarrow \mathcal{P}ic(Y/k)$, 这说明 $\mathcal{P}ic(Y/k)$ 不是约化的 (实际上 $\mathcal{P}ic^\tau(Y/k) \cong \hat{E}_2 \times_k H^D$)。

这个例子还说明光滑射影代数簇的自同构群概形不一定是约化的。注意 E_1 在 $X = E_1 \times_k E$ 上的左乘作用与 G 的作用交换, 故诱导 E_1 在 Y 上的作用。由上所述还有 H 在 Y 上的作用, 故有 $E_1 \times_k H$ 在 Y 上的作用, 这给出典范同态 $\phi : E_1 \times_k H \to \mathcal{A}ut(Y/k)$, 而由定理 2 可见 ϕ 是闭嵌入。另一方面, 由于 Y 不是阿贝尔簇, 由推论 8 可见 $\dim(\mathcal{A}ut^0(Y/k)) < 2$, 这说明 $\mathcal{A}ut(Y/k)$ 不是约化的 (实际上 $\mathcal{A}ut^0(Y/k) \cong E_1 \times_k H$)。

例 2. 设 E 为 $\mathbb{F}_3$ 上的超奇椭圆曲线 $y^2 = x^3 - x$, 它有一个 3 阶自同构 $\sigma : (x,y) \mapsto (x+1,y)$。设 E' 为一个特征为 3 的域 k 上的正常椭圆曲线, $a \in E'$ 为一个 3 阶 k-点。令 $X = E \times E'$, 则 X 有一个 3 阶自同构 $(g,g') \mapsto (\sigma(g), g'+a)$。令 G 为这个自同构在 $Aut(X/k)$ 中生成的子群, 则易见 G 在 X 上的作用是自由的。此外 G 的作用与子群概形 $\alpha_3 \times_k \mu_3 \subset X$ 的平移作用交换, 因为 $\alpha_3 \times_k \mu_3$ 没有 3 阶自同构。仿照例 1 中的讨论可见在 $Y = X/G$ 上有 $\alpha_3 \times_k \mu_3$ 的自由作用, 故 $\mathcal{T}_{Y/k} \cong \mathcal{O}_Y^2$。但 Y 不是阿贝尔簇。

猜想当域 k 的特征 > 3 时, 若 k-射影簇 X 有一个 k-点且 $\Omega^1_{X/k}$ 平凡则 X 是阿贝尔簇。

注 3. 推论 7 在复几何中没有平行的事实, 即切丛平凡的紧致复流形不一定是复环面。下面是中村郁给出的一个反例 ([Nak])。

令 $G \subset GL_3(\mathbb{C})$ 为所有对角元为 1 的上三角阵组成的李子群, $K \subset \mathbb{C}$

为虚二次域，$O_K \subset K$ 为 K 的整数环。易见 $H = GL_3(O_K) \cap G$ 为 G 的离散子群，而齐性空间 $X = G/H$ 为紧致复流形且具有平凡的切从。但 X 不是李群，因为紧致复李群都是复环面，从而其向量场李代数是交换的，而 $\Theta_X \cong Lie(G)$ 不是交换的 (事实上 $\mathcal{A}ut^0(X) \cong G$，参看注 2)。这也说明 X 不是代数的 (见定理 2)。王宪钟证明了 (见 [Wa])：一个紧致复流形 X 具有平凡切从当且仅当有连通李群 G 及离散子群 $H \subset G$ 使得 $X \cong G/H$，且此时 X 为复环面当且仅当 Θ_X 为交换李代数。

推论 9. 设 $f : X \to Y$ 为特征 $p > 0$ 的域 k 上的光滑射影代数簇的满态射，使得某个 $F^d_{X/k}$ 经过 Y，且 X 有一个 k-点。若 Y 为阿贝尔簇，则 X 为阿贝尔簇当且仅当 $O_X \otimes_{O_Y} O_X$ 是平凡的 (即同构于 O_X 的拷贝的直和)。

特别地 (宫西正宜 [Mi])，对于 k 上的任意光滑射影且具有 k-点的代数簇 X，若存在一个无穷小群 G 在 X 上的自由作用使得 X/G 为阿贝尔簇，则 X 为阿贝尔簇。

证. 先证明前一个断言。必要性由命题 Ⅱ.2.i) 立得，以下证明充分性。

如 I.2 节那样令 $\mathcal{I}'_Y = \ker(\mu_Y : P'_{Y/k} \to O_Y)$，则对任意正整数 n 有 $P^n_{Y/k} \cong P'_{Y/k}/\mathcal{I}'^{n+1}_Y$。若 Y 为 g 维阿贝尔簇，则由命题 Ⅲ.1.2 有

$$P^n_{Y/k} \cong M^n_{Y/k} \otimes_k O_Y \cong O_Y^{\oplus m} \tag{2}$$

其中 $m = \binom{g+n}{n}$。注意 f 作为集合的映射是一一的，故为有限平坦的 (参看 [L1, 定理 XV.2.2.i)])。若 $O_X \otimes_{O_Y} O_X \cong O_X^{\oplus r}$，则

$$\begin{aligned} P'_{X/k}/\mathcal{I}'^{n+1}_Y P'_{X/k} &\cong O_X \otimes_{O_Y} (P^n_{Y/k} \otimes_{O_Y} O_X) \\ &\cong O_X \otimes_{O_Y} (O_Y^{\oplus m} \otimes_{O_Y} O_X) \\ &\cong O_X \otimes_{O_Y} O_X^{\oplus m} \\ &\cong (O_X \otimes_{O_Y} O_X)^{\oplus m} \\ &\cong O_X^{\oplus mr} \end{aligned} \tag{3}$$

令 $R_n = \Gamma(X, P'_{X/k}/\mathcal{I}'^{n+1}_Y P'_{X/k})$，则 $\mathrm{Spec}(R_n)$ 为 $\mathrm{Spec}(k)$ 的无穷小扩张且 (3) 给出

$$P'_{X/k}/\mathcal{I}'^{n+1}_Y P'_{X/k} \cong R_n \otimes_k O_X \tag{4}$$

由所设有 $\mathcal{I}_X'^{p^d} \subset \mathcal{I}_Y P'_{X/k}$, 故 (4) 给出满同态

$$P^{np^d}_{X/k} \twoheadrightarrow R_n \otimes_k O_X \tag{5}$$

令 $G = \mathcal{A}ut(X/k)$, $\mathcal{M} = \ker(o_G^*)$。对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 记 $A_n = \Gamma(G, O_G/\mathcal{M}^{n+1})$, 则由定理 1 有 k-代数的满同态 $A_{np^d} \to R_n$。另一方面, 由于 $\mathcal{I}'_Y P'_{X/k} \subset \mathcal{I}'_X$ 有满同态 $R_n \otimes_k O_X \to P^n_{X/k}$, 故有诱导同态 $R_n \to A_n$, 由 A_n 的泛性可见它是满同态。这样由 (5) 就可见每个 $\mathrm{Spec}(A_n)$ 在 X 上的作用是自由的, 而且有 $\hat{O}_{G,e} \cong \hat{O}_{Y,0}$, 故 $\dim(G) = g$ 且 G 在 X 上的作用的每个轨迹都是 g 维的, 从而 G 的零分支 G^0 在 X 上的作用是可迁的。由所设 X 有一个 k-点 x, 由此还可见 $G^0 \to G^0x = X$ 是无分歧的, 从而是有限的。这说明 G^0 是射影的, 即为阿贝尔簇。令 $H \subset G^0$ 为 x 的安定子群概形, 则由 G^0 的交换性可见 H 在 X 上的作用平凡, 故由 G 的泛性有 $H = 0$, 从而 $X \cong G^0/H \cong G^0$。

现在来证明第二个断言。记 $\rho : G \times_k X \to X$ 为 G 在 X 上的典范作用。由 G 是无穷小群可见存在 d 使得 $F^d_{G/k} = 0$, 故 $F^d_{X/k} : X \to X^{(p^d)}$ 等化 ρ 和 $\mathrm{pr}_2 : G \times_k X \to X$, 这说明 $F^d_{X/k}$ 经过 Y。由于 $Y = X/G$ 是几何商, 有 $X \times_Y X \cong G \times_k X$, 故 $O_X \otimes_{O_Y} O_X$ 是平凡的, 从而由第一个断言可见 X 是阿贝尔簇。证毕。

推论 6 和推论 9 合起来给出下面的塞尔-兰-宫西定理 (参看推论 Ⅶ.1.2.vi))。

推论 10. 设 X 为域 k 上的射影代数簇, 具有一个 k-点; G 为 k 上的有限群概形, ρ 为 G 在 X 上的自由作用。若 X/G 为阿贝尔簇, 则 X 也是阿贝尔簇, 且 G 可以嵌入 X 作为闭子群概形使得 ρ 为平移作用, 特别地 G 是交换的。

上面的结果还可以用来研究齐性概形。

若 X 为一个域 k 上的射影概形, 则由定义易见 X 是齐性的当且仅当 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 在 X 上的作用是可迁的。在 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 的情形, 仿照推论 7 的证明不难得到

命题 3. 设 k 为特征 0 的域, X 为几何连通射影 k-概形。则下列条件相

互等价:

i) X 是齐性的;

ii) 对某个 n 有凝聚层的单射 $\Omega^1_{X/k} \hookrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n}$, 其余核是平坦的;

iii) X 在 k 上光滑且 $\mathcal{T}_{X/k}$ 由整体截口生成。

证. 上述三个条件均与基域的选取无关, 故不妨设 k 是代数闭的。

i)⇒ii): 设有限型连通分离群概形 G 可迁地作用于 X 上, 由 $\mathrm{ch}(k)=0$ 可知 G 是群簇 (推论 Ⅲ.1.2)。取闭点 $x \in X$ 并令 $f: G \to X$ 为满态射 $g \mapsto gx$。由于 X 有一个光滑的稠密开子概形, 由 G 的作用的可迁性可见 X 是光滑的。由 $\mathrm{ch}(k)=0$ 可见 f 在一般点处是光滑的, 故由 G 的作用的可迁性可见 f 是光滑的。注意典范同态 $\Omega^1_{X/k} \to \omega_{G/k} \otimes_k \mathcal{O}_X$ 在 f^* 下的拉回为典范同态 $f^*\Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{G/k}$ (见命题 Ⅵ.1.1), 它具有局部自由的余核, 故由 f 忠实平坦可见 $\mathrm{coker}(\Omega^1_{X/k} \to \omega_{G/k} \otimes_k \mathcal{O}_X)$ 局部自由。

ii)⇒iii): 由 $\Omega^1_{X/k} \hookrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ 有局部自由余核可见 $\Omega^1_{X/k}$ 是局部自由的, 故 X 在 k 上光滑 (引理 Ⅲ.1.1)。取对偶即得满同态 $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \mathcal{T}_{X/k}$。

iii)⇒i): 令 $G = \mathcal{A}ut^0(X/k)$, 则由 $\mathrm{ch}(k)=0$ 可知 G 为群簇。任取闭点 $x \in X$ 并令 $f: G \to X$ 为态射 $g \mapsto gx$。由于轨迹 Gx 为代数簇, 它在一般点处是光滑的, 故由 G 在其上的可迁作用可见它是 k-光滑的。由定理 2 可知 $\mathrm{Lie}(G/k)$ 同构于 $\mathcal{T}_{X/k}$ 的整体截口组成的李代数, 故 iii) 说明 f 诱导的切空间的同态 $T_{G,e} \to T_{X,x}$ 是满射。但 $T_{G,e} \to T_{X,x}$ 经过 $T_{Gx,x}$, 故有 $T_{Gx,x} = T_{X,x}$, 因而 $\dim Gx = \dim X$。这说明 Gx 为 X 中的开集。由于 X 是整的, 任何两个非空开子集相交, 由此可见 G 在 X 上的作用是可迁的。证毕。

注意在 $\mathrm{ch}(k)=0$ 的情形, 推论 6 是命题 3 的直接推论; 而当 $\mathrm{ch}(k) \neq 0$ 时命题 3 的断言不成立 (参看例 1)。

注 4. 设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的紧代数簇。若对任意两个闭点 $x_1, x_2 \in X$ 都存在 X 作为解析空间的自同构 g 使得 $g(x_1) = x_2$, 则 X 是齐性的。这是因为由 GAGA 定理, 在这种情形 $\mathcal{A}ut(X/\mathbb{C})_{\mathrm{cl}}$ 可迁地作用于 X_{cl} 上, 令 $G = \mathcal{A}ut^0(X/\mathbb{C})$, 则 X_{cl} 为可数多个 G_{cl}-轨迹的并, 故至少有一个 G_{cl}-轨迹 Gx 的维数等于 $\dim(X)$, 从而由命题 3 的论证方法有 $Gx = X$。

定理 3. 设 $e:\tilde{X}\to X$ 为域 k 上的射影簇的有限平展覆盖。若 X 是齐性的, 则 $\tilde{X}$ 亦然, 且 $\mathcal{A}ut^0(X/k)$ 典范同构于 $\mathcal{A}ut(\tilde{X}/k)$ 的一个闭子群概形模一个有限平展正规子群概形的商群概形, 特别地 $\dim(\mathcal{A}ut(\tilde{X}/k))\geqslant\dim(\mathcal{A}ut(X/k))$。

证. 记 $\tilde{G}=\mathcal{A}ut^0(\tilde{X}/k)$, $G=\mathcal{A}ut^0(X/k)$, 由所设可知 G 在 X 上的典范作用是可迁的。我们来证明 $\tilde{G}$ 在 X 上的典范作用是可迁的, 为此不妨设 k 是代数闭的。

先考虑 X 为 $\tilde{X}$ 模一个离散群概形 H 的自由作用的商的情形。由推论 5 可知 $G\cong C^0_{\tilde{G}}(H)/H'$, 其中 H' 是 $C^0_{\tilde{G}}(H)$ 的有限平展正规子群概形; 而 $C^0_{\tilde{G}}(H)$ 在 $\tilde{X}$ 上的作用与 G 在 X 上的作用相容。记 $q:C^0_{\tilde{G}}(H)\to G$ 为投射, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc}
C^0_{\tilde{G}}(H)\times_k\tilde{X} & \xrightarrow{\alpha'_{\tilde{X}}} & \tilde{X}\times_k\tilde{X}\\
\downarrow{\scriptstyle q\times_k e} & & \downarrow{\scriptstyle e\times_k e}\\
G\times_k X & \xrightarrow{\alpha'_X} & X\times_k X
\end{array}\tag{6}$$

由于 q 和 e 都是有限平展覆盖, α'_X 忠实平坦, 故由 (6) 可见 $\alpha'_{\tilde{X}}$ 也是平坦的。这说明 $\tilde{X}$ 的任一闭点的 $C^0_{\tilde{G}}(H)$-轨迹是开集, 再由 $\tilde{X}$ 连通可知它只有一个 $C^0_{\tilde{G}}(H)$-轨迹, 从而 $C^0_{\tilde{G}}(H)$ 的作用可迁, 即 $\alpha'_{\tilde{X}}$ 忠实平坦。

对于一般情形, 由推论 V.1.1 可取 k 上的射影概形 Y 及离散群概形 H_0 在 Y 上的自由作用, 使得 $X\cong Y/H_0$, 且有一个子群概形 $H_1\subset H_0$ 使得 $\tilde{X}\cong Y/H_1$。令 $G_0=\mathcal{A}ut(Y/k)$, 则由上所述存在有限平展正规子群概形 $H_2\lhd C^0_{G_0}(H_0)$, $H_3\lhd C^0_{G_0}(H_1)$ 使得

$$\mathcal{A}ut^0(X/k)\cong C^0_{G_0}(H_0)/H_2,\quad \mathcal{A}ut^0(\tilde{X}/k)\cong C_{G_0}(H_1)/H_3\tag{7}$$

注意

$$(H_3\cap C^0_{G_0}(H_0))\lhd H_2\lhd C_{G_0}(H_0)\subset C_{G_0}(H_1)\tag{8}$$

可见 $G_1=C^0_{G_0}(H_0)/(H_3\cap C^0_{G_0}(H_0))$ 是 $C^0_{G_0}(H_1)/H_3\cong\mathcal{A}ut^0(\tilde{X}/k)$ 的闭子群概形, 而有限平展群概形 $H_4=H_2/(H_3\cap C^0_{G_0}(H_0))$ 是 G_1 的正规子群概形, 且由 (7) 可见 $\mathcal{A}ut^0(X/k)\cong G_1/H_4$。由上面的特殊情形可

知 $C^0_{G_0}(H_0)$ 在 Y 上的作用可迁，故 $C^0_{G_0}(H_1)$ 在 Y 上的作用可迁，从而 $\mathcal{A}ut^0(\tilde{X}/k) \cong C^0_{G_0}(H_1)/H_3$ 在 $\tilde{X}$ 上的作用可迁。证毕。

定理 3 可以看作推论 6 的推广。

例 3. 我们经常遇到下列情形的齐性概形。

设 G 为域 k 上的连通群簇，使得 $\mathfrak{G} = Lie(G/k)$ 是 reductive。由命题 Ⅲ.3.2 可知 G 在自身上的共轭作用诱导 G 在 $\mathfrak{G}$ 上的共轭表示 $\phi : G \to GL(\mathfrak{G}/k)$ $(\phi(g) = g_*)$，而 ϕ 诱导的李代数同态 $\phi_* : \mathfrak{G} \to End_k(\mathfrak{G})$ 满足 $\phi_*(D) = \mathrm{ad}(D)$。注意 $\mathrm{ad}(D)$ 是李代数的自同态，而 $\phi(g)$ 是李代数的自同构。易见在 $GL(\mathfrak{G}/k)$ 中保持李代数结构是闭条件，这给出李代数 $\mathfrak{G}/k$ 的自同构群概形 $LieAut(\mathfrak{G}/k)$ (参看下节)，它是 $GL(\mathfrak{G}/k)$ 的闭子群概形。

设 $k = \mathbb{C}$，令 $\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{G}$ 为一个极大可解李子代数。记 $n = \dim_k \mathfrak{G}$，$m = \dim_k \mathfrak{H}_0$，则 $\mathfrak{G}$ 的一个极大可解李子代数由 $\mathbb{G}_{n-1,m}$ 的一个闭点代表。令 $H_0 \subset G$ 为 $\mathfrak{H}_0$ 的安定子群概形，则由复李代数理论可知 $\mathfrak{H}_0$ 由嘉当子代数刻画，易见李子代数为嘉当子代数是一个闭条件，由此不难得到 $\mathfrak{G}$ 的所有极大可解李子代数组成 $\mathbb{G}_{n-1,m}$ 的一个闭子概形 X。由李群论可知 G 在所有嘉当子代数的集合上的作用是可迁的，故它在 X 上的诱导作用是 (集合意义下) 可迁的。由例 Ⅵ.1.2 可见 $X \cong G/H_0$，特别地 G/H_0 是射影的。令 $H \subset G \times_k X$ 为 G 在 X 上的作用的安定子，则由上面的构造过程可见 H_0 是 H 的一个纤维。由命题 Ⅵ.1.1 有正合列

$$0 \to \Omega^1_{X/k} \to \tau^* \omega_{G/k} \to \omega_{H/k} \to 0 \tag{9}$$

由上面的构造过程可见 $\tau^* \wedge^m_k \omega_{G/k} \to \wedge^m_{O_X} \omega_{H/k}$ 给出嵌入态射 $X \to \mathbb{G}_{n-1,m}$，故 $\wedge^m_{O_X} \omega_{H/k} \cong O_X(1)$；而由 (9) 可见

$$\wedge^m_{O_X} \omega_{H/k} \cong (\wedge^{n-m}_{O_X} \Omega^1_{X/k})^{-1} \cong \Omega^{m-n}_{X/k} \tag{10}$$

故典范层的逆 $\Omega^{m-n}_{X/k}$ 是极丰富的。此外易见

$$\Omega^{m-n}_{X/k} \cong \wedge^{n-m}_{O_X} \mathcal{T}_{X/k} \tag{11}$$

习题

1. 对例 1 中的 Y, 证明 $\mathcal{P}ic^\tau(Y) \cong E_2^t \times_k H^D$, $\mathcal{A}ut^0(Y/k) \cong E_1 \times_k H$。

2. 设 $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Per}(\{1, ..., n\})$ 的 n 阶子群 H 可迁地作用于 $\{1, ..., n\}$ 上。证明 $C_{\mathfrak{S}_n}(H) \cong H$。

3. 设 $X \to S$ 为阿贝尔概形。证明 $\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$ 是 S-无分歧的。(提示: 由命题 1.2.iii) 可得 $\omega_{X/S} \oplus \omega_{\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)/S} \cong \omega_{\mathcal{A}ut(X/S)/S}$, 再利用定理 2。)

第 3 节　保结构自同构群概形

1. 不变子群概形

由例 1.2 我们看到, 非完备曲线没有自同构群概形, 但这并不是说非完备曲线的自同构群没有自然的几何结构。例如由例 1.2 可见 $Aut(\mathbb{A}_k^1/k)$ 典范同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 和 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的一个半直积 ($SL_{2/k}$ 中的上三角阵组成的闭子群概形)。为研究这类问题我们需要在自同构群概形的定义上换个思路。

设 C 为域 k 上的非完备正则曲线, 则 C 可嵌入一条射影正则曲线 $\bar{C}$ 作为开子概形。由 I.1.5 可见 C 的任一自同构 ϕ 诱导 $k(C)$ 的一个 k-自同构 ϕ^*, 从而诱导 $\bar{C}$ 的一个自同构 $\bar{\phi}$, 而 ϕ 是 $\bar{\phi}$ 在 C 上的限制。因此, $\mathcal{A}ut(\bar{C}/k)$ 中保持 C 不变的子群概形可以理解为 C 的几何意义的自同构群。注意 $D = \bar{C} - C$ (取约化的诱导概形结构) 是一个有限概形, 而一个自同构保持 C 不变等价于保持 D 不变。

在伽罗瓦理论中, 对于一个有限伽罗瓦扩张 $K \subset L$, 所有中间域组成的集合与 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有子群组成的集合一一对应, 一个中间域 F $(K \subset F \subset L)$ 所对应的子群为 $\mathrm{Gal}(L/F) \subset Gal(L/K)$。但对于自同构群概形没有类似的事实: 注意 $\mathcal{A}ut(\mathrm{Spec}(L)/F)$ 是 F-群概形而 $\mathcal{A}ut(\mathrm{Spec}(L)/K)$ 是 K-群概形。因此, 对这类问题应另想办法处理。

命题 1. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为相对射影态射, $Y \subset X$ 为 S-平坦

闭子概型, G 为 S 上的有限型群概形, ρ 为 G 在 X 上的作用。则存在闭子群概形 $\mathcal{F}ix(\rho, Y) \subset G$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Fix}_{\rho,Y}: T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}_S(T, G) | \Phi_f(T \times_S Y) = T \times_S Y\}$$

其中 $\Phi_f = (\mathrm{pr}_1, \rho \circ (f \times_S \mathrm{id}_X)) : T \times_S X \to T \times_S X$ (即 $T \times_S X$ 的对应于 f 的 T-自同构)。此外, 存在诱导的群概形同态 $\eta : \mathcal{F}ix(\rho, Y) \to \mathcal{A}ut(Y/S)$, 而 $\ker(\eta)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Id}_{\rho,Y}: T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}_S(T, G) | \Phi_f|_{T \times_S Y} = \mathrm{id}_{T \times_S Y}\}$$

我们记 $\ker(\eta) = \mathcal{I}d(\rho, Y)$。

证. 令 $X' = G \times_S X$, $\Phi = (\mathrm{pr}_1, \rho) : X' \to X'$, $Y_1 = G \times_S Y \subset X'$, $Y_2 = \Phi(Y_1) \subset X'$。由推论 Ⅳ.2.3 可知存在 G 的一个闭子概形 H 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}(T, G) | T \times_f Y_1 = T \times_f Y_2\}$$

显然 $T \times_f Y_1 = T \times_f Y_2$ 等价于 $\Phi_f(T \times_S Y) = T \times_S Y$, 且由抽象废话易见 H 是闭子群概形, 这就证明了第一个断言。

其他断言都是抽象废话。证毕。

定理 1. 设 S 为诺特概形, $f : X \to Y$ 为 S 上平坦相对射影概形的态射, 则存在闭子群概形 $\mathcal{A}ut(f/S) \subset \mathcal{A}ut(X/S) \times_S \mathcal{A}ut(Y/S)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Aut}_{f/S}: T \mapsto \{g \in \mathrm{Aut}(T \times_S X/T), g' \in \mathrm{Aut}(T \times_S Y/T) | (\mathrm{id}_T \times_S f) \circ g = g' \circ (\mathrm{id}_T \times_S f)\}$$

此外, 若 f 为闭嵌入, 则投射 $\mathcal{A}ut(f/S) \to \mathcal{A}ut(Y/S)$ 为闭嵌入; 若 f 为忠实平坦, 则投射 $\mathcal{A}ut(f/S) \to \mathcal{A}ut(X/S)$ 为闭嵌入。

证. 记 $\rho_X : \mathcal{A}ut(X/S) \times_S X \to X$ 和 $\rho_Y : \mathcal{A}ut(Y/S) \times_S Y \to Y$ 为泛作用。令 $G = \mathcal{A}ut(X/S) \times_S \mathcal{A}ut(Y/S)$, 则 $\rho = \rho_X \times_G \rho_Y : G \times_S X \times_S Y \to X \times_S Y$ 为 G 在 $X \times_S Y$ 上的作用。令 $\Gamma_f \subset X \times_S Y$ 为 f 的图。由命题 1, 存在闭子群概形 $\mathcal{F}ix(\rho, \Gamma_f) \subset G$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$\mathfrak{Fix}_{\rho,\Gamma_f}: T \mapsto \{g \in \mathrm{Mor}_S(T,G) | \Phi_g(T\times_S\Gamma_f) = T\times_S\Gamma_f\}$$

记 $\gamma=(\mathrm{id}_X,f):X\to X\times_S Y$。设 T 为 S-概形, $h_X\in\mathrm{Mor}_S(T,\mathcal{A}ut(X/S))$, $h_Y\in\mathrm{Mor}_S(T,\mathcal{A}ut(Y/S))$, 而 $h=(h_X,h_Y)\in\mathrm{Mor}_S(T,G)$。记 $\gamma_T=\mathrm{id}_T\times_S\gamma$, $\Gamma_{f,T}=T\times_S\Gamma_f$ (即 γ_T 的像), $f_T=\mathrm{id}_T\times_S f:T\times_S X\to T\times_S Y$。易见在 T 上有

$$\mathrm{pr}_{12}\circ\Phi_h\circ\gamma_T=\Phi_{h_X}:T\times_S X\to T\times_S X \tag{1}$$

及

$$\mathrm{pr}_{13}\circ\Phi_h\circ\gamma_T=\Phi_{h_Y}\circ f_T:T\times_S X\to T\times_S Y \tag{2}$$

注意 $\mathrm{pr}_{12}:T\times_S X\times_S Y\to T\times_S X$ 诱导同构 $\Gamma_{f,T}\to T\times_S X$。我们有

$$\mathrm{pr}_{13}\circ\mathrm{pr}_{12}^{-1}=\Phi_{h_Y}\circ f_T\circ\Phi_{h_X}^{-1}:T\times_S X\to T\times_S Y \tag{3}$$

即 $\Phi_h(\Gamma_{f,T})$ 为 $\Phi_{h_Y}\circ f_T\circ\Phi_{h_X}^{-1}$ 的图。

因此 $\Phi_h(\Gamma_{f,T})=\Gamma_{f,T}$ 当且仅当 $\Phi_{h_Y}\circ f_T\circ\Phi_{h_X}^{-1}=f_T$, 这又等价于 $\Phi_{h_Y}\circ f_T=f_T\circ\Phi_{h_X}$。这说明 $\mathcal{F}ix(\rho,\Gamma_f)\subset G$ 代表 $\mathfrak{Aut}_{f/S}$。

若 f 是闭嵌入, 则由命题 1, $\mathfrak{Aut}_{f/S}$ 由 $\mathcal{F}ix(\rho_Y,X)\subset\mathcal{A}ut(Y/S)$ 代表。

若 f 忠实平坦, 则对任意 T 及任意 $g\in\mathrm{Aut}(T\times_S X/T)$ 和 $g'\in\mathrm{Aut}(T\times_S Y/T)$ 使得 $f_T\circ g=g'\circ f_T$, g' 由 g 唯一决定。$\mathcal{A}ut(X/S)$ 在 $X\times_S X$ 上有一个对角作用 ρ', 由 $g(x_1,x_2)=(gx_1,gx_2)$ 给出。注意 $X_1=X\times_Y X\subset X\times_S X$ 在 S 上平坦。由命题 1, 存在闭子群概形 $\mathcal{F}ix(\rho',X_1)\subset\mathcal{A}ut(X/S)$ 代表预层

$$\mathfrak{Fix}_{\rho',X_1}: T\mapsto\{h\in\mathrm{Mor}_S(T,\mathcal{A}ut(X/S))|\Phi'_h(T\times_S X_1)=T\times_S X_1\}$$

其中 $\Phi'_h=(\mathrm{pr}_1,\rho'\circ(h\times_S\mathrm{id}_{X_1})):T\times_S X_1\to T\times_S X_1$ (即 $T\times_S X_1$ 的对应于 h 的 T-自同构)。

我们来证明 $\Phi'_h(T\times_S X_1)=T\times_S X_1$ 当且仅当存在 (唯一) $h'\in\mathrm{Mor}_S(T,\mathcal{A}ut(Y/S))$ 使得 $\Phi_{h'}\circ f_T=f_T\circ\Phi_h$。充分性是显然的, 下面验证必要性。记 $\sigma_X=\mathrm{pr}_2\circ\Phi_h:T\times_S X\to X$ (即 T 在 X 上的诱导作用)。我们有 $\mathrm{pr}_{12}\circ\Phi'_h=\sigma_X\circ\mathrm{pr}_{12}$ 及 $\mathrm{pr}_{13}\circ\Phi'_h=\sigma_X\circ\mathrm{pr}_{13}:T\times_S X_1\to T\times_S X$, 故

$$f_T\circ\sigma_X\circ\mathrm{pr}_{12}=f_T\circ\sigma_X\circ\mathrm{pr}_{13}:T\times_S X_1\to T\times_S Y \tag{4}$$

由于 $T\times_S Y$ 是 pr_{12} 和 pr_{13} 的推出, 可见存在 (唯一) T-态射 $g':T\times_S Y\to T\times_S Y$ 使得 $g'\circ f_T=f_T\circ\sigma_X$。易见 g' 为同构, 故 $\mathfrak{Aut}_{f/S}$ 由 $\mathcal{F}ix(\rho',X_1)$ 代表。证毕。

记 $\mathcal{I}d(f/S,X)=\ker(\mathrm{pr}_1:\mathcal{A}ut(f/S)\to\mathcal{A}ut(X/S))$, $\mathcal{I}d(f/S,Y)=\ker(\mathrm{pr}_2:\mathcal{A}ut(f/S)\to\mathcal{A}ut(Y/S))$。注意 $\mathcal{I}d(f/S,X)$ 为 $\mathcal{A}ut(Y/S)$ 的闭子群概形, 代表预层

$$T\mapsto\{g'\in\mathrm{Aut}(T\times_S Y/T)|g'\circ f_T=f_T\}$$

而 $\mathcal{I}d(f/S,Y)$ 为 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的闭子群概形, 代表预层

$$T\mapsto\{g\in\mathrm{Aut}(T\times_S X/T)|f_T\circ g=f_T\}$$

设 σ 为 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S X\cong\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y\times_Y X$ 的泛自同构。由于 σ 是 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y$ 上的自同构, 我们有

推论 1. 对一个诺特概形 S 上平坦相对射影概形的忠实平坦态射 $f:X\to Y$, 存在典范 Y-群概形同态 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y\to\mathcal{A}ut(X/Y)$, 与 f 及 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y$, $\mathcal{A}ut(X/Y)$ 在 X,Y 上的作用相容。

注 1. 推论 1 中的典范同态一般不是同构。例如当 $Y\to S$ 为 n 次有限平展覆盖时, 为简单起见取适当的有限平展覆盖 $S'\to S$ 作基变换 (参看引理 I.1.6), 我们不妨设 Y 为 n 个 S 的拷贝的无交并 $Y=\coprod_{i=1}^n S_i$ (每个 $S_i\cong S$)。令 $X_i=f^{-1}(S_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。不难验证 $\mathcal{A}ut(X/Y)\cong\coprod_{i=1}^n\mathcal{A}ut(X_i/S)$, 而 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y\cong\prod_{i=1}^n\mathcal{A}ut(X_i/S)\times_S Y$。注意此时 $\mathcal{I}d(f/S,Y)\times_S Y\to\mathcal{A}ut(X/Y)$ 为满同态。

例 1. 用定理 1 不难给出任意域 k 上的所有一维群簇的分类。对 $k=\bar{k}$ 的情形, 熟知 1 维 k-群簇在同构之下仅有 $G_{a/k}$, $G_{m/k}$ 和椭圆曲线三类 (参看例 Ⅲ.2.2)。但在一般情形有不同的结果。

设 G 是 k 上的一维群簇。令 C 为 G 的紧致化 (为 k 上的射影正则曲线), 则 G 在 G 上的左乘作用给出一个有理映射 $\rho:G\times_k C\dashrightarrow C$。由于 C 是紧致的而 $G\times_k C$ 是正规的, ρ 在所有余维数为 1 的点附近可 (唯一) 定义为态射 (参看 [H, Theorem Ⅱ.4.3]), 特别地存在紧致开子概形 $U\subset G$ 使

得 ρ 在 $U\times_k C$ 上可定义为态射, 故 $(\mathrm{pr}_1,\rho):U\times_k C\to U\times_k C$ 为 U-同构, 这可以看作 U 在 C 上的作用, 由此给出 k-态射 $f:U\times_k U\times_k C\to C$。记 $\mu:U\times_k U\to G$ 为乘法态射的限制, W 为 μ 与 μ 的拉回, 则由命题 V.1.1, G 是 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2:W\to U\times_k U$ 的泛推出。由于 $\rho|_{G\times_k G}$ 为作用, $f\circ\mathrm{pr}_{13}$ 和 $f\circ\mathrm{pr}_{23}:W\times_k C\to C$ 在 $W\times_k G$ 上的限制相等, 故 $f\circ\mathrm{pr}_{13}=f\circ\mathrm{pr}_{23}$, 从而诱导 $G\times_k C\to C$, 即 ρ 可定义为态射, 易见它是作用。

由例 Ⅲ.2.2 可知 $g(C)\leqslant 1$, 且当 $g(C)=1$ 时有 $G\cong C$, 即 G 为椭圆曲线。以下设 $g(C)=0$。由于 G 有一个 k-点, 我们有 $C\cong\mathbb{P}^1_k$。而 G 不是完备的 (因为一维完备群簇为椭圆曲线), 令 $V=C-G$, 则 ρ 保持 V 的每个点, 由 I.1.5 及 $PGL_2(\bar{k})$ 中保持 3 个点不变的元只有单位元, 可见 V 至多有两个几何点。若 V 有两个几何点, 则或者 V 由两个 k-点组成, 此时 $G\cong G_{m/k}$; 或者 V 只有一个 2 次可分点, 此时 $G\otimes_k\bar{k}\cong G_{m/\bar{k}}$ 但 $G\not\cong G_{m/k}$。反之, 对 k 的任一 2 次可分扩张 k' 可取 $p\in\mathbb{P}^1_k$ 使得 $\kappa(p)\cong k'$ (因为任意二次扩张 $k'\supset k$ 都同构于 $k[t]$ 的一个剩余类域), 令 $i:\{p\}\to\mathbb{P}^1_k$ 为嵌入, 则由上所述易见 $G=\mathcal{I}d(i/k,\{p\})$ 为一维拟射影群簇且 $V=\{p\}$。若 $p'\in C$ 是另一个 2 次点使得有 k-同构 $\psi:\kappa(p)\to\kappa(p')$, 则 $G'=C-\{p'\}$ 也具有几何同构于 $G_{m/k}$ 的群簇结构。适当选择 C 的坐标 t 使得 p,p' 都不是无穷远点, 则 p 和 p' 都可以看做 $k[t]$ 的极大理想, 分别记 $\alpha\in\kappa(p)$ 和 $\alpha'\in\kappa(p')$ 为 t 的像, 则有 $a,b\in k$ $(a\neq 0)$ 使得 $\psi(\alpha)=a\alpha'+b$。取 $f(t)\in k[t]$ 使得 $p=(f)$, 则 $p'=(f(at+b))$。令 ϕ 为 $t\mapsto at+b$ 所定义的 $k[t]$ 的 k-代数自同构, 则有 $\phi(p)=p'$, 故 $\hat{\phi}$ 诱导的 C 的自同构将 p' 映到 p, 这说明 G 与 G' 在 $PGL_{2/k}$ 中相互共轭, 从而同构。由此可见有典范一一对应

$$\{\text{几何同构于 }\mathbb{G}_{m/k}\text{ 但在 }k\text{ 上不同构于 }\mathbb{G}_{m/k}\text{ 的群簇}\}/\sim\ \leftrightarrow\ \{k\text{ 的 2 次可分扩张}\}/\sim$$

其中左边的 $\sim$ 是 k-群概形的同构等价, 右边的 $\sim$ 是 k-代数的同构等价。

最后, 若 V 只有一个几何点, 则这个点是 k-点, 而 $G\cong\mathbb{G}_{a/k}$ (参看习题 2 或下章引理 X.1.4)。

对于一般的相对拟射影概形 $X\to S$, 如果取定了平坦相对射影概形 $\bar{X}\to S$ 及 S-平坦闭子概形 $Y\overset{i}{\hookrightarrow}\bar{X}$ 及同构 $X\cong\bar{X}-Y$, 则 $\mathcal{A}ut(i/S)$ 可

以对 X 的自同构群的几何结构给出部分的理解。在较好的情形 (例如上述正则曲线的情形), 对于一般的域 k 及 k-点 $\phi: \mathrm{Spec}k \to S$, $\mathcal{A}ut(i/S)(\phi)$ 与 $\mathrm{Aut}(X \times_\phi \mathrm{Spec}k/k)$ 同构。

2. 线性表示

设 $\mathcal{E}$ 为诺特概形 S 上的局部自由凝聚层, 在 Ⅲ.3.2 中我们看到 $GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathbb{A}^1_T}(\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_S T)$$

而 $GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$ 在 S 上局部为一般线性群概形。令 Φ 为 $GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S} \times_S \mathbb{V}(\mathcal{E})$ 的 $GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$-泛自同构。设 $X \subset \mathbb{V}(\mathcal{E})$ 为闭子概形, 如果有闭子概形 $H \subset GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{f \in Mor_S(T, GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}) | (\mathrm{id}_T \times_f \Phi)(T \times_S X) = T \times_S X\}$$

则记 $H = GL_{X,\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$, 由抽象废话它是 $GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$ 的闭子群概形, 它经常可以给出对 X 的自同构群的几何结构的部分理解, 这是基于以下事实。

引理 1. 设 G 为域 k 上的有限型仿射群概形, X 为 k 上的有限型仿射概形, ρ 为 G 在 X 上的作用, 则存在 X 到某个 $\mathbb{A}^n_k$ 的闭嵌入使得 ρ 为 G 在 $\mathbb{A}^n_k$ 上的一个线性作用的限制。特别地, 域上的有限型仿射群概形是线性的。

证. 设 $G = \mathrm{Spec}R$, $X = \mathrm{Spec}A$。取 A 作为 k-代数的一组生成元 $x_1 = 1, x_2, ..., x_r$, 且不妨设它们在 k 上线性无关。设

$$\rho^*(x_i) = \sum_j y_{ij} \otimes_k x_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant r) \tag{1}$$

其中 $y_{ij} \in R$, $x_{ij} \in A$。若 (对同一个 i) 诸 x_{ij} 在 k 上线性相关, 则将其中一个表为其他元的 k-线性组合可以缩短 $\rho^*(x_i)$ 的表达式; 类似地若 (对同一个 i) 诸 y_{ij} 在 k 上线性相关, 也可将其中一个表为其他元的 k-线性组合以缩短 $\rho^*(x_i)$ 的表达式, 故不妨设对每个 i, 诸 x_{ij} 在 k 上线性无关, 诸 y_{ij} 也在 k 上线性无关。将

$$(\mathrm{id}_R \otimes_k \rho^*) \circ \rho^* = (m_G^* \otimes_k \mathrm{id}_A) \circ \rho^* \tag{2}$$

应用于 (1) 可见对任意 i 有

$$\sum_j y_{ij} \otimes_k \rho^*(x_{ij}) = \sum_j m_G^*(y_{ij}) \otimes_k x_{ij} \tag{3}$$

比较两边, 由诸 y_{ij} 在 k 上线性无关可见每个 $\rho^*(x_{ij})$ 都可表为形如 $\sum_l a_l \otimes_k x_{il}$ $(a_l \in R)$。令 $V \subset A$ 为所有 x_{ij} 和 x_i 生成的 k-线性子空间, 取其一组 k-基 $z_1, ..., z_n$, 则由上所述可见存在 $b_{ij} \in R$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 使得

$$\rho^*(z_i) = \sum_j b_{ij} \otimes_k z_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{4}$$

由于 $z_1, ..., z_n$ 为 A 作为 k-代数的一组生成元, 它们定义一个闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$。注意 (4) 给出 $R \otimes_k V$ 作为 R-模的自同构 $\phi : \sum_i a_i \otimes_k z_i \mapsto \sum_i (a_i \otimes_k 1)\rho^*(z_i)$, 其逆由 $z_i \mapsto \sum_j \iota_G^*(b_{ij}) \otimes_k z_j$ 给出。对 (4) 应用 (2) 并注意诸 z_j 在 k 上线性无关, 可见

$$m_G^*(b_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} b_{il} \otimes_k b_{lj} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n) \tag{5}$$

对 $GL_{n/k}$可取其结构环作为 k-代数的生成元 t_{ij} 使得 $m^*(t_{ij}) = \sum_{l=1}^n t_{il} \otimes_k t_{lj}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 由 (5) 及 ϕ 为自同构易见 $t_{ij} \mapsto b_{ij}$ 定义一个同态 $f : G \to GL_{n/k}$, 且由 (4) 可见 ρ 由 $GL_{n/k}$ 在 $\mathbb{A}_k^n$ 上典范作用和 f 诱导。

特别地, 若取 $X = G$ 且 ρ 为左乘作用, 则由 ρ 是忠实的可见 f 是单同态, 故由命题 Ⅱ.1.2.ii) 可知 G 是线性的。证毕。

设 S 为诺特概形, $\pi : G \to S$ 为有限型分离群概形。一个 G 的线性表示是指一个 S-群概形同态 $G \to GL_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$, 其中 $\mathcal{E}$ 是 S 上的局部自由凝聚层, 这等价于 G 在 $\mathcal{E}$ 上的一个 O_S-线性作用, 或 G 在 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ 上的 $\mathbb{A}_S^1$-线性作用。

设 $\pi : G \to S$ 为有限型连通分离群概形。记 $\Phi \in \mathrm{Aut}(G \times_S G/G)$ 为 G 在自身上的共轭作用所对应的 G-自同构。若对某个 n, $M_{G/S}^n$ 是 S-平坦的, 则由命题 Ⅲ.3.2 可知 Φ 诱导 G 在 $\mathcal{D}iff^n(G/S)$ 上的一个 $\mathbb{A}_S^1$-线性作用 $(g, D) \mapsto g_* D$, 它等价于一个线性表示 $\phi_n : G \to GL_{\mathcal{D}iff^n(G/S)/S}$。若对充分大的 n, $M_{G/S}^n$ 都是 S-平坦的, 易见 $\ker(\phi_{n+1}) \subset \ker(\phi_n)$ $(\forall n \gg 0)$, 故由诺特归纳法可见对充分大的 n 有 $\ker(\phi_{n+1}) = \ker(\phi_n)$。令 $C(G) =$

$\ker(\phi_n)$ ($\forall n \gg 0$), 则由交换代数易见 $C(G)$ 在 G 上的共轭作用平凡, 换言之 Φ 在 $C(G)$ 上的拉回等于 $\mathrm{id}_{C(G)\times_S G}$; 反之, 若 S-态射 $f: T \to G$ 使得 Φ 通过 f 的拉回等于 $\mathrm{id}_{T\times_S G}$, 则易见 f 经过 $C(G)$。故可定义 $C(G)$ 为 G 的中心。

更一般地, 设 $\tau: X \to S$ 为有限型连通分离概形, ρ 为 G 在 X 上的作用, $\Phi \in Aut(G\times_S X/G)$ 为 ρ 所对应的 G-自同构。设 $\zeta: S \to X$ 为 τ 的一个截口使得 ρ 保持 $\zeta(S)$ (即 $\rho\circ(\mathrm{id}_G \times_S \zeta)$ 经过 S)。令 $\mathcal{I}$ 为 ζ (为闭嵌入) 的理想层。若 $O_X/\mathcal{I}^n$ 在 S 上平坦, 则 ρ 诱导 G 在 $V(O_X/\mathcal{I}^n)$ 上的线性作用, 这等价于一个线性表示 $\phi_n: G \to GL_{V(O_X/\mathcal{I}^n)/S}$。若 $O_X/\mathcal{I}^n$ 对充分大的 n 都是 S-平坦的, 则与上面同样有 $\ker(\phi_{n+1}) = \ker(\phi_n)$ ($\forall n \gg 0$)。此时我们记 $\mathcal{I}d(\rho, X) = \ker(\phi_n)$ ($\forall n \gg 0$), 仿照上面的讨论可见对任意 S-态射 $f: T \to G$, Φ 通过 f 的拉回等于 $\mathrm{id}_{T\times_S G}$ 当且仅当 f 经过 $\mathcal{I}d(\rho, X)$。总之有

命题 2. 设 S 为诺特概形, $\tau: X \to S$ 为有限型连通分离概形, 带有一个截口 $\zeta: S \to X$, 其理想层为 $\mathcal{I} \subset O_X$; $\pi: G \to S$ 为有限型分离群概形, ρ 为 G 在 X 上的作用且保持 $\zeta(S)$ (即 $\rho\circ(\mathrm{id}_G \times_S \zeta)$ 经过 S)。若 $O_X/\mathcal{I}^n$ 在 S 上平坦 ($\forall n \gg 0$), 则 ρ 诱导线性表示 $\phi_n: G \to GL_{V(O_X/\mathcal{I}^n)/S}$ ($\forall n \gg 0$) 使得对充分大的 n, $\mathcal{I}d(\rho, X) = \ker(\phi_n)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层 $\mathfrak{Id}_{\rho,X}$ (见命题 1)。特别地, 若 $X = G$, ρ 为 G 在自身上的共轭作用, $M^n_{G/S}$ 是 S-平坦的 ($\forall n \gg 0$), 则存在闭正规子群概形 $C(G) \subset G$ (G 的中心) 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto C(Mor_S(T, G))$$

(其中 $C(Mor_S(T, G))$ 为群 $Mor_S(T, G)$ 的中心)。

注意当 $S = \mathrm{Spec}k$ (k 为域) 时, 命题 2 中的条件“$O_X/\mathcal{I}^n$ 在 S 上平坦”是自动满足的。

推论 2. 设 X 为域 k 上的有限型分离概形, G 为有限型分离 k-群概形, ρ 为 G 在 X 上的作用。则 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 $\mathfrak{Id}_{\rho,X}$ 由一个闭正规子群概形 $\mathcal{I}d(\rho, X) \subset G$ 代表。此外, 若 X 的每个连通分支都有 ρ 的一个不动 (闭) 点, 则 $G/\mathcal{I}d(\rho, X)$ 是线性的。特别地, 存在闭正规子群概形 $C(G) \subset G$

(G 的中心) 代表 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层 $T \mapsto C(Mor_k(T,G))$, 且当 G 连通时 $G/C(G)$ 是线性的。

证. 设 $X_1,...,X_r$ 为 X 的所有连通分支, 对每个连通分支 X_i 取一个闭点 $x_i \in X_i$, 并记 $k_i = \kappa(x_i)$。对每个 i, $\rho|_{G\times_k\{x_i\}}$ 给出一个态射 $q_i : G \otimes_k k_i \to X$。令 $p_i = \mathrm{pr}_2 : G \times_k \{x_i\} \to \{x_i\} \hookrightarrow X$, 则有一个极大闭子概形 $V_i \subset G \otimes_k k_i$ 使得 $p_i|_{V_i} = q_i|_{V_i}$。令 $W_i = \mathrm{pr}_1(V_i) \subset G$ (为 G 的闭子概形), $W = W_1 \cap ... \cap W_r$。对任意 k-态射 $f : T \to G$, 若 f 所诱导的 $T \times_k X$ 的 T-自同构为单位自同构, 易见 f 经过 W。由于 W 在 X 上的作用保持每个 x_i 不变, 由命题 2 的讨论可见存在 W 到某个线性群概形 H 的态射 f 使得 $f^{-1}(e_H)$ 代表 $\mathfrak{Id}_{\rho,X}$, 换言之 $\mathcal{I}d(\rho,X)$ 存在, 由抽象废话它是 G 的正规子群概形。

若 X 的每个连通分支 X_i 都有 ρ 的一个不动 (闭) 点, 则可取 x_i 为 ρ-不动点, 这样就有 $W = G$, 从而 $\mathcal{I}d(\rho,X) = \ker(G \to H)$, 故 $G/\mathcal{I}d(\rho,X)$ 同构于 H 的一个闭子群概形。

将上述结果应用于 G 在自身上的共轭作用, 即可见中心 $C(G) \subset G$ 存在; 而 $e_G \in G$ 是共轭作用的一个不动点, 故当 G 连通时 $G/C(G)$ 是线性的。证毕。

推论 3. 设域 k 上的射影簇 X 有一个孤立 (闭) 奇点, 则 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 是线性的。

证. 设 $x \in X$ 为 X 的孤立奇点, 则 $G = \mathcal{A}ut(X/k)$ 在 X 上的典范作用 ρ 将 x 映到 X 的孤立奇点, 故 x 的轨迹 V 是有限的。这样 ρ 保持 V 不动, 从而由推论 2 的讨论可见 $G/\mathcal{I}d(\rho,X)$ 是线性的, 但由 G 的泛性可见 $\mathcal{I}d(\rho,X) = 0$, 故 G 是线性的。证毕。

习题

1. 设 $k \subset k_1 \subset k_0$ 为有限域扩张, $f : X = \mathrm{Spec}(k_0) \to Y = \mathrm{Spec}(k_1)$ 为投射。给出 $\mathcal{I}d(f/k,X)$ 和 $\mathcal{I}d(f/k,X)(k)$。

2. 设 $G \subset \mathbb{P}^1_k$ 为域 k 上的 1 维群簇, 使得 $V = \mathbb{P}^1_k - G$ 只有一个几何点。

证明 V 由一个 k-点组成且 $G \cong \mathbb{G}_{a/k}$。(提示: 先考虑 k 为代数闭域的情形, 然后对于一般情形考虑 $G \otimes_k \bar{k}$。)

3. 对于一个域 k, 记 X, Y, Z 为 $\mathbb{P}_k^2$ 的齐次坐标。令 C 为 $\mathbb{P}_k^2$ 中的 (奇异) 曲线 $Y^2Z = X(X^2 + aYZ + bXZ)$ $(a, b \in k)$。给出 $\mathcal{A}ut(C/k)$ 的结构。

第 4 节　阿贝尔概形的变形

1. 阿贝尔概形变形的基本定理

命题 1. 设 $\tau : X \to S$ 为忠实平坦相对射影态射, 具有几何整纤维。设 $G \subset \mathcal{A}ut(X/S)$ 为有限型交换子群概形, $\rho : G \times_S X \to X$ 为由 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 的典范作用诱导的作用, $H \subset G \times_S X$ 为 ρ 的安定子。则存在 X 的稠密开子概形 U 使得 G 自由地作用于 U 上, 从而投射 $H \times_X U \to U$ 为同构。

证. 令 $\mathcal{F} = \operatorname{coker}(O_X \to \rho_* O_H)$, $U = X - \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$, 则 U 为开子概形, 且在 G 的作用下不变。我们下面证明对任意 $s \in S$, U 包含 X_s 的一般点, 由此就可见 U 包含 X 的所有一般点, 而 $\mathcal{F}|_U = 0$, 故 $H \times_X U \to U$ 为同构。由注 IV.1.1 可见 $\mathcal{A}ut(X/S)_s \cong \mathcal{A}ut(X_s/\kappa(s))$, 故 G_s 为 $\mathcal{A}ut(X_s/\kappa(s))$ 的有限型交换子群概形, 而 H_s 为 $\rho|_{G_s \times_S X_s}$ 的安定子。因此可将问题约化为 $S = \operatorname{Spec}(k)$ (k 为域) 的情形。

令 $W \subset X \times_k X$ 为 $\alpha = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_k X \to X \times_k X$ 的像闭包, 则 W 给出 X 上的一个有理等价关系, 从而有有理商 $Y = X/G$ (见推论 V.2.1)。令 $\xi \in Y$ 为一般点, K 为 $\kappa(\xi)$ 的代数闭包, 则 X 在 ξ 上的纤维 X_ξ 为 $\kappa(\xi)$ 上的拟射影簇, 从而 $X' = X_\xi \otimes_{\kappa(\xi)} K$ 为 K 上的拟射影簇。记 $G_K = G \otimes_k K$。由 $Y = X/G$ 可见 $X_\xi/G \cong \{\xi\}$, 故 $X'/G_K \cong \operatorname{Spec}(K)$, 从而 X' 为一个 G_K-轨迹的闭包, 即存在一个闭点 $x' \in X'$ 使得 $G_K x'$ 为 X' 的稠密开集。令 $H' \subset G_K$ 为 x' 在 G_K 作用下的安定子群概形, 则因 G_K 是交换的, 任意 $x'' \in G_K x'$ 在 G_K 作用下的安定子群概形都是 H'。记 $U' \subset X_\xi$ 为 $G_K x'$ 在 X 中的像, 它是 X_ξ 的开子集。

令 $X_K = X \otimes_k K$, $p : X_K \to X$ 为投射, $\rho_K : G_K \times_K X_K \to X_K$ 为 ρ 诱导的作用, $H_K = H \otimes_k K$, 则由注 Ⅳ.1.1 可见 G_K 为 $\mathcal{A}ut(X_K/K)$ 的有限型交换子群概形, 且 H_K 为 ρ_K 的安定子。注意 $X_K \cong X' \otimes_k \kappa(\xi)$, 而 G_K 在 X_K 上的作用由它在 X' 上的作用决定 (因为它由 ρ 诱导, 而 G 定义在 k 上)。对任意闭点 $t \in X_K$, 若 $p(t) \in U'$, 则 $t \mapsto p(t)$ 经过 $G_K x'$, 由此可见 t 的安定子群概形为 H'。易见 X_K 中安定子群概形包含 H' 的所有点组成一个闭子集, 而它包含 U' 的原像, 故在 X_K 中稠密, 从而等于 X_K。由于 X_K 是整的, 这说明 H' 在 X_K 上的作用平凡。但 H' 是 $\mathcal{A}ut(X_K/K)$ 的子群概形, 由 $\mathcal{A}ut(X_K/K)$ 的泛性可见 H' 为零。这说明 X_K 中在 ρ_K 下安定子群概形为零的所有点组成的一个稠密开子集 V。显然 V 在 G_K 的作用下不变。

由此可见对 X_ξ 的任意闭点 x, Gx 在 X_ξ 中稠密。因此 $Gx = X_\xi$, 因为任两个 G-轨迹不相交。这说明 α 诱导的 $G \times_k X_\xi \to X_\xi \times_Y X_\xi$ 是同构。由此可取稠密开子概形 $U \subset X$ 使得有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 在 U 上有定义, G 作用于 U 上且 α 诱导的 $G \times_k U \to U \times_Y U$ 是同构。这说明 G 自由地作用于 U 上。证毕。

引理 1. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为光滑相对射影态射, 具有几何整纤维, 并有一个截口 $o : S \to X$。若 X 在一点 $s \in S$ 上的纤维为阿贝尔簇, 则存在 s 的开邻域 $U \subset S$ 使得 $X \times_S U \to U$ 为阿贝尔概形。

证. 不妨设 S 是连通的。令 g 为 π 的相对维数。

情形 1: $S = \mathrm{Spec}(R)$ 为 $\{s\} = \mathrm{Spec}(k)$ 的无穷小扩张, 其中 R 为阿廷局部环, $p \subset R$ 为极大理想。由归纳法不妨设已给定某个理想 $I \subset p$, 满足 $Ip = 0$, $\dim_k I = 1$, 使得 X 在 $S_0 = \mathrm{Spec}(R/I)$ 上的限制 $X_0 = X \times_S S_0 \to S_0$ 为阿贝尔概形。令 m_0 为 X_0 的乘法, ι_0 为 X_0 的逆。我们来看如何将 m_0 扩张为 X 的乘法。记 $\bar{m}$ 为 m_0 在 $\bar{X} = X \otimes_R k$ 上的限制。记 $i_1 = \mathrm{id}_X \times_S o : X \cong X \times_S S \to X \times_S X$, $i_2 = o \times_S \mathrm{id}_X : X \cong S \times_S X \to X \times_S X$, 并记 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset O_{X \times_S X}$ 分别为 i_1 和 i_2 的定义理想层。注意 i_1^* 将 $\mathcal{I}_1$ 映到 $0 \subset O_X$ 而将 $\mathcal{I}_2$ 映到 $\ker(o^*) \subset O_X$。

取定一个同构 $\Omega^1_{\bar{X}/k} \cong O_{\bar{X}}^{\oplus g}$。对任意仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ 及任意仿射开子概形 $U' = \mathrm{Spec}(B) \subset m_0^{-1}(U)$, 由 π 的光滑性可以将

$m_0^*: A/IA \to B/IB$ 提升为一个同态 $\mu: A \to B$, 而任意两个这样的提升相差一个

$$Hom_A(\Omega^1_{A/R}, B \otimes_R I) \cong Hom_A(\Omega^1_{(A/pA)/k}, (B/pB) \otimes_k I) \cong (B/pB)^{\oplus g} \tag{1}$$

的元。由此可以修正 μ 使得 μ 与 $(o \times_S o)^*$ 的合成由 o^* 诱导。

由所设易见 μ 与 i_1^* 的合成与 id_B 模 I 同余。令 $I_1 = \mathcal{I}_1(U')$, $I_2 = \mathcal{I}_2(U') \subset B$, 则由上所述 $I_2 \to B/I_1$ 的像为 o^* 的核。用 I_2 的元修正 μ 可使 μ 与 i_1^* 的合成由 id_A 诱导。同样地, 用 I_1 的元修正 μ 可使 μ 与 i_2^* 的合成由 id_A 诱导。

取 X 的一个有限仿射开覆盖 $U_1, ..., U_r$ 并对每个 $m_0^{-1}(U_i)$ 取一个有限仿射开覆盖 $\{U'_{ij} | j = 1, 2, ...\}$, 对每个 U'_{ij} 像上面那样给出 $m_0|_{U'_{ij} \cap X_0}$ 的一个提升 $m_{ij}: U'_{ij} \to U_i$, 即使得 $m_{ij} \circ i_1$ 和 $m_{ij} \circ i_2$ 均由 id_X 诱导。由 (1) 可见所有 m_{ij}^* 合起来给出

$$Hom_{O_{X \times_S X}}(m_0^* \Omega^1_{\bar{X}/k}, O_{\bar{X} \times_k \bar{X}}) \cong O^{\oplus g}_{\bar{X} \times_k \bar{X}} \tag{2}$$

的一个 1-闭链 α。若 α 为零闭链, 则所有 m_{ij} 粘起来给出 m_0 在 S 上的一个提升 $m: X \times_S X \to X$。而经过修正诸 m_{ij} 能使 α 变为零当且仅当 α 是上边缘, 即 α 在 $H^1(\bar{X} \times_k \bar{X}, O^{\oplus g}_{\bar{X} \times_k \bar{X}})$ 中的像为 0。由居内特公式有

$$\begin{aligned} & H^1(\bar{X} \times_k \bar{X}, O_{\bar{X} \times_k \bar{X}}) \\ \cong & H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \otimes_k H^0(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \oplus H^0(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \otimes_k H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \\ \cong & H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \oplus H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) \end{aligned} \tag{3}$$

其中右边的第一和第二个直加项到左边的同态分别由 pr_1^* 和 pr_2^* 诱导。注意 $\mathrm{pr}_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_X$, $\mathrm{pr}_2 \circ i_1 = o \circ \pi$ 等可见 (3) 的左边到右边第一和第二个直加项的投射分别由 i_1^* 和 i_2^* 诱导。由上面 m_{ij} 的取法可知 $i_1^*(\alpha)$ 和 $i_2^*(\alpha)$ 都是零闭链, 故 α 在 $H^1(\bar{X} \times_k \bar{X}, O^{\oplus g}_{\bar{X} \times_k \bar{X}})$ 中的像为 0。这样就得到 m_0 在 S 上的一个提升 $m: X \times_S X \to X$, 它满足

$$m \circ (\mathrm{id}_X \times_S o) = m \circ (o \times_S \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X : X \to X \tag{4}$$

下面我们来给出 ι_0 在 X 上的一个提升 ι, 我们要求 ι 满足

$$t := m \circ (\mathrm{id}_X \times_S \iota) \circ \Delta = o \circ \pi : X \to X \tag{5}$$

对任意仿射开子概形 $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$, 易见 $\iota_0(U)$ 具有 X 的仿射开子概形结构, 记为 $\mathrm{Spec}(B)$。由 π 的光滑性可以将 $\iota_0^* : A/IA \to B/IB$ 扩张为一个同态 $\nu : A \to B$, 而任意两个这样的扩张相差一个

$$Hom_A(\Omega^1_{A/R}, B \otimes_R I) \cong Hom_A(\Omega^1_{(A/pA)/k}, (B/pB) \otimes_k I) \cong (B/pB)^{\oplus g} \tag{6}$$

的元。另一方面, 任一扩张 ν 与 t^* 合起来给出一个 R-代数同态 $A \to A$, 它模 I 给出 o^*, 不难看出扩张 ν 的任意两个选择所给出的同态 $A \to A$ 相差一个 $Hom_A(\Omega^1_{A/R}, A \otimes_R I)$ 中的元, 这样就得到 ν 给出的同态 $A \to A$ 与 ν 的一一对应。特别地可取 ν 使得它对应的同态 $A \to A$ 为 id_A, 而且这样的 ν 是唯一的。

任取 X 的一个仿射开覆盖 $U_1, ..., U_r$, 对每个 U_i 象上面那样取 $U_i \to \iota_0(U_i)$, 则由取法的唯一性可见它们粘起来给出 ι_0 在 S 上的一个提升 $\iota : X \to X$, 且满足 (5)。由此不难得到 $\iota \circ o = o$。令

$$\begin{aligned} \alpha &= (m, \mathrm{pr}_2) : X \times_S X \to X \times_S X, \\ \beta &= (m \circ (\mathrm{id}_X \times_S \iota), \mathrm{pr}_2) : X \times_S X \to X \times_S X \end{aligned} \tag{7}$$

我们来证明 α 与 β 互逆, 故为自同构。令 $q = \mathrm{pr}_1 \circ \beta \circ \alpha : X \times_S X \to X$, 则对 X 的截口 o, 由上面的 (4) 和 (5) 可见 $q \circ (o \times_S \mathrm{id}_X) = o \circ \pi$, 故由刚性引理 (引理 Ⅶ.1.1) 可见 q 经过 pr_1, 再取 X 的第二个拷贝的零截口就可见 $q = \mathrm{pr}_1$, 从而 $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{X \times_S X}$。类似地可以得到 $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{X \times_S X}$。

这可以理解为 $(x - y) + y = x$, 故任意两个态射 $\phi, \psi : T \to X$ 相等当且仅当 $\phi - \psi = 0$。由此可以证明乘法结合律: 令 $T = X \times_S X \times_S X$, 则乘法结合律可以表为两个态射 $\phi, \psi : T \to X$ 相等, 这等价于 $\phi - \psi = 0$, 而由刚性引理不难得到 $\phi - \psi = 0$。综上所述我们得到 X 的一个 S-阿贝尔概形结构。

情形 2: 一般情形。由定理 Ⅳ.2.2.iv) 可知存在希尔伯特概形 $\mathcal{H}$ 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{T\text{-态射} \ \ \phi : X \times_S X \times_S T \to X \times_S T\}$$

如果要求 ϕ 给出 $X \times_S T$ 一个群概形结构使得 ϕ 为 $(x, y) \mapsto x - y$, 则如上所述群概形定义中的条件可以表述为某些态射经过 $o \times_S \mathrm{id}_T$, 不难验证这给出 $\mathcal{H}$ 中的一个闭条件, 因此有一个 $\mathcal{H}$ 的闭子概形 $\mathcal{H}'$ 代表预层

$T \mapsto \{X \times_S T$ 的 T-阿贝尔概形结构$\}$

由情形 1 可见 $\mathcal{H}' \to S$ 是光滑的, 从而是开映射 (见引理 I.1.2.ix)), 其像 $U \subset S$ 为 s 的开邻域。由推论 Ⅶ.1.2.ii) 可见, 若 $X \times_S T$ 有 T-阿贝尔概形结构, 则它的以 $o \times_S \mathrm{id}_T$ 为零截口的 T-阿贝尔概形结构是唯一的, 故 $T \to \mathcal{H}'$ 由 $T \to U$ 唯一决定。因此 $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 : \mathcal{H}' \times_U \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$, 这说明 $\mathcal{H}'$ 是 pr_1 和 pr_2 的推出, 但由命题 V.1.1 可知 U 是 pr_1 和 pr_2 的推出, 故投射 $\mathcal{H}' \to U$ 是同构。因此 $X \times_S U \to U$ 为阿贝尔概形。证毕。

引理 2. 设 S 为诺特概形, $\pi : X \to S$ 为光滑相对射影态射, 具有几何整纤维, 并有一个截口 $o : S \to X$。若存在稠密开子概形 $U \subset S$ 使得 $X \times_S U \to U$ 为阿贝尔概形, 则 $X \to S$ 为阿贝尔概形。

证. 情形 1: $S = \mathrm{Spec}(R)$, 其中 R 为戴德金环。记 g 为 π 的相对维数。不妨设 $S - U$ 只有一个点 s。记 $k = \kappa(s)$, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。由引理 1 可见只需证明 $\bar{X} = X_s \otimes_k \bar{k}$ 是 $\bar{k}$-阿贝尔簇即可。

由 π 的光滑性可见 $\mathcal{P}ic^0(X/S)$ 在 S 上是射影的 (见定理 Ⅵ.2.1)。由定理 Ⅶ.2.1 可见 $\mathcal{P}ic^0(X/S) \times_S U$ 为 U 上为阿贝尔概形。令 Y 为 $\mathcal{P}ic^0(X/S) \times_S U$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 中的闭包, 则 Y 是 S 上的平坦射影交换群概形, 故 Y_s 为 k 上的 g 维射影交换群概形。注意对任意正整数 n, n_Y 为集合的满射, 故 Y_s 是几何连通的。

另一方面, 令 $G = \mathcal{A}ut^0(X/S)$, 则由命题 1.2 可见 $G \times_S U \cong X \times_S U$。令 G' 为 $G \times_S U$ 在 G 中的闭包, 则易见 G' 为 S 上的平坦交换子群概形, 故 G'_s 为 k 上的 g 维交换群概形。由命题 Ⅵ.2.2 可见 G' 在 $\mathcal{P}ic^0(X/S)$ 上有典范的诱导作用, 它在 U 上的限制由同构诱导, 故由 G' 和 Y 在 S 上的平坦性可见这诱导 G' 在 Y 上的作用。

令 H 为 $(G'_s \otimes_k \bar{k})_{\mathrm{red}}$ 的零分支, Z 为 $(Y_s \otimes_k \bar{k})_{\mathrm{red}}$ 的零分支 (为 $\bar{k}$ 上的阿贝尔簇), 则庞加莱层在 $X \times_S Y$ 上的限制诱导一个典范态射 $\phi : \bar{X} \to Z$。令 $\rho : H \times_{\bar{k}} \bar{X} \to \bar{X}$ 为 H 在 $\bar{X}$ 上的典范作用, 则由上所述 ρ 诱导 H 在 Z 上的一个典范作用 ρ', 再由命题 Ⅵ.2.2 可见 ρ' 又诱导 H 在 $\hat{Z}$ 上的一个典范作用 ρ'', 而由庞加莱层的泛性可见 ρ, ρ'' 与 ϕ 相容, 即 $\phi \circ \rho = \rho'' \circ (\mathrm{id}_H \times_{\bar{k}} \phi)$。由推论 Ⅶ.1.2.iv) 可知 ρ'' 等价于一个群概形同态 $h : H \to \hat{Z}$。注意 $h(H)$ 为 $\hat{Z}$ 阿贝尔子簇。由命题 1 可见 H 在 $\bar{X}$ 的

一个非空开子概形 U' 上的作用是自由的, 故由 $\dim(H)=\dim(\bar{X})$ 可见 H 在 U' 上的作用可迁, 由此可见 $\bar{X}\to\hat{Z}$ 的像在 $h(H)$ 中。故由 Z 和 $\hat{Z}$ 的泛性有 $h(H)=\hat{Z}$。由此可见 H 是射影的, 即为阿贝尔簇。任取闭点 $x\in U'$, 则 Hx 为 $\bar{X}$ 的稠密闭子概形, 故 $Hx=\bar{X}$。令 $H_x\subset H$ 为 x 的安定子群概形, 则 H_x 为任一闭点 $y\in\bar{X}$ 的安定子群概形, 故由 H 的泛性有 $H_x=0$, 从而 $H\cong\bar{X}$。

情形 2: S 为有限型 $\mathbb{Z}$-概形。对任一闭点 $s\in S-U$ 可取一条过 s 的仿射曲线 $C\subset S$ 使得 $C\cap U\neq\emptyset$, 令 $\tilde{C}$ 为 C 的正规化, 则 $\tilde{C}$ 是诺特的 (引理 I.4.2)。由情形 1 可知 $X\times_S\tilde{C}$ 为阿贝尔概形。由此可见 π 的纤维都是阿贝尔概形。故由引理 1 可见 π 为阿贝尔概形。

情形 3: 一般情形。不妨设 $S=\mathrm{Spec}(R)$, 其中 R 为诺特环。取 R 的一个有限生成 $\mathbb{Z}$-子代数 R' 使得 X 定义在 $S'=\mathrm{Spec}(R')$ 上, 即存在 S' 上的光滑射影概形 X', 具有几何整纤维, 且有一个截口 $S'\to X'$, 使得 $X\cong X'\times_{S'}S$。由所设可知 X' 在 S' 的一般点上的纤维都是阿贝尔簇, 由此及引理 1 可见有一个稠密开子概形 $U\subset S'$ 使得 $X'\times_{S'}U\to U$ 为阿贝尔概形。这样由情形 2 就得到 $X'\to S'$ 为阿贝尔概形, 从而 π 为阿贝尔概形。证毕。

由引理 1 和引理 2 立得

定理 1. 设 S 为连通诺特概形, $\pi:X\to S$ 为光滑相对射影态射, 具有几何整纤维, 并有一个截口 $\zeta:S\to X$。若 X 在某一点 $s\in S$ 上的纤维为阿贝尔簇, 则 π 为阿贝尔概形。

2. 连续变化的射影群概形族

例 1. 设 E 为特征 p 的完全域 k 上的超奇椭圆曲线, 令 $Y=E[p]\times_k E\hookrightarrow E^2$。对任意单射 $t:\alpha_p\to E^2$, 令 $X_t=Y/t(\alpha_p)$, 则 X_t 是不光滑的群概形, 且有正合列

$$0\to E\to X_t\to\alpha_p\to 0$$

对几乎所有 t 有 $\ker(F_{X_t^{(p)}/k})\cap\ker(V_{X/k})\cong\alpha_p$, 而此时 $X_t\not\cong\alpha_p\times_k E$。

由于 α_p^2 的所有同构于 α_p 的闭子群概形由 $\mathbb{P}_k^1$ 代表 (例 VIII.5.2), 由此可建立 α_p^2 的在 $\mathbb{P}_k^1$ 上的同构于 α_p 的子群概形族 H, 从而得到 Y 的在

$\mathbb{P}^1_k$ 上的非平凡商群概形族 $(Y \times_k \mathbb{P}^1_k)/H$, 它是 $\mathbb{P}^1_k$ 上的非光滑平坦射影群概形。同样可建立 E^2 的在 $\mathbb{P}^1_k$ 上的非平凡商群概形族 $(E^2 \times_k \mathbb{P}^1_k)/H$, 它是 $\mathbb{P}^1_k$ 上的阿贝尔概形。这可以理解为在 E^2 的同源等价类中可以连续变化。

这种情形在特征 0 时是不会发生的, 详言之, 设 S 是特征 0 的代数闭域 k 上的 (连通) 代数簇, X 为 k 上的阿贝尔簇, $q : X \times_k S \to Y$ 为 S-阿贝尔概形的同源, 则存在 k 上的阿贝尔簇 Y_0 使得 $Y \cong Y_0 \times_k S$。理由如下: 令 $H = \ker(q)$, 则 H 为 $X \times_k S$ 的有限平展子群概形; 令 $d = \deg(H/S) = \deg(q)$, 则 $H \subset X[d]$, 而 $X[d] \times_k S$ 也是 $X \times_k S$ 的有限平展子群概形, 故 H 为 $X[d] \times_k S$ 的若干个连通分支的并, 从而存在闭子群概形 $H_0 \subset X[d]$ 使得 $H = H_0 \times_k S$; 令 $Y_0 = X/H_0$ 即有 $Y \cong Y_0 \times_k S$。

在任何情形, 一个阿贝尔簇的阿贝尔子簇不能连续变化。设 S 是代数闭域 k 上的连通代数簇, X 为 k 上的阿贝尔簇, $Y \subset X \times_k S$ 为 S 上的阿贝尔子概形。任取闭点 $s \in S$ 并令 $Z = X/Y_s$, 则投射 $f : Y \to Z \times_k S$ 将一个 S-纤维 Y_s 映到一点, 故由刚性引理可知 f 经过 S, 即存在态射 $\phi : S \to Z$ 使得 $f = \phi \circ \mathrm{pr}_2$。再考虑零截口 $o_Y : S \to Y$ 可见 ϕ 经过 Z 的零截口, 从而 $f = 0$, $Y \subset Y_s \times_k S$。由 $Y \to S$ 的平坦性可知 $Y \to S$ 的纤维都有相同的维数, 故 $Y = Y_s \times_k S$。

但一个阿贝尔簇可能有无穷多个阿贝尔子簇, 例如对任一椭圆曲线 E 令 $X = E^2$, 则对任意两个互素的整数 m, n, 同态 $E \xrightarrow{(m,n)} E^2$ 为单同态, 它的像 Y_{mn} 为 X 的阿贝尔子簇, 且这些 Y_{mn} 互不相同。但注意所有 Y_{mn} 相互都同构。事实上, 有一个 Lenstra-Oort-Zarhin 定理 (见 [LOZ]) 说, 任何一个阿贝尔簇的阿贝尔子簇只有有限多个同构类。

习题

1. 设 p 为素数, $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$, $s \in S$ 为闭点。设 $\tilde{E}$ 为 S-椭圆曲线 (即相对维数 1 的阿贝尔概形) 使得 $E = \tilde{E}_s$ 是超奇的。令 $X = \tilde{E}^2$, $\tilde{X} = X \times \mathbb{P}^1$ (看作 $\mathbb{P}^1_S$-阿贝尔概形)。证明存在 $\mathbb{P}^1_S$-平坦有限闭子群概形 $\tilde{H} \subset \tilde{X}$ 使得 $\tilde{X}/\tilde{H}$ 模 p 同构于例 1 中的 $(E^2 \times_k \mathbb{P}^1_k)/H$ $(k = \mathbb{F}_p)$。

2. 设 X 为域 k 上的射影簇。证明对于 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 的任一交换子群概形 G 有 $\dim(G) \leqslant \dim(X)$。

第 X 章　群概形的结构

本章主要讨论域上的有限型群概形。如不另外说明，概形均为一个域 k 上的有限型分离概形，并记 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。

第 1 节　一些基本事实

1. 关于线性作用

前面已给出多项关于线性群概形和线性作用作用的事实，整理如下:

引理 1. 设 X 为 k 上的有限型分离概形，G 为 k 上的有限型分离群概形，$\rho : G \times_k X \to X$ 为 G 在 X 上的作用，$\Phi = (\mathrm{pr}_1, \rho) : G \times_k X \to G \times_k X$。

i) 设 E 为 n 维 k-线性空间，$X = \mathbb{V}(E) \cong \mathbb{A}^n$，$G = GL_{X/k} \cong GL_{n/k}$，$\rho$ 为 G 在 X 上的典范作用，则 (G, Φ) 代表 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层:

$$T \mapsto Aut_{\mathbb{A}^1_T}(X \times_k T)$$

(见 Ⅲ.3 节)。

ii) 设 G 为有限交换群概形，则 G^D 代表 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的下列预层:

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G \times_k T, \mathbb{G}_{m/T})$$

而 $\mathcal{L}ie(G^D/k) = \mathbb{V}(\omega_{G/k})$ 代表 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的下列预层:

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T(G \times_k T, \mathbb{G}_{a/T})$$

(命题 Ⅲ.4.1)。

iii) 设 X 为几何约化连通射影的且 $H^1(X, O_X) = 0$，则 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 为线性群概形 (见命题 Ⅸ.1.1)。特别地，若 $X = \mathbb{P}^n_k$，则 $\mathcal{A}ut(X/k) \cong PGL_{n+1/k}$ (见例 Ⅸ.1.3)。

iv) 设 X 是有限的，$n = \deg(X/k)$，则 $\mathcal{A}ut(X/S)$ 可嵌入 $GL_{n/k}$ 作为闭子群概形 (见例 Ⅸ.1.4)。

v) 设 ρ 保持有限闭子概形 $Y \subset X$ 不动 (即 $\rho|_{G\times_k Y} = \mathrm{pr}_2$)，而 Y 与 X 的每个连通分支相交。令 $\mathcal{I} \subset O_X$ 为 Y 的理想层。则对任意正

整数 n, ρ 诱导线性表示 $\phi_n : G \to GL_{V(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n)/k}$, 且对充分大的 n, $\mathcal{I}d(\rho, X) = \ker(\phi_n)$ 代表 $\mathfrak{Sch}_k$ 上的预层

$$T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}_k(T, G) | T \times_f \Phi = \mathrm{id}_{T \times_k X}\}$$

而 $G/\mathcal{I}d(\rho, X)$ 是线性的 (见推论 IX.3.2)。特别地, 若 G 连通, $X = G$ 而 ρ 为 G 在自身上的共轭作用, 则 ρ 诱导线性表示 $\phi_n : G \to GL_{\mathcal{D}iff^n(G/k)/k}$, 且对充分大的 n 有 $\ker(\phi_n) = C(G)$ (即 G 的中心), 而 $G/C(G)$ 是线性的。

vi) 设 G 为仿射群概形, X 为仿射概形, 则存在 X 到某个 $\mathbb{A}_k^n$ 的闭嵌入使得 ρ 为 G 在 $\mathbb{A}_k^n$ 上的一个线性作用的限制。特别地 G 是线性的 (见引理 IX.3.1)。

vii) 设 X 是连通的且有一个孤立 (闭) 奇点, 则 $\mathcal{A}ut(X/k)$ 是线性的 (见推论 IX.3.3)。

引理 2. 设 G 为 k 上的有限型分离群概形, 则 $A = \Gamma(G, O_G)$ 为有限生成的 k-代数, 而 $G' = \mathrm{Spec}A$ 具有诱导的 k-群概形结构, 使得投射 $q : G \to G'$ 忠实平坦, 且 $\ker(q) \subset C(G^0)$ (即 G 的零分支 G^0 的中心)。

证. 由居内特公式有 $\Gamma(G \times_k G, O_{G \times_k G}) \cong A \otimes_k A$, 故 m_G 诱导一个同态 $A \to A \otimes_k A$, 不难验证这给出 $G' = \mathrm{Spec}A$ 一个 k-群概形结构, 而投射 $q : G \to G'$ 为同态。

令 $H = \ker(q)$, 则有诱导同态 $q' : G'' = G/H \to G'$, 而 $\ker(q') = 0$。由此有 $G'' \times_{G'} G'' \cong G''$。

情形 1: G 为群簇。设 $\xi \in G''$ 为一般点, $\xi' = q'(\xi)$, 则 $\kappa(\xi) \cong \kappa(\xi') \cong \mathrm{q.f.}(A)$。任取 G'' 的非空仿射开子概形 $\mathrm{Spec}R$, 则有诱导环同态 $\phi : R \to \kappa(\xi) \cong \mathrm{q.f.}(A)$, 故存在 $f \neq 0 \in A$ 使得 ϕ 经过 A_f, 这说明投射 $q'^{-1}(G'_f) \to G'_f$ 有一个截口

$$G'_f = \mathrm{Spec}A_f \to G''_f = q'^{-1}(G'_f) \tag{1}$$

故 $G''_f \cong G'_f$, 再由平移易见 $G'' \cong G'$, 从而 G' 在 k 上是有限型的, 且由命题 VI.1.6 可见 q 是平坦的。由引理 1.v) 可见投射 $G \to G/C(G)$ 经过 G', 故 $\ker(q) \subset C(G)$。

情形 2: G 是连通的。若 $\mathrm{ch}(k)=0$ 则 G 是群簇, 从而化为情形 1, 故只需考虑 $\mathrm{ch}(k)=p>0$ 的情形。不难约化为 $k=\bar{k}$ 的情形。由情形 1 和命题 VI.1.6 可见有闭嵌入

$$i: G'_{\mathrm{red}} \cong G_{\mathrm{red}}/H_{\mathrm{red}} \hookrightarrow G/H_{\mathrm{red}} \tag{2}$$

由情形 1 还可见 G/H_{red} 是仿射的, 令 A_1 为其函数环, 则 q 诱导嵌入 $A\to A_1$。取 n 使得 $F^n_{G/k}$ 经过 G_{red} 并令 $G/\ker(F^n_{G/k})=G_1=\mathrm{Spec}A_0$, 则 A_1 是有限生成的 A_0-模且 $A_0\subset A$, 故 A 是有限生成的 A_0-模, 从而是有限生成的 k-代数。注意 G/H_{red} 和 G' 均在 G_1 上平坦, 由引理 I.1.2.vi) 可见 $G/H_{\mathrm{red}}\to G'$ 平坦, 故 q 平坦。与情形 1 同样可得 $\ker(q)\subset C(G)$。

情形 3: 一般情形。仍不妨设 $k=\bar{k}$, 这样 G 的各连通分支作为 k-概形都同构, 故 G' 是 k-有限型的。由于 G 的连通分支与 G' 的连通分支一一对应, 若闭点 $g\in\ker(q)$ 则 T_g 保持 G 的每个连通分支, 故 $g\in G^0$。这说明 $\ker(q)=\ker(G^0\to G')$, 从而由情形 2 有 $\ker(q)\subset C(G^0)$。证毕。

注 1. 在一般情形未必有 $\ker(q)\subset C(G)$ (参看习题 1)。

2. 关于曲线

设 G 是一维 k-群簇, 则由例 IX.3.1 可知或者 G 为椭圆曲线, 或者 G 几何同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$, 从而有在 $\mathbb{P}^1_k$ 上的忠实作用。关于群簇在曲线上的作用还有下列基本事实。

引理 3. 设 k-曲线 C (不一定是光滑的或完备的) 有一个群簇 G 的作用 ρ。令 $\tilde{C}$ 为 C 的紧致化的正规化。

i) ρ 可以 (唯一地) 扩张为 G 在 $\tilde{C}$ 上的作用, 从而诱导一个 k-群概形同态 $G\to \mathcal{A}ut(\tilde{C}/k)$。

ii) 设 C 为 G-挠子, 而 $G\cong\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$。则 $C\cong G$, 特别地 $C(k)\neq\emptyset$。

iii) 若 $g(C)=0$, $G\neq 0$ 而 ρ 为忠实作用 (或 $\dim(G)=1$ 且 $g(G)=0$), 则 G 几何同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$。

证. i) 令 $\xi\in G$ 为一般点, $F=\kappa(\xi)\cong k(G)$, 则 ρ 诱导 $C\otimes_k F$ 的 F-自

同构 Φ, 这给出 $K(C\otimes_k F)$ 的一个 F-自同构, 而这又等价于 $\bar{C}\otimes_k F$ 的一个 F-自同构 $\bar{\Phi}$, 为 Φ 的扩张。注意 $\bar{\Phi}$ 等价于一个 k-态射 $\phi:\mathrm{Spec}F\to G_0=\mathcal{A}ut(\bar{C}/k)$, 故存在一个稠密开子概形 U 使得 ϕ 可以扩张到 U (仍记为 ϕ), 这可以理解为 U 在 $\bar{C}$ 上的一个作用, 它是 U 在 C 上的作用的扩张。而 $U\times_k U$ 在 $\tilde{C}$ 上的作用 (即 $(g,g',x)\mapsto gg'x$) 诱导的态射 $\psi:U\times_k U\to G_0$ 等于 $\phi\times_k\phi$ 与 m_{G_0} 的合成。注意 $m_G|_{U\times_k U}:U\times_k U\to G$ 忠实平坦, 令 T 为 $m_G|_{U\times_k U}$ 和 $m_G|_{U\times_k U}$ 的拉回, 则由抽象废话易见 $\psi\circ\mathrm{pr}_1=\psi\circ\mathrm{pr}_2:T\to G_0$, 从而由 G 是 pr_1 和 pr_2 的推出 (命题 V.1.1) 可见有诱导态射 $f:G\to G_0$, 且易见 f 是 ϕ 的扩张, 再由抽象废话可见 f 是同态, 故等价于 G 在 $\bar{C}$ 上的一个作用 $\bar{\rho}$, 且 $\bar{\rho}$ 为 ρ 的扩张。

ii) 记 $\theta\in C$ 为一般点, $K=\kappa(\theta)\cong k(C)$, 则 α (作为右 C-态射) 在 θ 上的纤维为一个 K-同构 $G\otimes_k K\to C\otimes_k K$。注意 G 可嵌入 $\mathbb{P}^1_k$ 作为开子概形, 而任意 $p\in\tilde{C}-C$ 在 $\tilde{C}\otimes_k K$ 中的原像为一个闭点 (因为 $\kappa(p)\otimes_k K$ 是域), 故 $\tilde{C}\otimes_k K$ 是正规的。注意 $G\otimes_k K$ 的 (正规) 紧致化同构于 $\mathbb{P}^1_K$, 故 $\tilde{C}\otimes_k K\cong\mathbb{P}^1_K$, 从而由引理 I.1.9.ii) 可见 $\tilde{C}$ 在 k 上光滑且 $g(\tilde{C})=0$。注意 $\tilde{C}\otimes_k K-C\otimes_k K\cong\mathbb{P}^1_K-G\otimes_k K$ 由一个 (当 $G\cong\mathbb{G}_{a/k}$ 时) 或两个 (当 $G\cong\mathbb{G}_{m/k}$ 时) K-点组成, 它们在 $\tilde{C}$ 中的像为闭点。由于 $K\otimes_k\bar{k}$ 是域, k 在 K 中代数闭, 可见 $\mathbb{P}^1_K-G\otimes_k K$ 在 $\tilde{C}$ 中的像由 1 或 2 个 k-点组成, 这说明 $\tilde{C}$ 有 k-点, 故由引理 I.1.9.iii) 可知 $\tilde{C}\cong\mathbb{P}^1_k$。但 $\mathbb{P}^1_k$ 有至少 3 个 k-点, 故 C 至少有 1 个 k-点, 从而有 $C\cong G$。

iii) 由所设可知 G 是 1 维 k-群簇且 $g(C)=0$, 故由例 IX.3.1 可知 G 几何同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$。证毕。

关于一维线性群簇还有下列基本事实。

引理 4. 设 G,G' 为 1 维线性 k-群簇。

i) 若 G 与 G' 几何不同构, 则 G 与 G' 相互没有非零同态。

ii) 若 G 几何同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$, 则 $G\cong\mathbb{G}_{a/k}$。

证. i) 只需对 $k=\bar{k}$ 的情形证明即可, 此时不妨设 $G\cong\mathbb{G}_{a/k}$, $G'\cong\mathbb{G}_{m/k}$。若 $f:G'\to G$ 为同态, 任取素数 $l\neq\mathrm{ch}(k)$, 则对任意正整数 n 有 $f(G'[l^n])\subset G[l^n]=0$, 而所有 $G'[l^n]$ 的并在 G' 中稠密, 故 $f=0$。

若 $g: G \to G'$ 为非零同态, 则 $H = \ker(g)$ 有限, 若 $\mathrm{ch}(k) = 0$ 则 $H = 0$, 而若 $\mathrm{ch}(k) = p > 0$ 则 $\deg(H/k)$ 为 p 的幂。注意 G/H 同构于 G' 的一个非零子群簇, 故有 $G/H \cong G'$, 但对任意素数 $l \neq \mathrm{ch}(k)$ 有 $(G/H)[l] = 0$, 与 $G'[l] \neq 0$ 矛盾。

ii) 令 C 为 G 的 (正规) 紧致化, 则由引理 3.i) 可见 G 在自身上的左乘作用诱导 G 在 C 上的一个作用, 而由引理 3.ii) 可见 $C \cong \mathbb{P}^1_k$。由引理 1.iii) 有 $\mathcal{A}ut(C/k) \cong PGL_{2/k}$, 故 G 可嵌入 $PGL_{2/k}$ 作为闭子群簇 (参看引理 Ⅱ.1.5)。注意 $C - G$ 由一个 k-点组成, 不妨设该点为 ∞。而 $PGL_{2/k}$ 的保持 ∞ 不动的子群概形 H 为上三角阵组成的子群概形, 它有一个正规子群簇 $H_0 \cong \mathbb{G}_{a/k}$, 且 $H/H_0 \cong \mathbb{G}_{m/k}$。由 i) 可知投射 $G \to H/H_0$ 为零同态, 故 $G \subset H_0$, 从而 $G \cong H_0$。证毕。

由例 Ⅸ.3.1 和引理 4.ii) 立得

推论 1. 设 G 为一维 k-群簇, 则在同构之下只能有下列几种情形:

i) G 为 k-椭圆曲线;

ii) $G \cong \mathbb{G}_{a/k}$;

iii) $G \cong \mathbb{G}_{m/k}$;

iv) G 几何同构于 $\mathbb{G}_{m/k}$ 但在 k 上不同构于 $\mathbb{G}_{m/k}$, 此时 G 同构于一个 2 次可分点 $P \in \mathbb{P}^1_k$ 在 $PGL_{2/k}$ 中的安定子群概形, 且 G 的同构类等价于 k 的 2 次可分扩张的一个 k-同构类。

设 G 为代数闭域 k 上的非零交换群簇, $\Phi: G \to GL_{V/k}$ 为 G 的忠实线性表示, 其中 $V \cong \mathbb{A}^n_k$。由线性代数可知存在 G 的公共特征向量 $v \in V$, 令 $W \subset V$ 为 v 生成的 k-线性子空间 (即 $\mathbb{A}^1_k$-子模概形), 则有 G 在 W 和 V/W 上的诱导线性表示。若诱导表示 $\phi: G \to GL_{W/k} \cong \mathbb{G}_{m/k}$ 为非零同态, 则由 G 是群簇可见 ϕ 是满同态, 令 $H \subset G$ 为 $\ker(\phi)$ 的零分支的约化结构, 则 G/H 为一维群簇, 且有非零同态 $G/H \to \mathbb{G}_{m/k}$, 故由引理 4.ii) 和推论 1 有 $G/H \cong \mathbb{G}_{m/k}$。若 G 到 $\mathbb{G}_{m/k}$ 没有非零同态且 $G \neq 0$, 则由线性代数可知存在 G 的 2 维不变子空间 $W \in V$ 使得 G 在 W 上的作用非平凡, 这给出一个非零同态 $\phi': G \to \mathbb{G}_{a/k}$。令 $H' \subset G$ 为 $\ker(\phi')$ 的零分支的约化结构, 则 G/H' 为 1 维群簇, 且有非平凡同态 $G/H' \to \mathbb{G}_{a/k}$,

故由引理 4.ii) 和推论 1 有 $G/H' \cong \mathbb{G}_{a/k}$。

注意 V 可以分解为 G 的根空间的直和 $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 为 G 的互不相同的特征标。故 Φ 经过 $\prod_{i=1}^{r} GL_{V_i/k}$。令 G_i 为投射 $G \to GL_{V_i/k}$ 的像 $(1 \leqslant i \leqslant r)$, 则由线性代数可知可取 V_i 的一组 k-基使得 G_i 的每个闭点表达为一个上三角阵且对角元都相等。故有同态 $\phi_i : G_i \to \mathbb{G}_{m/k}$ 使得 $\ker(\phi_i)$ 同构于一些 $\mathbb{G}_{a/k}$ 的扩张。由此可见对某个 $s \leqslant r$ 存在满同态 $\phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{G}_{m/k}^{s}$ 使得 $H = \ker(\phi)$ 为群簇, 且 H 到 $\mathbb{G}_{m/k}$ 没有非零同态。总之有

推论 2. 任一代数闭域 k 上的交换线性群簇 G 同构于若干个 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的拷贝和一个群簇 G' 的直积, 其中 G' 为若干个 $\mathbb{G}_{a/k}$ 的拷贝的扩张, 它到 $\mathbb{G}_{m/k}$ 没有非零同态。

一般域 k 上的群簇 G 称为*强可解的*, 如果它有一个正规群簇列, 其每个因子同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$。由推论 1 和推论 2 易见当 $k = \bar{k}$ 时, 若线性群簇 G 是可解的 (即 G 有正规群概形列使得其每个因子都是交换的) 则 G 是强可解的 (但当 $k \neq \bar{k}$ 时不然)。

推论 3. 设 G 是域 k 上的强可解群簇, 在 k-代数簇 X 上有一个作用 ρ, 在一个非空开子集 U 上 ρ 是自由的, 且有有理商 $X/G \cong k$ (换言之 ρ 在 U 上是可迁的)。则 U 有一个 k-点。此外, 若 k 是无限域则 $U(k)$ 在 X 中察里斯基稠密。

证. 由所设存在一个正规群概形列

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_n = G \tag{1}$$

使得每个 G_i/G_{i-1} 同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$。对 n 用归纳法, 不妨设 $n > 0$。由命题 VI.1.6 可见存在商 $Y = U/G_{n-1}$, 且 $G' = G_n/G_{n-1}$ 自由可迁地作用于 Y 上。由于 $G' \cong \mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$, 由引理 3.ii) 可见 $Y \cong \mathbb{G}_{a/k}$ 或 $\mathbb{G}_{m/k}$, 特别地 Y 有一个 k-点 y。令 U_y 为 y 在 U 中的原像, 则 ρ 诱导 G_{n-1} 在 U_y 上的自由可迁作用, 故由归纳法假设可知 U_y 有一个 k-点。

若 k 是无限域, 则 Y 有无限多个 k-点, 且由归纳法假设可知对任意

$y \in Y(k)$, $X_y(k)$ 在 X_y 中察里斯基稠密, 故 $U(k)$ 在 X 中察里斯基稠密。证毕。

对于群簇的 k-点集的察里斯基闭包有下面的一般结果。

引理 5. 设 G 为完全域 k 上的有限型群概形, 则 $G(k)$ 在 G 中的察里斯基闭包的约化概形结构为闭子群概形。

证. 设 $H \subset G$ 为 $G(k)$ 的察里斯基闭包的约化概形结构。我们先来证明 $G(k) \times G(k)$ 在 $G \times_k G$ 中的察里斯基闭包为 $H \times_k H$。

任取仿射开子集 $U = \mathrm{Spec}(A)$, $U' = \mathrm{Spec}(A') \subset H$, 则有 k-代数单同态

$$A \hookrightarrow B = \prod_{p \in G(k) \cap U} k, \quad A' \hookrightarrow B' = \prod_{p \in G(k) \cap U'} k \tag{2}$$

故有 k-代数单同态 $A \otimes_k A' \hookrightarrow B \otimes_k B'$。我们需要证明

$$A \otimes_k A' \to C = \prod_{(p,p') \in (G(k) \times G(k)) \cap (U \times_k U')} k \tag{3}$$

是单同态, 为此只需证明典范同态 $\phi : B \otimes_k B' \to C$ 是单同态。

设 $v \in B \otimes_k B'$。取 $v_1, ..., v_r \in B$, $v'_1, ..., v'_r \in B'$ 使得 $v = \sum_{i=1}^r v_i \otimes_k v'_i$。令 $V \subset B$ 为 $v_1, ..., v_r$ 生成的 k-线性子空间, 则可取 $p_1, ..., p_n \in G(k) \cap U$ 及 V 的一组 k-基 $b_1, ..., b_n$ 使得 b_i 的 p_j 分量等于 δ_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$。类似地对 $v'_1, ..., v'_r$ 生成的 k-线性子空间 $V' \subset B'$ 可取 V' 的一组 k-基 $b'_1, ..., b'_m$ 及 $p'_1, ..., p'_m \in G(k) \cap U'$ 使得 b'_i 的 p'_j 分量等于 δ_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$。于是可将 v 唯一地表为 $\sum_{i,j} c_{ij} b_i \otimes_k b'_j$ $(c_{ij} \in k)$。注意 $\phi(v)$ 的 (p_i, p'_j)-分量等于 c_{ij}, 故当 $v \neq 0$ 时 $\phi(v) \neq 0$。

由 k 为完全域可见 $H \times_k H$ 是约化的, 注意 G 的群概形结构诱导 $G(k)$ 的群结构, 由上所述可见 $G(k)$ 的乘法诱导一个态射 $H \times_k H \to H$, 换言之 $m_G(H \times_k H) = H$, 故 H 为 G 的闭子群概形。证毕。

3. 关于阿贝尔簇

引理 6. 仿射群簇到阿贝尔簇无非零同态。

证. 不妨设 $k=\bar{k}$。对仿射群簇 G 的维数 d 用归纳法, $d=0$ 时无需证明, 以下设 $d>0$。若 G 是交换的, 则由推论 2 和 $Alb(\mathbb{P}^1_k)=0$ 立得, 以下设 G 非交换。

用反证法, 设有非零同态 $f:G\to A$, 其中 G 为仿射群簇, A 为阿贝尔簇, 则 $f(G)\subset A$ 为非零阿贝尔子簇, 故不妨设 f 为满同态。记 ρ 为 G 在自身上的共轭作用, $H\subset G\times_k G$ 为 ρ 的安定子, 则由 G 非交换有 $H\neq G\times_k G$。令 K 为 $k(G)$ 的代数闭包, $S=\mathrm{Spec}K$, 则 $H\times_G S$ 为 $G\otimes_k K$ 的真子群概形。记 H_0 为 $H\times_G S$ 的零分支的约化结构, 则由归纳法假设有 $f\otimes_k \mathrm{id}_K(H_0)=0$, 故 $f\otimes_k\mathrm{id}_K(H\times_G S)$ 是 $A\otimes_k K$ 的有限子群概形, 从而可取正整数 n 使得 $n_{A\otimes_k K}(f\otimes_k\mathrm{id}_K(H\times_G S))=0$。这蕴含 $((n_A\circ f)\times_k \mathrm{id}_G)|_H$ 在 G 的一般点上的纤维为 0, 从而有一个稠密开子概形 $U\subset G$ 使得 $((n_A\circ f)\times_k\mathrm{id}_G)|_{H\times_G U}=0$。注意 $\Delta(G)\subset H$, 可见 $n_A\circ f(U)=0$, 但 n_A 是同源而 U 是整的, 故 $f(U)=0$, 从而 $f(G)=0$, 矛盾。证毕。

引理 7. 任意 k-群簇到阿贝尔簇的态射都是同态与平移的合成。

证. 设 $f:G\to A$ 为 k-群簇 G 到阿贝尔簇 A 的 k-态射, 不妨设 k 是代数闭的且 $f(e_G)=0_A$。由于 f 经过 $Alb(G)$ 而诱导的 $Alb(G)\to A$ 是同态, 且由引理 Ⅶ.4.1 可知有泛态射 $\mu_G:G\to Alb(G)$, 故不妨设 $A=Alb(G)$。

令 $\phi:G\times_k G\to A$ 为态射 $(g,g')\mapsto f(gg')-f(g)-f(g')$, 则由 $Alb(G\times_k G)\cong A\times_k A$ (推论 Ⅶ.4.2) 可见 ϕ 诱导一个同态 $\psi:A\times_k A\to A$ 使得 $\phi=\psi\circ\mu_{G\times_k G}$。由 $\phi(\{e_G\}\times_k G)=0$ 可见 $\psi(\{0_A\}\times_k\mu(G))=0$, 从而由 μ_G 的泛性有 $\psi(\{0_A\}\times_k A)=0$, 故由刚性引理 (引理 Ⅶ.1.1) 可见 ψ 经过 pr_1。同理 ψ 也经过 pr_2, 故 $\psi=0$, 从而 $\phi=0$, 即 f 是同态。证毕。

引理 8. 设阿贝尔簇 A 是拟射影 k-群簇 G 的子群簇, 则存在同态 $q:G\to\hat{A}$ 使得 q 与嵌入 $i:A\to G$ 的合成是 A 的极化。

证. 任取 G 上的丰富可逆层 $\mathcal{L}_0$, 则 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0|_A$ 为 A 上的丰富可逆层。令

$$\mathcal{M}_0=m_G^*\mathcal{L}_0\otimes_{O_{G\times_k G}}\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}_0^{-1}\otimes_{O_{G\times_k G}}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}_0^{-1} \tag{1}$$

则 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0|_{A\otimes_k G}$ 诱导一个 k-态射 $q: G \to \hat{A}$ 使得

$$(\mathrm{id}_A \times_k q)^* \mathcal{P}^0_{A/k} \cong \mathcal{M} \tag{2}$$

由引理 7 可知 q 是同态。易见 $q|_A = \phi_{\mathcal{L}}$。证毕。

习题

1. 设 k 为一般域。证明 $\mathbb{G}_{m/k}$ 仅有两个自同构，分别为单位自同构和 ι (即 $x \mapsto x^{-1}$)。

2. 将 $\mathbb{G}_{a/k}$ 的自同构群看作 $\mathcal{A}ut(\mathbb{P}^1_k/k)$ 的一个闭子群概形 H (参看定理 Ⅸ.3.1)。证明 $H \cong \mathbb{G}_{m/k}$。

3. 设 G 为特征 0 的域 k 上的群簇。令 $\phi: G \to GL_{\mathcal{L}ie(G/k)/k}$ 为 G 在自身上的共轭作用所诱导 G 在 $\mathcal{L}ie(G/k)$ 上的 $\mathbb{A}^1_k$-线性作用所对应的同态 (参看命题 Ⅲ.3.2 及引理 1.v))。证明 $\ker(\phi) = C(G)$。

第 2 节　有限型群概形的结构

1. 有理作用

研究一般的有限型群概形的结构经常遇到双有理几何的问题，下面做一些预备 (参看 Ⅱ.2 节)。以下所涉及的态射都是分离的。对一个域 k 记 $\bar{k}$ 为其代数闭包。

定义 1. 设 G 为域 k 上的有限型几何约化群概形，X 为有限型几何约化 k-概形。一个 G 在 X 上的*有理作用* (*rational action*) 是指一个 k-有理映射 $\rho: G \times_S X \dashrightarrow X$，在包含 $\{e_G\} \times_k X$ 的一个稠密开子概形上为态射，满足 (有理映射的等式)

i) $\rho \circ (\mathrm{id}_G \times_k \rho) = \rho \circ (m \times_k \mathrm{id}_X) : G \times_k G \times_k X \dashrightarrow X$;

ii) $\rho \circ (o \times_k \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X : X \cong k \otimes_k X \dashrightarrow X$。

仍记

$$\alpha = \alpha_{G,X} = (\rho, \mathrm{pr}_2) : G \times_k X \dashrightarrow X \times_k X \tag{1}$$

若 α 在 $G \times_k X$ 的一个稠密开子概形上的限制是局部闭嵌入，则称 ρ 是**一般自由的** (*generically free*)；若 α 是支配态射，则称 ρ 是**一般可迁的** (*generically transitive*)。

由引理 Ⅱ.2.1 的讨论，易见 ρ 等价于一个 $G \times_S X$ 到自身的的一个 G-双有理等价 $\Phi = \Phi_\rho$，在包含 $\{e_G\} \times_k X$ 的一个稠密开子概形上为态射，满足 (有理映射的等式)

$$\mathrm{id}_m \times_G \Phi = (\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_1} \times_G \Phi) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2} \times_G \Phi) : G \times_k G \times_k X \dashrightarrow G \times_k G \times_k X \tag{2}$$

仿照 Ⅱ.2 节可见，若 $\rho : G \times_k X \dashrightarrow X$ 为 G 在 X 上的有理作用，$\phi : G' \to G$ 为有限型几何约化 k-群概形的同态，则 ϕ 诱导一个 G' 在 X 上的有理作用 $\rho \circ (\phi \times_S \mathrm{id}_X) : G' \times_S X \dashrightarrow X$。设 $f : X \dashrightarrow Y$ 为有限型几何约化 k-概形的支配有理映射，$\rho_X : G \times_k X \dashrightarrow X$ 和 $\rho_Y : G \times_k Y \dashrightarrow Y$ 分别为 G 在 X 和 Y 上的有理作用，如果 $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ (\mathrm{id}_G \times_k f) : G \times_k X \dashrightarrow Y$，则称 G 在 X 和 Y 上的有理作用与 f 相容。

引理 1. 设 G 为域 k 上的有限型几何约化群概形，X 为有限型几何约化 k-概形，$\rho : G \times_S X \dashrightarrow X$ 为 G 在 X 上的有理作用。

i) 令 $\Xi \subset X$ 为所有一般点组成的约化仿射概形，则 ρ 诱导 G 在 Ξ 上的一个作用。此外，若 ρ 是一般自由的，则 α 诱导的态射 $G \times_k \Xi \to \Xi \times_k \Xi$ 是局部闭嵌入；若 ρ 是一般可迁的，则 α 诱导的态射 $G \times_k \Xi \to \Xi \times_k \Xi$ 是平坦支配的。

ii) 若 X 是仿射簇，则可取射影簇 $\bar{X}$ 包含 X 作为稠密开子簇，使得 ρ 可以扩张为 G 在 $\bar{X}$ 上的有理作用。

证． i) 由定义易见存在 G 的稠密开子概形 U_0 使得 ρ 诱导 k-态射 $\rho_0 : U_0 \times_k \Xi \to \Xi$。令 $U_1 = U_0 \times_k U_0$，$\rho_1 = \rho_0 \circ (\mathrm{id}_{U_0} \times_k \rho_0) : U_1 \times_k \Xi \to \Xi$。由命题 Ⅱ.1.1.i) 可见 $m_G : U_1 = U_0 \times_k U_0 \to G$ 是忠实平坦的，令 $U_2 = U_1 \times_G U_1$，易见 U_2 同构于 $G \times_k G \times_k G$ 的一个开子概形，故为几何约化的。由 ρ 是

有理作用可见作为有理映射

$$\rho_1 \circ \mathrm{pr}_{13} = \rho_1 \circ \mathrm{pr}_{23} : U_2 \times_k \Xi \dashrightarrow \Xi \tag{3}$$

由 U_2 约化可见 $\rho_1 \circ \mathrm{pr}_{13}$ 和 $\rho_1 \circ \mathrm{pr}_{23}$ 作为态射也是相等的, 而由命题 V.1.1 可知 G 是 pr_1 和 $\mathrm{pr}_2 : U_2 \to U_1$ 的推出, 故 ρ_1 诱导一个 k-态射 $\rho_2 : G \times_k \Xi \to \Xi$。注意 ρ_2 作为有理映射与 ρ 在 $G \times_k \Xi$ 上的限制相等, 再由 $G \times_k \Xi$ 是约化的即可见 ρ_2 是作用。

后两个断言是显然的。

ii) 设 $X = \mathrm{Spec} R$, 取 R 作为 k-代数的一组生成元 $a_1, ..., a_n$ 并令 $M = R \oplus Ra_1 \oplus \cdots \oplus Ra_n$, 则 X 可以嵌入 $\mathbb{P}(M) \subset \mathbb{P}^n_X$ 作为局部闭子簇, 其闭包 $\bar{X} \subset \mathbb{P}(M)$ 为射影簇。将 ρ 看作有理映射 $G \times_k \bar{X} \dashrightarrow \bar{X}$, 由定义只需验证 ρ 在 $\{e_G\} \times_k \bar{X}$ 附近为态射即可。对任一点 $x \in \bar{X} - X$, 至少有一个齐次坐标 a_i 在 x 附近取非零值, 由于 $b_i = \rho^*(a_i)$ 满足 $(o^* \otimes_k \mathrm{id})(b_i) = a_i$, 存在包含 (e_G, x) 的开集 $U \subset G \times_k \bar{X}$ 使得 b_i 在 U 上取非零值, 故 ρ 在 U 上为态射。证毕。

引理 2. 代数闭域上的任意非紧致群簇有非零线性子群簇。

证. 设 G 为代数闭域 k 上的非紧致群簇。对 $n = \dim(G)$ 用归纳法, 当 $n = 1$ 时由推论 1.1 立得。

设 $n > 1$。任取 G 的仿射开覆盖 $U_1, ..., U_r$, 并将每个 U_i 嵌入一个射影簇 X_i 作为开子簇, 则嵌入 $U_i \to G$ 给出 X_i 到 G 的一个有理映射 f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$。令 $X \subset X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ 为 $(f_1, ..., f_r) : U_1 \cap \cdots \cap U_r \to X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ 的像闭包, 则有诱导有理映射 $f : X \dashrightarrow G$, 它在 $V_i = \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ 上的限制等于 pr_i 与嵌入 $U_i \to G$ 的合成, 故为态射。令 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$, 则 $f|_V$ 为态射, 但在 $D = X - V$ 的任一点处 f 无定义, 因若 f 在 $x \in D$ 处有定义, 则有 U_i 使得 $f(x) \in U_i$, 从而 $x \in V_i$, 矛盾。由 G 不是紧致的可见 $D \neq \emptyset$, 取爆发 $q : \tilde{X} \to D$ 使 $\tilde{D} = q^{-1}(D)$ 为 $\tilde{X}$ 的除子而 $\tilde{X} - \tilde{D} \cong V$, 再取 $\tilde{X}$ 的正规化代替 $\tilde{X}$ (仍记为 $\tilde{X}$)。

由引理 1.ii) 可知 G 在自身上的左乘作用诱导 G 在 $\tilde{X}$ 上的一个有理作用 ρ。若 ρ 在 $(g, x) \in G \times_k V$ 处有定义则 $gx \in V$, 因为 ρ 与 G 在自身上的左乘作用相容。注意 ρ 在每个高度为 1 的点附近可以定义为态射 (参看 [H, Theorem II.4.7])。故 ρ 诱导 G 在 $\tilde{D}$ 上的一个有理作用 ρ'。

若 ρ' 非平凡, 则可取一个闭点 $x \in \tilde{D}$ 及一个非空开子簇 $U \subset G$ 使得 ρ' 在 $U \times_k \{x\}$ 上有定义且为非平凡作用。易见 $S = \{g \in U | gx = x\}$ 不是有限的, 因若不然 x 的轨迹是 n 维的, 超过 $\dim(\tilde{D})$, 矛盾。故 $d = \dim(S) > 0$, 且由 U 的作用非平凡有 $d < n$。取 S 的一个 d 维连通分支的约化结构 S_0, 易见 S_0 生成一个 d 维闭子群簇 $H \subset G$。若 H 不是紧致的, 则由归纳法可见 H 有非零线性子群簇。若 H 是紧致的, 易见它在 G 中生成的正规子群簇 A 也是紧致的, 从而 G/A (参看命题 VI.1.6) 不是紧致的。由于 $\dim(G/A) < \dim(G)$, 由归纳法假设 G/A 有一个非零线性子群簇 H_0。令 H_1 为 H_0 在 G 中的原像的零分支的约化结构。由推论 VII.4.1 可知 A 是阿贝尔簇, 故 H_1 是拟射影的, 从而由引理 1.8 可知存在 k-群簇同态 $\phi : G \to \hat{A}$ 使得 $\phi|_A : A \to \hat{A}$ 为极化。令 H_2 为 $\ker(\phi)$ 的零分支的约化结构, 则投射 $H_2 \to H_0$ 为有限满同态, 故 H_2 是仿射的, 从而由引理 1.1.vi) 它是线性的。

若 ρ' 平凡, 则可取一个闭点 $x \in \tilde{D}$ 及一个非空开子簇 $U \subset G$ 使得 ρ 在 $U \times_k \{x\}$ 附近有定义, 且对任意闭点 $g \in U$ 有 $\rho(g, x) = x$。令 P 为 $R = O_{\tilde{X},x}$ 的极大理想, 则对任意正整数 m 有 U 在 $R_m = R/P^m$ 上的诱导 (线性) 作用, 易见这可以扩张成为 G 在 R_m 上的一个线性作用 ρ_m。令 $K_m \subset G$ 为 ρ_m 所对应的同态 $G \to GL_{\mathbb{V}(R_m^\vee)/k}$ 的核, 则由 ρ 与 G 在自身上的左乘作用相容可见 $\bigcap_m K_m = 0$, 从而由诺特归纳法可见对充分大的 m 有 $K_m = 0$, 换言之 $G \hookrightarrow GL_{\mathbb{V}(R_m^\vee)/k}$。证毕。

推论 1. 域上的任意有限型群概形是拟射影的。

证. 设 G 为域 k 上的限型群概形。由命题 VI.1.2, 命题 VI.1.5 和引理 VI.1.1 可见只需证明存在有限扩张 $k' \supset k$ 使得 $G \otimes_k k'$ 是 k'-拟射影的, 故不妨设 $k = \bar{k}$。由于 G 的连通分支作为 k-概形都相互同构, 只需考虑 G 连通的情形。若 $\mathrm{ch}(k) = 0$, 则 G 为群簇; 若 $\mathrm{ch}(k) > 0$, 则可取 n 使得 $G/\ker(F^n_{G/k})$ 为群簇, 而 $\ker(F^n_{G/k})$ 是有限的, 故也可约化为 G 是群簇的情形。

令 $A = \Gamma(G, O_G)$, 则由引理 1.2 可知 $G' = \mathrm{Spec} A$ 为 k-群簇, 投射 $q : G \to G'$ 为忠实平坦同态, 且 $H = \ker(q) \subset C(G)$。若 H 不是紧致的, 则由引理 2 可知 H 有非零线性子群簇。由推论 V.3.8 和引理 1.1.vi) 可

见线性群簇通过线性群簇的扩张也是线性群簇，对 $\dim(H)$ 用归纳法即可见存在线性子群簇 $H' \subset H$ 使得 H/H' 是紧致的，从而为阿贝尔簇 (推论 Ⅶ.4.1)。故 H 是拟射影的，从而 G 是拟射影的。证毕。

2. 结构定理

定理 1. 任意域 k 上的有限型群概形为线性群簇、阿贝尔簇、有限平展群概形和无穷小群 (仅当 $\mathrm{ch}(k) > 0$ 时) 的扩张，故为拟射影概形。具体说，一个有限型 k-群概形 G 可以按下述方式分解为上述四类群概形的扩张。

i) G 的零分支 G^0 为 G 的正规子群概形且为几何不可约的，而 G/G^0 是有限平展群概形。

ii) 若 $\mathrm{ch}(k) > 0$，则 G 有有限无穷小子群概形 $H_n = \ker(F^n_{G/k}) \triangleleft G$ $(\forall n)$，且可取 n 使得 G/H_n 为几何约化的。

iii) 若 G 是仿射的，则 G 是线性的，且可分解为线性群簇、有限平展群概形和无穷小群 (仅当 $\mathrm{ch}(k) > 0$ 时) 的扩张。

iv) 令 $A = \Gamma(G, O_G)$，则 $G' = \mathrm{Spec} A$ 为线性 k-群簇，投射 $q : G \to G'$ 为忠实平坦同态，而 $H = \ker(q) \subset C(G^0)$ 且可分解为阿贝尔簇通过线性交换群概形的扩张。

v) 若 G 是群簇，则典范态射 $\mu_G : G \to Alb(G)$ 为忠实平坦同态 (取 $0_{Alb(G)} = \mu_G(e_G)$)，且 $\ker(\mu_G)$ 为线性群概形。

vi) 若 G 是连通的，则存在线性正规子群概形 $H_1 \triangleleft G$ 和正规交换子群概形 $H_2 \subset C(G)$ 使得 $G \cong (H_1 \times_k H_2)/(H_1 \cap H_2)$。

证. i) 如上述。

ii) 约化为 $k = \bar{k}$ 的情形易见。

iii) 由 ii) 和引理 1.1.vi) 立得。

iv) 前一断言由引理 1.2 给出。对后一断言，由 ii) 可约化为 H 是群簇的情形，且由推论 1 的证明可取有限伽罗瓦扩张 $k' \supset k$ 及 k'-线性子群簇 $H_0 \subset H \otimes_k k'$ 使得 $(H \otimes_k k')/H_0$ 为 k'-阿贝尔簇。由推论 V.3.8 可见 $q(H_0) \subset G$ 为线性子群簇且 $H/q(H_0)$ 为阿贝尔簇。

v) 由引理 1.7 可知 μ_G 是同态，而 $\mathrm{im}(\mu_G)$ 是 $Alb(G)$ 的阿贝尔子簇，

故由 $Alb(G)$ 的泛性有 $\mathrm{im}(\mu_G) = Alb(G)$，从而 μ_G 是忠实平坦的。

由 iv) 可取线性子群概形 $H' \subset H = \ker(q) \subset C(G^0)$ 使得 $A = H/H'$ 为阿贝尔簇。注意 $H' \lhd G$，故 G/H' 有闭子群概形 A。由引理 1.8 有满同态 $G/H' \to \hat{A}$，故有满同态 $\phi: G \to \hat{A}$。令 $H_1 = \ker(\phi)$，G' 如 iv)，则诱导同态 $\psi: H_1 \to G'$ 的核等于 $\ker(H \to \hat{A})$，注意 $H \to A$ 是仿射的且 $A \to \hat{A}$ 是有限的，可见 $\ker(\psi)$ 是仿射的，从而 H_1 是仿射的。由 ϕ 经过 $Alb(G)$ 可见 $\ker(\mu_G)$ 也是仿射的，从而是线性的 (引理 1.1.vi))。

vi) 由 ii) 和 v) 可见存在 G 到一个阿贝尔簇 A 的满同态 ϕ_1 使得 $H_1 = \ker(\phi_1)$ 是线性的，而 iv) 中的 G' 给出 $H_2 = \ker(G \to G') \subset C(G)$。由 v) 的证明可见投射 $H_2 \to A$ 是满同态。故 $H_1 \times_k H_2 \to G$ 是满同态。证毕。

由定理 1 可以看出，有很多扩张是直积模有限群概形的商，尤其是 $k = \bar{k}$ 的情形。但交换群簇的情形却不然。

若 G 是阿贝尔簇 A 通过 $\mathbb{G}_{a/k}$ 的扩张，则 G 为 A 上的直线丛，其零截口 $A \to G$ 为同态，故 $G \cong A \times_k \mathbb{G}_{a/k}$。由归纳法可见，若 H 有一个正规群概形列的因子都同构于 $\mathbb{G}_{a/k}$，则任一阿贝尔簇 A 通过 H 的扩张都是平凡的 (即直积)。

但若 G 是阿贝尔簇 A 通过 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的扩张，则 G 未必同构于 A 与 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的直积。为说明这一事实我们需要做一些准备。

设 k 为域，$\bar{k}$ 为 k 的代数闭包。一个 k 上的**环面** (*torus*) 是指一个群簇 G 使得 $G \otimes_k \bar{k} \cong \mathbb{G}^n_{m/\bar{k}}$ $(n = \dim(G))$。

定义 1. 一个 k 上的群簇称为**半阿贝尔簇** (*semi-abelian variety*)，如果它是一个阿贝尔簇通过一个环面的扩张。

例 1. 设 X 为 k 上的阿贝尔簇 (记 $m: X \times_k X \to X$ 为加法)，$\mathcal{L}$ 为 $\mathrm{Pic}^0(X/k)$ 中的一个 2 阶元，则由 (Ⅶ.2.1.10) 和命题 Ⅶ.2.1.1 有

$$m^*\mathcal{L} \cong \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_{X \times_k X}} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}, \quad \iota^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{L} \tag{1}$$

记 $\mathcal{L}' = \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{O_{X \times_k X}} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}$。注意任意两个同构 $\phi, \phi': m^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 相差一个 $\mathcal{L}'$ 的自同构，而

$$\mathrm{Aut}_{O_{X \times_k X}}(\mathcal{L}') \cong \Gamma(X \times_k X, O^*_{X \times_k X}) \cong k^\times \tag{2}$$

如果规定 ϕ 通过 $o \times_k \mathrm{id}_X$ 的拉回为 $\mathrm{id}_{\mathcal{L}}$, 则 ϕ 唯一确定。这就给出一个确定的同构

$$\psi : \mathbb{V}_{X\times_k X}(\mathcal{L}') \xrightarrow{\simeq} \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_m (X \times_k X) \tag{3}$$

记 $q = \mathrm{pr}_1 : \mathbb{V}_{X\times_k X}(\mathcal{L}') \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L})$。同样可以确定一个同构 $\eta : \iota^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, 以及一个同构 $\zeta : o^*\mathcal{L} \to k$。另一方面, 注意 $\mathrm{Sym}_{O_{X\times_k X}}(\mathcal{L}')$ 可以看作 $\mathrm{Sym}_{O_{X\times_k X}}(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L})$ 的子代数层, 故有典范的诱导态射

$$\mu : \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_k \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \cong \mathbb{V}_{X\times_k X}(\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}) \to \mathbb{V}_{X\times_k X}(\mathcal{L}') \tag{4}$$

令 $m' = q \circ \mu : \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_k \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L})$, 并令 $\iota' : \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_\iota X \cong \mathbb{V}_X(\mathcal{L})$ 为 η 诱导的同构, $o' : \mathrm{Spec} k \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L})$ 为 ζ 诱导的态射。则 m', ι', o' 分别与 m, ι, o 相容, 且由 ϕ 的唯一确定性易见有

$$\begin{aligned} & m' \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{V}_X(\mathcal{L})} \times_k m') \\ = & m' \circ (m' \times_k \mathrm{id}_{\mathbb{V}_X(\mathcal{L})}) : \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_k \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \times_k \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L}); \\ & m' \circ (o' \times_k \mathrm{id}_{\mathbb{V}_X(\mathcal{L})}) = m' \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{V}_X(\mathcal{L})} \times_k o') = \mathrm{id}_{\mathbb{V}_X(\mathcal{L})} : \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \end{aligned} \tag{5}$$

这说明 m', o' 给出 $\mathbb{V}_X(\mathcal{L})$ 的一个半群簇结构, 且投射 $\mathbb{V}_X(\mathcal{L}) \to X$ 为半群簇的同态。令 $\epsilon : X \to \mathbb{V}_X(\mathcal{L})$ 为零截口, $Y = \mathbb{V}_X(\mathcal{L}) - \epsilon(X)$, 并记 m_Y, ι_Y, o_Y 分别为 m', ι', o' 在 Y 上的限制, $\pi_Y : Y \to \mathrm{Spec} k$ 为投射。则由 ϕ 和 η 的唯一确定性还可见

$$m_Y \circ (\iota_Y \times \mathrm{id}_Y) \circ \Delta_Y = m_Y \circ (\mathrm{id}_Y \times \iota_Y) \circ \Delta_Y = o_Y \circ \pi_Y : Y \to Y \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 可见 m_Y, ι_Y, o_Y 给出 Y 的一个群簇结构, 使得投射 $q : Y \to X$ 是群簇同态。注意

$$\ker(q : Y \to X) \cong \mathbb{A}_k^1 - \{0\} \cong \mathbb{G}_{m/k} \tag{7}$$

可见 Y 是 X 通过 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的一个扩张, 故为一个半阿贝尔簇。

由 L 不是平凡直线从可见 Y 不同构于 X 和 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的直积, 因若不然, q 的一个截口给出 $L \to X$ 的一个处处非零的截口, 从而给出一个同构 $\mathbb{A}_X^1 \to L$, 矛盾。这说明 Y 是非平凡的半阿贝尔簇。

推论 2. 域上的任意齐性概形是拟射影的。

证. 设 G 为域 k 上的限型群概形, $H \subset G$ 为闭子群概形, 我们来证明 $X = G/H$ 是拟射影的。

情形 1: G 是线性群概形。由引理 1.1.vi) 可取射影概形 Y 使得 G 可嵌入 Y 作为稠密开子概形, 且 G 在自身上的左乘作用可以扩张到 Y 上, 令 $\rho : H \times_k Y \to Y$ 为这个作用的限制。若 G 是约化的, 则易见有一个非空开子集 $U \subset G$ 为 ρ-半稳定的 (见定义 VI.1.2), 故由右平移可见 G 为 ρ-半稳定的, 从而由定理 VI.1.1 可知 G/H 是拟射影的。若 G 不是约化的, 由此也可见 X_{red} 是拟射影的, 从而 X 是拟射影的。

情形 2: 一般情形。由定理 1 可取阿贝尔簇 A 及满同态 $f : G \to A$ 使得 $H_0 = \ker(f)$ 是线性的。注意 $H_1 = H_0 \cap H \triangleleft H$ 且 $H_2 = H/H_1$ 可看作 A 的闭子群概形。由情形 1 可见存在 A 的非空开子集 U 使得 $f^{-1}(U)/H_1$ 在 A 上是拟射影的, 故由右平移可知 G/H_1 在 A 上是拟射影的, 再由命题 VI.1.2 可知 $G/H \cong (G/H_1)/H_2$ 为拟射影的。证毕。

习题

1. 设 k-群概形 G 为 $\mathbb{G}_{m/k}$ 通过 $\mathbb{G}_{m/k}$ 的一个扩张。证明 $G \cong \mathbb{G}_{m/k}^2$。

2. 证明在一个域上, 一个线性群概形通过线性群概形的扩张为线性群概形; 而一个阿贝尔簇通过阿贝尔簇的扩张为阿贝尔簇。

第 XI 章　阿贝尔簇的模空间与曲线的模空间

在第 IV 章中我们看到, 对阿贝尔簇的模空间的研究是模空间理论的起源, 而且是模空间理论中最深刻的部分。本章的主要目的是建立阿贝尔簇模空间的基本理论。

第 1 节　阿贝尔簇的模空间

1. 复解析方法与极化[†]

由 IV.1 节可见, 复椭圆曲线的 (解析) 粗糙模空间可以构造为 $\mathcal{A}_1 = SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$, 其中 $\mathcal{H}$ 为上半复平面, 一个元 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathcal{H}$ 上的作用为 $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$。可取一个给定权的模形式为 $\mathcal{A}_1$ 的齐次坐标, 这给出解析同构 $\mathcal{A}_1 \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$。

将这样的方法推广到高维时遇到一个困难, 简言之无法由维数 $g > 1$ 的阿贝尔簇类似地给出齐次坐标, 实际上在复解析空间的范畴中没有 $g > 1$ 维阿贝尔簇同构类的模空间。另一方面, 如果考虑阿贝尔簇 X 连同一个闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, 则很容易建立模空间, 但一个阿贝尔簇有无穷多个这样的嵌入。我们希望建立一个模空间, 其中的点与 g 维阿贝尔簇的同构类有有限对一的对应, 尽管未必是一一对应。为此可以考虑闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 的数值等价类, 而由命题 VII.2.3.iv) 可见, 这样一个等价类由一个极化决定。

一个阿贝尔簇连同它的一个极化称为一个*极化阿贝尔簇* (*polarized abelian variety*)。由推论 VII.2.2.vi) 可知任一极化的次数为一个平方数, 而下面我们将看到 (由推论 VII.3.2 也不难得到) 对于任一正整数 d, 一个 g 维阿贝尔簇 X 至多只有有限多个 d^2 次极化。故若存在 d^2 次极化阿贝尔簇的模空间, 则其对应于一个阿贝尔簇同构类的点只有有限多个。不过需要注意, 对于给定的 d, 并非每个 g 维阿贝尔簇都有 d^2 次极化, 故只有考虑所有次数的极化才能给出对所有阿贝尔簇的同构分类。若 $d = 1$, 则

[†]本段的内容仅是为了说明阿贝尔簇模空间理论的起源和原始思想, 读者可以略过而不影响一般情形的模空间的建立。

称一个带有 $d^2 = 1$ 次极化的阿贝尔簇为一个主极化阿贝尔簇 (*principally polarized abelian variety*)。

由复阿贝尔簇的解析理论可知 (参看推论 Ⅶ.5.1), 一个阿贝尔簇的 d^2 次极化等价于一个黎曼型, 其行列式等于 d^2。因此, 极化复阿贝尔簇的分类可以转化为黎曼型的等价分类。两个 $\mathbb{C}^g$ 中的黎曼型 H, H' 称为等价的, 如果存在 $\gamma \in SL_g(\mathbb{C})$ 使得 $H' = H \circ (\gamma \times \gamma)$。仿照 1 维的情形可以推广模形式以建立复阿贝尔簇模空间的齐次坐标。推广的模形式称为西格尔模形式, 下面我们作一个简单介绍。

设 $\Lambda \subset V = \mathbb{R}^{2g}$ 为一个格, E 为 V 上的非退化 $\mathbb{R}$-交错形式使得 $E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$, 则可取一组 Λ 的生成元作为 V 的基使得 E 的矩阵形如 $\begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $e = \operatorname{diag}(e_1, ..., e_g)$, e_i 为正整数且 $e_1|e_2|\cdots|e_g$ (与生成元的选取无关)。我们称 e 为 E 在 Λ 上的类型, 而称 $(e_1 \cdots e_g)^2$ 为 E 的次数。令

$$Sp(V, E) = \{\gamma \in GL(V) | E(\gamma x, \gamma y) = E(x, y)\} \tag{1}$$

而记

$$Sp(\Lambda, E) = \{\gamma \in Sp(V, E) | g\Lambda = \Lambda\} \tag{2}$$

在 V 上给出一个复结构等价于给出一个 $J \in GL(V)$ 使得 $J^2 = -I$。令

$$\mathfrak{S}(V, E) = \{J \in GL(V) | J^2 = -I, E(x, Jy) \text{ 正定对称}\} \tag{3}$$

称为"西格尔上半空间", 其中的一个点对应于一个 $\mathbb{C}^g \cong V$ 上的非退化实交错型 E 使得 $E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ 且 $E(x, iy)$ 是正定对称的, 即一个黎曼型, 它等价于一个极化阿贝尔簇 (见推论 Ⅶ.5.1)。

易见 $Sp(V, E)$在 $\mathfrak{S}(V, E)$ 有一个共轭作用。我们称 $Sp(\Lambda, E)\backslash\mathfrak{S}(V, E)$ 为西格尔模空间。

注意

$$\begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$$

可见西格尔模空间对不同的 E 是同构的。故为研究其结构只需考虑 $e = I_g$ 的情形。

将 V 复化，即考虑 $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，则 E 给出 $V_{\mathbb{C}}$ 上的一个厄密特形式 $h_E(u,v) = iE(\bar{u}, v)$（为简单起见我们将 E 在 $V_{\mathbb{C}}$ 上的扩张仍记为 E）。任一复结构 $J \in \mathfrak{S}(V,E)$ 给出一个分解

$$V_{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V_- \tag{4}$$

其中 V_+ 和 V_- 分别是 $J_{\mathbb{C}} = J \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ 的对应于特征值 i 和 $-i$ 的特征空间（都是 n 维的）。对任意 $u, v \in V_-$，$E(u, J_{\mathbb{C}}v) = -iE(u,v)$ 既是对称的又是反对称的，故有 $E(u,v) = 0$；令 $u = x + iy$ $(x, y \in V)$，则有 $h_E(u,u) = iE(\bar{u}, u) = -E(\bar{u}, J_{\mathbb{C}}u) = -E(x, J_{\mathbb{C}}x) - E(y, J_{\mathbb{C}}y)$，故 h_E 在 V_- 上的限制是负定的。反之，若有一个分解 (4) 使得 $E|_{V_- \times V_-} = 0$ 且 $h_E|_{V_- \times V_-}$ 为负定，则在 $V_{\mathbb{C}}$ 上可以定义一个 $J_{\mathbb{C}}$ 使得 $J_{\mathbb{C}}|_{V_+} = iI$，$J_{\mathbb{C}}|_{V_-} = -iI$，不难验证 $J_{\mathbb{C}}$ 由一个 $J \in \mathfrak{S}(V,E)$ 给出。这样我们得到一个嵌入 $\eta : \mathfrak{S}(V,E) \hookrightarrow \mathbb{G}_{2g-1,g}$，$J \mapsto \{V_- \subset V_{\mathbb{C}}\}$。

取定一个 $J_0 \in \mathfrak{S}(V,E)$，令 V_+ 和 V_- 分别为 $J_{0\mathbb{C}}$ 的对应于特征值 i 和 $-i$ 的特征空间。不难验证一个点 $W \in \mathbb{G}_{2g-1,g}$ 在 $\mathrm{im}(\eta)$ 中当且仅当 $W = \binom{Z}{I_n} V_-$，其中 $Z \in M_n(\mathbb{C})$，$Z = {}^tZ$，$I_n - Z\bar{Z}$ 正定。特别地，$\mathfrak{S}(V,E)$ 有一个自然的复流形结构。而 $Sp(V,E)$ 在 $\mathfrak{S}(V,E)$ 的共轭作用在 $\mathrm{im}(\eta)$ 中的表达形式为 $(\gamma, W) \mapsto \gamma W$ $(\gamma \in \mathfrak{S}(V,E),\ W \in \mathrm{im}(\eta))$。由此不难验证 $Sp(V,E)$ 在 $\mathfrak{S}(V,E)$ 的作用是可迁的。此外，$\mathfrak{S}(V,E)$ 解析同构于 $\mathfrak{S}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) | Z = {}^tZ, \mathrm{Im}(Z)\ 正定\}$，这个同构将 $Z \in \mathfrak{S}_g$ 映到 $\begin{pmatrix} -I_g & Z \\ -I_g & \bar{Z} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} iI_g & 0 \\ 0 & -iI_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_g & Z \\ -I_g & \bar{Z} \end{pmatrix}$，而 $Sp(\Lambda, E) \cong Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ 在 $\mathfrak{S}_g$ 上的作用为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$。特别地，$Sp(\Lambda, E)$ 在 $\mathfrak{S}(V,E)$ 的共轭作用是解析的。

对任一 $\gamma \in GL_{2n}(\mathbb{Z})$，令 $j(\gamma, Z)$ 为解析映射 $Z \mapsto \gamma Z$ 的雅可比行列式。一个 $\mathfrak{S}_g$ 上的解析函数 f 称为一个权为 w 的西格尔模形式，如果 $f(\gamma Z) j(\gamma, Z)^w = f(Z)$ 对一切 $\gamma \in Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ 成立。注意 $j(\gamma, \gamma' Z) j(\gamma', Z) = j(\gamma\gamma', Z)$，我们有权为 $w > 0$ 的艾森斯坦级数

$$E_w(Z) = \sum_{\gamma \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})} j(\gamma, Z)^w \tag{5}$$

此外对任意权为 w 的西格尔模形式 f 及任意 $\gamma \in GL_{2g}(\mathbb{Z})$ 使得 $\gamma(\mathfrak{S}_g) = \mathfrak{S}_g$，$f_\gamma(Z) = f(\gamma Z) j(\gamma, Z)^w$ 也是一个权为 w 的西格尔模形式。两个权

为 w 的模形式之比可以看作 $Sp(\Lambda, E)\backslash\mathfrak{S}(V, E)$ 上的一个半纯函数。和 $n = 1$ 的情形类似, 可以将西格尔模形式展成傅里叶级数。

以给定权的西格尔模形式为齐次坐标即可建立复阿贝尔簇的粗糙模空间。注意这样建立的是黎曼型的模空间, 等价于极化阿贝尔簇的模空间。

2. 阿贝尔簇的目录空间

设域 k 上的 g 维阿贝尔簇 X 有丰富可逆层 $\mathcal{L}$, 则由推论 Ⅶ.2.2 有

$$\deg(\phi_{\mathcal{L}}) = \chi(\mathcal{L})^2 = h^0(\mathcal{L})^2 \tag{1}$$

且对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$h^0(\mathcal{L}^n) = \chi(\mathcal{L}^n) = \deg(\mathcal{L})n^g \tag{2}$$

故若 $\chi(\mathcal{L}) = d$ 则有

$$\chi_{\mathcal{L}}(x) = dx^g \tag{3}$$

而由命题 Ⅶ.2.6 可知 $\mathcal{L}^3$ 是极丰富的, 注意由 (2) 有 $h^0(\mathcal{L}^3) = 3^g d$, 因此可将 X 嵌入 $\mathbb{P}_k^{3^g d-1}$ 作为闭子概形, 而由 (3) 有 $\chi_{\mathcal{L}^3} = 3^g dx^g$, 故由定理 Ⅳ.2.1 可知 X 对应于

$$\mathcal{H}_{g,d} = \mathcal{H}ilb^{3^g dx^g}_{\mathbb{P}^{3^g d-1}} \tag{4}$$

的一个 k-点。令 $\mathcal{H}^0_{g,d} \subset \mathbb{P}^{3^g d-1} \times \mathcal{H}_{g,d}$ 为 $\mathcal{H}_{g,d}$ 上的泛子概形, 则由定理 Ⅳ.2.2.iii) 可知 $\mathcal{H}^0_{g,d}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{\mathbb{P}_T^{3^g d-1} \text{ 中具有希尔伯特多项式 } 3^g dx^g \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形连同 1 个截口}\}$$

对任意 $n \geqslant 0$ 令 $\mathcal{H}^n_{g,d}$ 为 $n+1$ 个 $\mathcal{H}^0_{g,d}$ 的拷贝在 $\mathcal{H}_{g,d}$ 上的纤维积, 则由定理 Ⅳ.2.2.iii) 可知 $\mathcal{H}^{n-1}_{g,d}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{\mathbb{P}_T^{3^g d-1} \text{ 中具有希尔伯特多项式 } 3^g dx^g \text{ 的 } T\text{-平坦闭子概形连同 } n \text{ 个截口}\}$$

而 $\mathcal{H}^n_{g,d} \subset \mathbb{P}^{3^g d-1} \times \mathcal{H}^{n-1}_{g,d}$ 为 $\mathcal{H}^{n-1}_{g,d}$ 上的泛子概形。

设 V 为 $\mathcal{H}^0_{g,d}$ 的一个连通分支，则有一个极大开子概形 $U \subset V$ 使得 $U_1 = \mathcal{H}^1_{g,d} \times_{\mathcal{H}^0_{g,d}} U$ 在 U 上光滑。若有 V 的一个几何点上 U_1 的纤维为阿贝尔簇（以泛截口为零），则由定理 IX.4.1 可见 $U_1 \to U$ 为阿贝尔概形。此外注意任意域上的阿贝尔簇可以变形到特征 0 的域上的阿贝尔簇。总之有

命题 1. 对任意 $g, d > 0$，存在 $\mathcal{H}^0_{g,d}$ 的一个 $\mathbb{Z}$-平坦开子概形 $\mathcal{H}'_{g,d}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{\mathbb{P}^{3^g d-1}_T \text{ 中具有希尔伯特多项式 } 3^g d x^g \text{ 的 } T\text{-阿贝尔概形}\}$$

其上的泛阿贝尔概形为

$$\mathcal{H}'^1_{g,d} = \mathcal{H}^1_{g,d} \times_{\mathcal{H}^0_{g,d}} \mathcal{H}'_{g,d} \subset \mathbb{P}^{3^g d-1} \times \mathcal{H}'_{g,d} \tag{5}$$

且任一代数闭域 k 上带有的 d^2 次极化 ϕ 的 g 维阿贝尔簇 X 同构于一个 k-点 $s \in \mathcal{H}'_{g,d} \otimes k$ 上的纤维 $(\mathcal{H}'^1_{g,d})_s \subset \mathbb{P}^{3^g d-1}_k$，满足 $\phi_{O_X(1)} = 3\phi$。

设 S 为连通诺特概形，X 为相对维数 g 的 S-阿贝尔概形。令 $\tau : \mathcal{P}ic(X/S) \to S$ 为投射，ρ 为 $\hat{X}$ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 上的平移作用。易见有

$$\rho \circ (3_{\hat{X}/S} \times_S 3_{\mathcal{P}ic(X/S)/S}) = 3_{\mathcal{P}ic(X/S)/S} \circ \rho \tag{6}$$

注意 ρ 在 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的每个连通分支上的限制是可迁的，而 $3_{\hat{X}/S}$ 是满自同态。若 V 是 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的一个连通分支，则 $3_{\mathcal{P}ic(X/S)/S})(V)$ 包含于 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的某个连通分支 W 中，故由 (6) 可见 $3_{\mathcal{P}ic(X/S)/S})(V)$ 作为集合等于 W。因此对 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的任一连通分支 W，若存在 W 的几何点 s 使得 $X_{\tau(s)}$ 上的可逆层 $(\mathcal{P}_{X/S})_s$ 能被 3 整除，则对 W 的任意几何点 t，$X_{\tau(t)}$ 上的可逆层 $(\mathcal{P}_{X/S})_t$ 也能被 3 整除。这样就有一个极大闭子概形 $D \subset \mathcal{P}ic(X/S)$ 使得 $\phi_{\mathcal{P}_{X/S}} : X \times_S \mathcal{P}ic(X/S) \to \hat{X} \times_S \mathcal{P}ic(X/S)$ 在 $X \times_S D$ 上的限制能被 3 整除。

由此可见在 $\mathcal{H}'_{g,d}$ 中有一个极大闭子概形 $\mathcal{B}_{g,d}$ 使得 $\phi_{O_{\mathcal{H}'^1_{g,d}}(1)}$在 $\mathcal{B}^1_{g,d} = \mathcal{H}'^1_{g,d} \times_{\mathcal{H}'_{g,d}} \mathcal{B}_{g,d}$ 上的限制能被 3 整除，从而给出 $\mathcal{B}^1_{g,d}$ 的一个 d^2 次极化 $\phi_{\mathcal{B}_{g,d}} = \frac{1}{3}\phi_{O_{\mathcal{B}^1_{g,d}}(1)}$。这样由命题 1 就得到

推论 1. 对任意 $g, d > 0$, 存在 $\mathcal{H}^0_{g,d}$ 的一个 $\mathbb{Z}$-平坦局部闭子概形 $\mathcal{B}_{g,d}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$\mathfrak{B}_{g,d} : T \mapsto \{\mathbb{P}_T^{3^g d-1} \text{ 中具有希尔伯特多项式 } 3^g dx^g \text{ 的闭 } T\text{-阿贝尔子概形,带有 } d^2 \text{ 次极化 } \tfrac{1}{3}\phi_{O(1)}\}$$

其上的泛阿贝尔概形为

$$\mathcal{B}^1_{g,d} = \mathcal{H}^1_{g,d} \times_{\mathcal{H}^0_{g,d}} \mathcal{B}_{g,d} \subset \mathbb{P}^{3^g d-1} \times \mathcal{B}_{g,d} \tag{7}$$

而泛极化为 $\phi_{\mathcal{B}_{g,d}} = \frac{1}{3}\phi_{O_{\mathcal{B}^1_{g,d}}(1)}$。

因此 $\mathcal{B}_{g,d}$ 可以看作 d^2 次极化 g 维阿贝尔簇的一个目录空间。

3. 商的障碍和标高结构

对于一个代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇 X, 一个 d^2 次极化 $\phi = \phi_{\mathcal{L}}$ 由 $\mathcal{L}$ 的数值类 $[\mathcal{L}]$ 决定, 而 $[\mathcal{L}]$ 对应于 $\mathcal{P}ic(X/k)$ 的一个连通分支 $V_{\mathcal{L}}$ $(\cong \hat{X})$。因此 (X, ϕ) 到 P_k^m 的一个闭嵌入等价于一个 $\mathcal{L}' \in V_{\mathcal{L}}(k)$ 连同 $H^0(X, \mathcal{L}'^3) \cong k^{m+1}$ $(m = 3^g d - 1)$ 的一组 k-基模 k^* 的商。由此可见所有这些闭嵌入组成 $V_{\mathcal{L}}$ 上的一个拟射影从 $q : U \to V_{\mathcal{L}}$, 而 $PG_{m+1/k}$ 可迁地作用于 q 的每个纤维上。因此 $U/PG_{m+1/k} \cong V_{\mathcal{L}}$。注意由例 Ⅵ.1.8 可见 $PGL_{m+1/k}$ 在 U 上的作用是半稳定的。

但 (X, ϕ) 到 P_k^m 的两个不同的闭嵌入可能对应于 $\mathcal{B}_{g,d}$ 的同一个几何点, 即它们有相同的像。两个这样的闭嵌入相差 (X, ϕ) 的一个自同构。这也可以理解为投射 $q_0 : U \to \mathcal{B}_{g,d} \otimes k$ 不是单射。对于一个 k-点 $s \in \mathrm{im}(q_0)$ 令 $H_s \subset PG_{m+1/k}$ 为 s 的安定子群概形, 则 H_s 为有限离散群概形 (参看习题 Ⅸ.2.3), 而 $\deg(q_0^{-1}(s)/k) = \deg(H_s/k)$。

令 ρ 为 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{P}^m$ 上的作用所诱导的在 $\mathcal{B}_{g,d}$ 上的作用, 它与 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}k}$ 在 U 上的作用相容。由于阿贝尔簇的自同构群大小不同, ρ 的安定子在 $\mathcal{B}_{g,d}$ 上未必是平坦的, 从而在 $g > 1$ 时几何泛商 $\mathcal{B}_{g,d}/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 不一定存在。更严重的问题是即使 $\mathcal{B}_{g,d}/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 存在, $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathcal{B}^1_{g,d}$ 上的作用的商并不是 $\mathcal{B}_{g,d}/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 上的阿贝尔概形, 因为一个阿

贝尔簇模一个有限非零自同构群的商不是阿贝尔簇 (参看习题 IX.1.7)。这就是极化阿贝尔簇没有精细模空间的一个实质性的原因。

为消解这一障碍, 可以对 (X,ϕ) 再加一点结构。注意对 X 的任一自同构 f 及任意整数 n 均有 $f(X[n])=X[n]$。

引理 1. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, f 为 X 的有限阶自同构。如果存在 $n\geqslant 3$ 使得 $f|_{X[n]}=\mathrm{id}_{X[n]}$, 则 $f=\mathrm{id}_X$。

证. 由所设有 $(f-\mathrm{id}_X)|_{X[n]}=0$, 故 $f-\mathrm{id}_X$ 经过 n_X, 换言之存在 $\psi\in\mathrm{End}(X/k)$ 使得 $f-\mathrm{id}_X=n\psi$, 即

$$f=\mathrm{id}_X+n\psi \tag{1}$$

只需证明 $\psi=0$, 用反证法, 设 $\psi\neq 0$, 则对任意素数 p, 存在非负整数 r 使得 $p^r|\psi$ 而 $p^{r+1}\nmid\psi$ (见习题 VII.1.3)。由所设存在正整数 m 使得 $f^m=\mathrm{id}_X$, 将 (1) 代入得

$$\mathrm{id}_X=(\mathrm{id}_X+n\psi)^m=\mathrm{id}_X+mn\psi+\cdots+n^m\psi^m \tag{2}$$

由此得

$$-mn\psi=\binom{m}{2}n^2\psi^2+\cdots+n^m\psi^m \tag{3}$$

若 n 有一个素因子 $p>2$, 取 $r\geqslant 1,s$ 使得 $p^r\parallel n\psi$, $p^s\parallel m$, 则易见 (3) 的右边各项均被 p^{2r+s} 整除, 但左边不被 p^{r+s+1} 整除, 由 $2r+s\geqslant r+s+1$ 得到矛盾。若 n 没有大于 2 的素因子, 则由 $n\geqslant 3$ 有 $4|n$, 取 $r\geqslant 2,s$ 使得 $2^r\parallel n\psi$, $2^s\parallel m$, 则易见 (3) 的右边各项均被 2^{2r+s-1} 整除, 但左边不被 2^{r+s+1} 整除, 由 $2r+s-1\geqslant r+s+1$ 仍得到矛盾。证毕。

由命题 IX.1.2 可知 $\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/k)$ 是平展的, 故由引理 1 和命题 IX.1.2 立得

推论 2. 设 X 为域 k 上的阿贝尔簇, G 为有限 k-群概形, ρ 为 G 在 X 上的同构作用 (即 $(\mathrm{pr}_1,\rho):G\times_k X\to G\times_k X$ 为 G-阿贝尔概形自同构)。如果存在整数 $n\geqslant 3$ 使得 ρ 在 $X[n]$ 上的限制为平凡作用, 则 ρ 为平凡作用。

设 X 为代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇, n 为正整数使得 $\mathrm{ch}(k) \nmid n$, 则由 (Ⅶ.1.2.14) 有一个同构

$$\lambda_n : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \xrightarrow{\simeq} X[n] \tag{4}$$

由引理 1 可见, 如果对 X 加上这样一个固定的同构 λ_n $(n \geqslant 3)$, 则可以避免 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 的作用的非平凡安定子。因此我们定义

定义 1. 对任意正整数 n, 一个相对维数 g 的阿贝尔概形 $X \to S$ 的一个标高 n- 结构 (*level n-structure*) 是指一个有限群概形同构 $\lambda_n : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g} \to X[n]$ (如果存在的话)。

由引理 1 立得

推论 3. 设 X 为诺特连通概形 S 上相对维数 g 的阿贝尔概形, 带有一个标高 n-结构 λ_n $(n \geqslant 3)$。则对任意正整数 m 及给定的零截口 $S \to \mathbb{P}_S^m$, 典范映射

$$\{S\text{-闭嵌入 } X \to \mathbb{P}_S^m\} \to \{\text{闭 } S\text{-阿贝尔子概形 } X' \subset \mathbb{P}_S^m \text{ 带有标高 } n\text{-结构 } \lambda'_n \text{ 使得 } (X, \lambda_n) \cong (X', \lambda'_n)\}$$

为一一对应。

对任意诺特概形 S 记 $\mathfrak{B}_{g,d,n}(S)$ 为所有 $\mathfrak{B}_{g,d}(S)$ 中的元连同一个标高 n-结构组成的集合, 易见这给出 $\mathfrak{Sch}$ 上的一个预层 $\mathfrak{B}_{g,d,n}$。注意一个阿贝尔概形 $X \to S$ 的一个标高 n-结构等价于 $2g$ 个截口 $s_i : S \to X$ $(1 \leqslant i \leqslant 2g)$, 满足条件 $ns_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 2g)$ 及 $X[n] \subset \{s_1, ..., s_{2g}\}$ (所有 $\mathbb{Z}$-线性组合 $\sum_{i=1}^{2g} n_i s_i$ $(0 \leqslant n_1, ..., n_{2g} < n)$ 给出的 X 的闭子概形)。故由定理 Ⅳ.2.2.iii) 和推论 1 得

命题 2. 对任意 $g, d, n > 0$, 存在 $\mathcal{H}_{g,d}^{2g}$ 的一个 $\mathbb{Z}$-平坦局部闭子概形 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层 $\mathfrak{B}_{g,d,n}$, 其上的泛阿贝尔簇为

$$\mathcal{B}_{g,d,n}^1 = \mathcal{H}_{g,d}^{2g+1} \times_{\mathcal{H}_{g,d}^{2g}} \mathcal{B}_{g,d,n} \subset \mathbb{P}^{3^g d-1} \times \mathcal{B}_{g,d,n} \tag{5}$$

泛极化为 $\phi_{\mathcal{B}_{g,d,n}} = \frac{1}{3}\phi_{O_{\mathcal{B}_{g,d,n}^1}(1)}$, 而泛标高 n-结构 $\lambda_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$ 由后 $2g$ 个泛截口 $\mathcal{B}_{g,d,n} \to \mathcal{B}_{g,d,n}^1$ 给出。

注意若素数 $p|n$, 则 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 没有特征 p 的点。

设 X 为代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇, 带有一个 d^2 次极化 $\phi=\phi_{\mathcal{L}}$ 和一个标高 n-结构 $(n\geqslant 3)$。由推论 1 可知, X 到 $\mathbb{P}_k^m$ 的不同嵌入对应于 $\mathcal{B}_{g,d,n}\otimes k$ 的不同闭点, 故投射 $q_n: U\to\mathcal{B}_{g,d,n}\otimes k$ 是单射 (U 如上所述)。令 $U'=\mathrm{im}(q_n)\cong U$, 则 $PG_{m+1/k}$ 作用于 U' 上, 且与其在 U 上的作用一致。故 $U'/PG_{m+1/k}\cong U/PG_{m+1/k}\cong V_{\mathcal{L}}$。

4. 极化标高阿贝尔簇的精细模空间

设 V 为 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 的一个连通分支 $(n\geqslant 3)$, $\mathcal{X}$ 为 V 上的泛阿贝尔概形。则泛极化 $\phi_V=\frac{1}{3}\phi_{O_{\mathcal{X}}(1)}:\mathcal{X}\to\hat{\mathcal{X}}$。注意 $O_{\mathcal{X}}(1)$ 由泛嵌入 $\mathcal{X}\hookrightarrow\mathbb{P}_V^m$ 给出, 而 $\lambda_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$ 的限制给出 (泛) 标高 n-结构 $\lambda_V:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_V^{2g}\to\mathcal{X}[n]$。

令 ρ_V 为 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{P}^m$ 上的作用所诱导的在 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 上的作用, 则由推论 3 和例 Ⅵ.1.8 可见 V 是 ρ_V-半稳定的, 故存在几何泛商 $V/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$。令 $W=V\times_{\mathcal{B}_{g,d,n}}\mathcal{B}_{g,d,n}^1$, 则 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 W 上的诱导作用与 ρ_V 相容, 而由 $W\to V$ 的忠实平坦性可见 W 也是 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$-半稳定的, 故存在几何泛商 $W/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$。由于 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathcal{B}_{g,d,n}^1$ 上的作用为阿贝尔概形的同构作用, 投射 $W/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}\to V/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 具有诱导的阿贝尔概形结构。由 $W\to V$的零截口可见$PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$在W上的作用可以提升到 $\mathbb{V}_W(O_W(1))$ 上, 故存在几何泛商 $\mathbb{V}_W(O_W(1))/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$, 它是 $W/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 上的直线从, 从而给出 $W/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 的一个极化, 其次数显然为 d^2。此外, 易见 λ_V 诱导 $W/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 的一个标高 n-结构。总之有

命题 3. 对任意 $g,d>0$ 和 $n\geqslant 3$, $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 和 $\mathcal{B}_{g,d,n}^1$ 上的诱导作用均有泛几何商, 商均为有限型平坦 $\mathbb{Z}$-概形, 且 $\mathcal{C}_{g,d,n}^1=\mathcal{B}_{g,d,n}^1/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 为 $\mathcal{C}_{g,d,n}=\mathcal{B}_{g,d,n}/PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 上的阿贝尔概形。此外, 在 $\mathcal{C}_{g,d,n}^1$ 上有一个可逆层 $\mathcal{L}_{g,d,n}$ 使其在 $\mathcal{B}_{g,d,n}^1$ 上的拉回同构于 $O_{\mathcal{B}_{g,d,n}^1}(1)$, 而 $\phi_{\mathcal{C}_{g,d,n}}=\frac{1}{3}\phi_{\mathcal{L}_{g,d,n}}$ 为 $\phi_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$ 所诱导的 $\mathcal{C}_{g,d,n}^1$ 的一个 d^2 次极化; $\lambda_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$ 诱导 $\mathcal{C}_{g,d,n}^1$ 的一个标高 n-结构 $\lambda_{\mathcal{C}_{g,d,n}}$, 由后 $2g$ 个截口 $\mathcal{C}_{g,d,n}\to\mathcal{C}_{g,d,n}^1$ 给出。

为了得到极化标高阿贝尔簇的模空间，我们需要将对应于同一个极化的所有可逆层等同起来，这就需要对 $\mathcal{C}_{g,d,n}$ 和 $\mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 再做一次商。

记 $Y = \mathcal{B}^1_{g,d,n} \times_{\mathcal{B}_{g,d,n}} \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}$ 上的可逆层

$$\mathcal{L} = \mathrm{pr}_1^* O_{\mathcal{B}^1_{g,d,n}}(1) \otimes_{O_Y} \mathcal{P}_{\mathcal{B}^1_{g,d,n}/\mathcal{B}_{g,d,n}}|_Y \tag{1}$$

注意 $O_{\mathcal{B}^1_{g,d,n}}(1)$ 由一个截口 $\zeta : \mathcal{B}_{g,d,n} \to \mathcal{P}ic(\mathcal{B}^1_{g,d,n}/\mathcal{B}_{g,d,n})$ 给出。可取 $\mathcal{P}ic(\mathcal{B}^1_{g,d,n}/\mathcal{B}_{g,d,n})$ 的有限多个连通分支的并 V_d 使得 ζ 经过 V_d 且有同构 $\nu : \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n} \to V_d$ (为 ζ 给出的平移)，从而

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{B}^1_{g,d,n}} \times_{\mathcal{B}_{g,d,n}} \nu)^* \mathcal{P}ic(\mathcal{B}^1_{g,d,n}/\mathcal{B}_{g,d,n})|_{\mathcal{B}^1_{g,d,n} \times_{\mathcal{B}_{g,d,n}} V_d} \cong \mathcal{B}^1_{g,d,n}(1) \tag{2}$$

令 $s_0, ..., s_m$ 为 $H^0(\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}, O_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}}(1)) \cong \mathbb{Z}^{m+1}$ 的一组由生成元，则它们也可看作 $H^0(\mathcal{B}^1_{g,d,n}, O_{\mathcal{B}^1_{g,d,n}}(1))$ 的生成元，通过 pr_1^* 也可看作 $H^0(Y, O_Y(1))$ 的生成元。另一方面，$\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{L}$ 是局部自由层，可取其局部生成元 $t_0, ..., t_m$ 使得 $(\nu^{-1} \circ \zeta)^* t_i = s_i$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$，这样 $t_0, ..., t_m$ 就唯一确定了且为整体截口。由 $t_0, ..., t_m$ 给出一个闭嵌入 $Y \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}$，而由命题 3 可见这诱导一个态射 $q : \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n} \to \mathcal{B}_{g,d,n}$。

由定理 Ⅵ.2.1 和命题 2 可见 $(\hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}, \mathcal{L}, t_0, ..., t_m)$ 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$S \mapsto \{X_1, X_2 \in \mathfrak{B}_{g,d,n}(S) | [O_{X_1}(1)] = [O_{X_2}(1)]\}$$

由此易见 $(\mathrm{pr}_1, q) : \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n} \to \mathcal{B}_{g,d,n} \times \mathcal{B}_{g,d,n}$ 为闭嵌入，且给出 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系。注意 $PGL_{m+1/\mathbb{Z}}$ 在 $\hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}$ 上的诱导作用与其在 $\mathcal{B}_{g,d,n}$ 上的诱导作用相容，可见 $\hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}/PGL_{m+1/\mathbb{Z}} \cong \hat{\mathcal{C}}^1_{g,d,n}$ 给出 $\mathcal{C}_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系 $\mathcal{W}$，且投射 $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{W} \to \mathcal{C}_{g,d,n}$ 是平坦相对射影的。由 $\hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n} \to \mathcal{B}_{g,d,n} \times \mathcal{B}_{g,d,n}$ 为闭嵌入可见 $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) : \mathcal{W} \to \mathcal{C}_{g,d,n} \times \mathcal{C}_{g,d,n}$ 为闭嵌入。故由引理 V.2.1 可知存在泛几何商 $\mathcal{A}_{g,d,n} = \mathcal{C}_{g,d,n}/\mathcal{W}$。

类似地，$\mathcal{B}^1_{g,d,n} \times_{\mathcal{B}_{g,d,n}} \hat{\mathcal{B}}^1_{g,d,n}$ 给出 $\mathcal{B}^1_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系，它诱导 $\mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系 $\mathcal{W}^1$，且投射 $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{W}^1 \to \mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 是平坦相对射影的，$(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) : \mathcal{W}^1 \to \mathcal{C}^1_{g,d,n} \times \mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 为闭嵌入。故由引理 V.2.1 存在泛几何商 $\mathcal{X}_{g,d,n} = \mathcal{C}^1_{g,d,n}/\mathcal{W}^1$。此外，易见 $\mathcal{C}^1_{g,d,n} \to \mathcal{C}_{g,d,n}$ 的阿贝尔概形结构诱导 $\mathcal{X}_{g,d,n} \to \mathcal{A}_{g,d,n}$ 的一个阿贝尔概形结构，$\phi_{\mathcal{C}_{g,d,n}}$ 诱导 $\mathcal{X}_{g,d,n}$ 的一个 d^2 次极化 $\phi_{g,d,n}$，而 $\lambda_{\mathcal{C}_{g,d,n}}$ 诱导 $\mathcal{X}_{g,d,n}$ 的一个标高 n-结构 $\lambda_{g,d,n}$。

对任意诺特概形 S 记 $\mathfrak{A}_{g,d,n}(S)$ 为所有三素组 (X,ϕ,λ) 的等价类的集合，其中 X 为相对维数 g 的 S-阿贝尔概形，ϕ 为 X 的 d^2 次极化，λ 为 X 的标高 n-结构。显然这定义了 $\mathfrak{Sch}$ 上的一个预层 $\mathfrak{A}_{g,d,n}$。

引理 2. 设 X 为 S-阿贝尔概形。则 X 的一个极化典范等价于 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 中的一个对应于相对丰富层的 $\hat{X}$-挠子。

证．设 ϕ 为 X 的一个极化，则由定义（定义 VII.2.1）有一个忠实平坦态射 $T\to S$ 及 $X\times_S T$ 上的一个 T-相对丰富可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $\phi_{\mathcal{L}}=\phi\times_S \mathrm{id}_T$。不难约化到 T 是有限型连通 S-概形的情形。由 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的泛性有一个 S-态射 $f:T\to\mathcal{P}ic(X/S)$ 使得 $\mathcal{L}\cong(\mathrm{id}_X\times f)^*\mathcal{P}_{X/S}$，这给出 $\mathrm{pr}_2:\mathcal{P}ic(X/S)\times_S T\to T$ 的一个截口 $f_T=(f,\mathrm{id}_T)$。由 f_T 给出的平移为 $\mathcal{P}ic(X/S)\times_S T\to T$ 的一个 T-概形自同构，它将 $\hat{X}\times_S T$ 映到 $\mathcal{P}ic(X/S)\times_S T\to T$ 的一个连通分支 V_f。由平坦性可见 $U=\mathrm{pr}_1(V_f)\subset\mathcal{P}ic(X/S)$ 为 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的连通开子概形。令 $V_\phi\subset\mathcal{P}ic(X/S)$ 为包含 U 的连通分支，并简记 $\mathcal{L}_\phi=\mathcal{P}_{X/S}|_{X\times_S V_\phi}$。易见 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的一个几何点 s 满足 $\phi_{\mathcal{L}_\phi|_{X_s}}=\phi_s$ 当且仅当 s 是 U 的几何点。另一方面，考虑 $\Phi_{\mathcal{L}_\phi}$ 和 $\phi\times_S\mathrm{id}_{V_\phi}$ 的图，由推论 IV.2.3 可见 $\phi_{\mathcal{L}_\phi|_{X_s}}=\phi_s$ 为闭条件，故 U 是 V_ϕ 的闭子集。这说明 $U=V_\phi$，从而由 $V_f\to S$ 忠实平坦可见 $V_\phi\to S$ 忠实平坦。由此还可见 $V_\phi\times_S T=V_f$，故 $\hat{X}$ 在 V_ϕ 上的作用可迁，从而 V_ϕ 是 $\hat{X}$-挠子。

反之，设 $V\subset\mathcal{P}ic(X/S)$ 为一个对应于相对丰富层的 $\hat{X}$-挠子。由 $X\to S$ 具有几何整纤维可见 $X\times_S V$ 是连通的。令 $T=V$，则由上所述可见 $\hat{X}\times_S T$ 同构于 $\mathcal{P}ic(X/S)\times_S T$ 的一个连通分支 W。由所设 $\mathcal{P}_{X\times_S T/T}|_{X\times_S W}$ 是 W-相对丰富的，故给出一个极化 $\phi_W:X\times_S W\to\hat{X}\times_S W$。注意 $\hat{X}\times_S T$ 在 W 上的作用保持 ϕ_W，故诱导一个极化 $\phi_T:X\times_S T\to\hat{X}\times_S T$。再由 $\hat{X}$ 在 T 上的作用保持 ϕ_T 及 $T/\hat{X}\cong S$ 可见有诱导极化 $\phi:X\to\hat{X}$。

这样 $\phi\mapsto V_\phi$ 就给出 X 的极化与 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 中的对应于相对丰富层的 $\hat{X}$-挠子之间的典范一一对应。证毕。

定理 1. 对任意 $g,d>0$ 和 $n\geqslant 3$，$\mathfrak{A}_{g,d,n}$ 由 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 代表，其上的泛阿贝尔概形为 $\mathcal{X}_{g,d,n}$ 连同其泛极化 $\phi_{g,d,n}$ 和泛标高 n-结构 $\lambda_{g,d,n}$。此外 $\mathcal{A}_{g,d,n}$

在 $\mathbb{Z}$ 上是平坦拟射影的。

证. 设 S 为连通诺特概形, $(X,\phi,\lambda)\in\mathfrak{A}_{g,d,n}(S)$。由引理 2 可知 ϕ 对应于一个 $\hat{X}$-挠子 $V_\phi\subset\mathcal{P}ic(X/S)$。令 $Y_\phi=X\times_S V_\phi$, $\mathcal{L}_\phi=\mathcal{P}^3_{X/S}|_{Y_\phi}$。由命题 Ⅶ.2.6 可知 $\mathcal{L}_\phi$ 是 V_ϕ-相对极丰富的, 且 $\mathcal{E}=\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{L}_\phi$ 为秩 $3^g d$ 局部自由的。设在开子概形 $U\subset V_\phi$ 上有截口 $t_0,...,t_m$ 生成 $\mathcal{L}_\phi(U)$, 则它们给出一个闭嵌入 $i:X\times_S U\hookrightarrow\mathbb{P}^m\times U$。由命题 3 可见 i 连同 (ϕ,λ) 诱导一个态射 $U\to\mathcal{B}_{g,d,n}$, 易见它与投射 $\mathcal{B}_{g,d,n}\to\mathcal{C}_{g,d,n}$ 的合成给出的态射 $U\to\mathcal{C}_{g,d,n}$ 与 $t_0,...,t_m$ 的选择无关。由 U 的任意性, 这给出一个态射 $V_\phi\to\mathcal{C}_{g,d,n}$, 它与投射 $\mathcal{C}_{g,d,n}\to\mathcal{A}_{g,d,n}$ 的合成给出一个态射 $f:V_\phi\to\mathcal{A}_{g,d,n}$。注意极化 $\mathcal{L}_\phi$ 仅与数值类 $[\mathcal{L}_\phi]$ 有关, 而 V_ϕ 为 $\hat{X}$-挠子, 可见 f 与 $\hat{X}$ 的作用相容, 从而诱导一个态射 $S\cong V_\phi/\hat{X}\to\mathcal{A}_{g,d,n}$。易见这个态射的唯一性。

由上述构造过程还可见 $\mathcal{X}_{g,d,n}$ 连同其泛极化和泛标高 n-结构在 S 上的拉回等价于 (X,ϕ,λ)。这说明 $\mathfrak{A}_{g,d,n}$ 由 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 代表。证毕。

注 1. 上面的讨论 (特别是引理 2) 有助于理解极化在高维阿贝尔簇的分类中的必要性。对于一般的阿贝尔概形 $X\to S$, $\mathcal{P}ic(X/S)$ 的连通分支未必都是 $\hat{X}$-除子。若要得到不带极化的阿贝尔簇的模空间, 就需要将 $\mathcal{P}ic(X/S)$ 中的连通分支都等同起来, 但这样一般得不到一个有适当几何结构 (甚至仅仅是适当拓扑结构) 的商空间。对这个问题还可参看 [LO, §0.3]。

5. 极化阿贝尔簇的粗糙模空间

注意对任意域 k 使得 $\mathrm{ch}(k)|n$, $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 没有 k-点, 故可将 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 看作 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-概形。若 S 是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-概形而 X 是相对维数 g 的 S-阿贝尔概形使得 $X[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}_S$, 则 X 的任两个的标高 n-结构相差 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ 的一个自同构, 即一个 $GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的元。对任意 i,n 记 $\phi_i(n)=|GL_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|$, 则 X 共有 $\phi_{2g}(n)$ 个互不相同的标高 n-结构。不难计算 $\phi_i(n)$: 若 $n=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$ ($p_1,...,p_s$ 为不同的素数), 则有

$$\phi_i(n)=\phi_i(p_1^{r_1})\cdots\phi_i(p_s^{r_s}) \tag{1}$$

而对任一素数 p 及任意正整数 r 有

$$\phi_i(p^r) = p^{(r-1)i^2+i(i-1)/2}(p-1)(p^2-1)\cdots(p^i-1) \tag{2}$$

(习题 1)。

若 $n|m$, 则一个标高 m-结构给出一个确定的标高 n-结构, 故由抽象废话有典范投射 $p_{m,n} : \mathcal{A}_{g,d,m} \to \mathcal{A}_{g,d,n}$。若 S 是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$-概形而 X 是相对维数 g 的 S-阿贝尔概形使得 $X[m] \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2g}_S$, 则由上所述可见 X 的一个标高 n-结构可以扩展为 $\phi_{2g}(m)/\phi_{2g}(n)$ (即投射 $GL_{2g}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的次数) 个互不相同的标高 m-结构, 这说明 $p_{m,n}$ 是有限平展的, 且在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ 上的次数为 $\phi_{2g}(m)/\phi_{2g}(n)$。

设 $m, n > 2$ 为互素的整数, 则易见一个标高 mn-结构等价于一个标高 m-结构连同一个标高 n-结构, 从而在 $\mathcal{A}_{g,d,m} \times \mathcal{A}_{g,d,m} \times \mathcal{A}_{g,d,n} \times \mathcal{A}_{g,d,n}$ 中有

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{g,d,mn} \times_{\mathcal{A}_{g,d,m}} \mathcal{A}_{g,d,mn} \times_{\mathcal{A}_{g,d,n}} \mathcal{A}_{g,d,mn} \\ = &\mathcal{A}_{g,d,mn} \times_{\mathcal{A}_{g,d,n}} \mathcal{A}_{g,d,mn} \times_{\mathcal{A}_{g,d,m}} \mathcal{A}_{g,d,mn} \end{aligned} \tag{3}$$

因为二者都代表预层

$S \mapsto \{S$ 上亏格 g 的阿贝尔概形, 带有 d^2 次极化和两个标高 m-结构与两个标高 n-结构$\}$

故由定理 V.2.1 可知 $p_{mn,m}$ 和 $p_{mn,n}$ 有一个推出 T_{mn}。

设 S 为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$ 上的诺特概形, X 为 S 上亏格 g 的阿贝尔概形, 带有 d^2 次极化。我们可取有限平展覆盖 $e_m : S_m \to S$ ($e_n : S_n \to S$) 使得 $X \times_S S_m$ 有标高 m-结构 ($X \times_S S_n$ 有标高 n-结构)。令 $S_{mn} = S_m \times_S S_n$, 则在 $X \times_S S_{mn}$ 有诱导的标高 m-结构和标高 n-结构, 两者合起来给出一个标高 mn-结构。记 $q_1 : S_{mn} \to S_m$ 和 $q_2 : S_{mn} \to S_n$ 为投射, 则由命题 V.1.1 可知 S 是 q_1 和 q_2 的推出。由抽象废话有诱导态射 $f_m : S_m \to \mathcal{A}_{g,d,m} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$, $f_n : S_n \to \mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$ 和 $f_{mn} : S_{mn} \to \mathcal{A}_{g,d,mn} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$, 满足

$$p_{mn,m} \circ f_{mn} = f_m \circ q_1 \ , \quad p_{mn,n} \circ f_{mn} = f_n \circ q_2 \tag{4}$$

故有诱导态射 $S \to T_{mn}$。

若 T 为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$-概形且态射 $g_1 : \mathcal{A}_{g,d,m} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}] \to T$, $g_2 : \mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}] \to T$ 满足 $g_1 \circ p_{mn,m} = g_2 \circ p_{mn,n}$, 则有交换图

$$\begin{array}{ccc} S_{mn} & \xrightarrow{g_2} & S_n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_2\circ f_n} \\ S_m & \xrightarrow{g_1\circ f_m} & T \end{array} \tag{5}$$

故有唯一诱导态射 $S \to T$。这说明在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$-概形范畴上存在从预层

$$\mathfrak{A}_{g,d} : S \mapsto \{S \text{ 上亏格 } g \text{ 的阿贝尔概形, 带有 } d^2 \text{ 次极化}\}$$

到 $\underline{T}$ 的自然变换。由此可见 T_{mn} 是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$ 上的 d^2 次极化阿贝尔簇的粗糙模空间。取不同的大于 2 的互素整数对 (m,n), 由粗糙模空间的泛性可见所有 T_{mn} 相互粘合给出 $\mathbb{Z}$ 上的 d^2 次极化阿贝尔簇的粗糙模空间, 记为 $\mathcal{A}_{g,d,1}$ 或 $\mathcal{A}_{g,d}$。

同理可以证明 $\mathfrak{A}_{g,d,2}$ 有一个粗糙模空间 $\mathcal{A}_{g,d,2}$。总之有

推论 4. 对任意 $g,d,n>0$, $\mathfrak{A}_{g,d,n}$ 有粗糙模概形 $\mathcal{A}_{g,d,n}$, 当 $n \geqslant 3$ 时它是精细模概形。此外, 对任意 $n|m$ 有典范投射 $p_{m,n} : \mathcal{A}_{g,d,m} \to \mathcal{A}_{g,d,n}$, 且对任意三个两两互素的正整数 m,n,r 有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{g,d,mnr} & \xrightarrow{p_{mnr,nr}} & \mathcal{A}_{g,d,nr} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mnr}] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{mnr,mr}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{nr,r}} \\ \mathcal{A}_{g,d,mr} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mnr}] & \xrightarrow{p_{mr,r}} & \mathcal{A}_{g,d,r} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mnr}] \end{array} \tag{6}$$

它既是拉回又是泛几何推出。

例 1. 设 $S = \mathrm{Spec}R$, 其中 R 为诺特局部 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-代数, 而 $\tau : E \to S$ 为椭圆曲线族。则 τ 的零截口 $o : S \to E$ 可以看作一个 1 次 S-有效除子 D。由命题 Ⅶ.2.7 可知 $3D$ 是极丰富的且 $H^0(E, O_E(3D)) \cong R^3$, 从而给出闭嵌入 $E \to \mathbb{P}^2_S$。由黎曼-罗赫定理可知对任意正整数 i 有 $H^0(E, O_E(iD)) \cong R^i$。故可取 $Z \in H^0(E, O_E(D))$, $X \in H^0(E, O_E(2D))$, $Y \in H^0(E, O_E(3D))$ 使得 $H^0(E, O_E(2D))$ 由 Z^2, X 生成, 而 $H^0(E, O_E(3D))$ 由 Z^3, XZ, Y 生成。由于 Z^6, Z^4X, Z^3Y, Z^2X^2, ZXY, X^3, $Y^2 \in H^0(E, O_E(6D))$ 而 $H^0(E, O_E(6D)) \cong R^6$, 可取不全在 R 的极大理想中的 $c_1, ..., c_7 \in R$ 使得

$$c_1Z^6 + c_2Z^4X + c_3Z^3Y + c_4Z^2X^2 + c_5ZXY + c_6X^3 + c_7Y^2 = 0 \tag{7}$$

适当作线性变换可将 (7) 简化为形如

$$Y^2 = X(aX^2 + bXZ^2 + cZ^4) \tag{8}$$

如果除 o 外还给出 τ 的另一个截口 $S \to E$, 则还可以将 (8) 进一步简化为形如

$$Y^2 = X(X - Z^2)(X - \lambda Z^2) \tag{9}$$

且由 π 的光滑性可知 λ 和 $\lambda - 1$ 为单位。这样 E 的 j-不变量就是

$$j(E/S) = \frac{2^8(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \tag{10}$$

将 λ 换为 $\frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, 1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}$ 或 $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ 均不改变 j-不变量, 从而不改变其所对应的椭圆曲线的同构类。

由此可见 $\mathcal{A}_{1,1} \cong \mathbb{A}^1$ (其中 $\mathbb{A}^1$ 可以看作 j-不变量的空间) 不是精细模空间, 即不存在泛椭圆曲线簇 $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}_{1,1}$。因若不然, 由上所述可见对任意代数闭域 k, 存在 $\mathcal{E} \otimes k$ 在 $\mathcal{A}_{1,1} \otimes k$ 上的 6 个纤维对应于相互同构的椭圆曲线, 与精细模空间的定义矛盾。

注 2. 由模空间的解析理论 (见 1.1) 可见

$$\dim(\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{C}) = \frac{g(g+1)}{2} \tag{11}$$

故 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的相对维数为 $\frac{g(g+1)}{2}$。此外还可见 $\mathcal{A}_{g,d} \otimes \mathbb{C}$ 作为复解析空间的每个连通分支对应于一个类型, 即一组正整数 $e_1|e_2|\cdots|e_g$ 使得 $e_1 \cdots e_g = d$。由于 $\mathcal{A}_{g,d} \otimes \mathbb{C}$ 作为复解析空间的一个连通分支也是其作为 $\mathbb{C}$-概形的连通分支, 且易见这些连通分支都是不可约的, 故 $\mathcal{A}_{g,d} \otimes \mathbb{C}$ 的连通分支即不可约分支与类型一一对应。再由 $\mathcal{A}_{g,d}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上平坦可见 $\mathcal{A}_{g,d}$ 的不可约分支与类型一一对应。特别地 $\mathcal{A}_{g,1}$ 是不可约的。

不难验证 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上都不是射影的, 这样就有一个 (自然的) 紧致化问题。经过很多学者多年的探索, 最终确定半阿贝尔簇有模空间且为射影的, 故可将半阿贝尔簇的模空间看作 $\mathcal{A}_{g,d,n}$ 的自然紧致化 (称为德利涅-芒福德紧致化)。

对任一素数 p, $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 可以看作特征 p 的域上的阿贝尔簇的一个模空间, 其维数也是 $\frac{g(g+1)}{2}$。而 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的结构甚为复杂。由

(Ⅶ.1.2.15) 可知对任意特征 p 的代数闭域 k 上的 g 维阿贝尔簇 X 有 $X[p]_{\mathrm{red}} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_X}$, 其中 $0 \leqslant r_X \leqslant g$。对于任意 $0 \leqslant r \leqslant g$, 易见满足 $r_X \leqslant r$ 的所有阿贝尔簇 X 给出 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的一个闭子集 (习题 4), 可以证明它的每个连通分支是 $\frac{g(g-1)}{2} + r$ 维的。这些闭子集给出 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的一个"分层"。通过牛顿折线可以给出更精细的分层。

由例 Ⅷ.5.1 可知, 一个 g 维阿贝尔簇 X 的牛顿折线 $NP(X)$ 是连结 $(0,0)$ 和 $(2g,g)$ 的具有对称性的凸折线。设 α, β 为 g 维阿贝尔簇的牛顿折线, 若 α 的位置完全在 β 的上方 (包括 β 本身), 则记 $\alpha \succ \beta$。对任一 α, 易见满足 $NP(X) \succ \alpha$ 的所有阿贝尔簇 X 给出 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的一个闭子集 $S_{g,d,n,\alpha}$ (习题 5), 这些闭子集构成 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的所谓"牛顿折线分层"。

对任一 α, 令 $h(\alpha)$ 为牛顿折线链 $\alpha = \alpha_0 \gneqq \alpha_1 \gneqq \dots$ 的最大长度, 不难验证它与极大牛顿折线链的选取无关 (习题 6)。可以证明当 $d = 1$ 时, $S_{g,1,n,\alpha}$ 的每个连通分支是 $\frac{g(g+1)}{2} - h(\alpha)$ 维的, 且对每个 $\beta \succ \alpha$, 存在 $S_{g,1,n,\alpha}$ 的点代表一个阿贝尔簇 X 使得 $NP(X) = \beta$ (见 [dJO])。特别地, 若 α 为超奇牛顿折线 (即连结 $(0,0)$ 和 $(2g,g)$ 的线段), 则 $S_{g,1,n,\alpha}$ 的每个连通分支是 $[\frac{g^2}{4}]$ 维的 (见 [LO, Theorem 4.9])。

习题

1. 证明公式 (5.1) 和 (5.2)。

2. 设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形。一个 S-阿贝尔概形 X 称为**超特殊的** (*superspecial*), 如果 $V_{X[F]/S} = 0$。证明:

i) 对任意 $g, d, n > 0$, 存在 g 维 d^2 次极化带有标高 n-结构的超特殊阿贝尔簇的粗糙模空间 $\mathcal{A}^{\mathrm{ss}}_{g,d,n,p}$, 它可以嵌入 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 作为闭子概形, 且当 $n \geqslant 3$ 时为精细模空间。

ii) 每个 $\mathcal{A}^{\mathrm{ss}}_{g,d,n,p}$ 是有限平展 $\mathbb{F}_p$-概形。

iii) (Ogus) 若 S 是整概形, 则对任意超特殊的 S-阿贝尔概形 X 存在一个有限域 $\mathbb{F}_q \supset \mathbb{F}_p$ 及一个 $\mathbb{F}_q$-超特殊阿贝尔簇 X_0, 使得 $X \otimes \mathbb{F}_q \cong X_0 \times_{\mathbb{F}_q} (S \otimes \mathbb{F}_q)$。

3. 设 S 为 $\mathbb{F}_p$-概形, $X \to S$ 为相对维数 g 的阿贝尔概形, f 为 X 的有限阶自同构。证明若 $f|_{X[F^{g+1}]} = \mathrm{id}_{X[F^{g+1}]}$ 则 $f = \mathrm{id}_X$。

4. 设 p 为素数。证明对任意 $0 \leqslant r \leqslant g$, 满足 $r_X \leqslant r$ 的所有阿贝尔簇 X 给出 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的一个察里斯基闭子集。

5. 设 α 为特征 $p > 0$ 的域上的 g 维阿贝尔簇的牛顿折线。证明满足 $NP(X) \succ \alpha$ 的所有阿贝尔簇 X 给出 $\mathcal{A}_{g,d,n} \otimes \mathbb{F}_p$ 的一个察里斯基闭子集。

6. 设 α 为特征 $p > 0$ 的域上的 g 维阿贝尔簇的牛顿折线, β 为平常阿贝尔簇的牛顿折线 (即顺次连结 $(0,0)$, $(g,0)$ 和 $(2g,g)$ 的折线), 令 m 为 α 和 β 之间的整点个数 (不包括 α 的整点但包括 β 上的整点), n 为 α 和 β 之间的在直线 $x = g$ 上的整点个数。证明任一极大牛顿折线链 $\alpha = \alpha_0 \gneqq \alpha_1 \gneqq \ldots$ 的长度等于 $[\frac{m+n+1}{2}]$。

第 2 节 一些其他的模空间

1. 曲线的模空间

设 $\tau : C \to S$ 为诺特概形 S 上亏格 g 的光滑相对射影 (连通) 曲线族, 带有 τ 的一个截口 P (看作 C 的一个 1 次 S-有效除子)。则 $\mathcal{O}_C(P)$ 给出一个典范 S-态射 $\mathrm{Jac}_{C/S} : C \to \mathcal{P}ic^0(C/S)$。若 $g > 0$, 则由命题 Ⅶ.4.1 可见 $\mathrm{Jac}_{C/S}$ 的 S-纤维都是闭嵌入, 从而由中山正引理可见 $\mathrm{Jac}_{C/S}$ 是闭嵌入。

为方便起见我们用下列术语: 一个 n 次 S-有效除子 $D \subset C$ 称为**离散的**, 如果存在 τ 的截口 $P_1, \ldots, P_n$ 使得 $D = P_1 + \cdots + P_n$, 且 $P_1, \ldots, P_n$ 在每个闭点 $s \in S$ 的纤维互不相同。注意除子 D 与截口 $P_1, \ldots, P_n$ 的次序无关, 可见有 $C^n/\mathfrak{S}_n$ (其中 $\mathfrak{S}_n$ 在 C^n 上的作用为置换因子) 的一个开子概形 U 代表 $\mathfrak{Sch}_S$ 上的预层

$$T \mapsto \{C \times_S T \text{ 中的 } n \text{ 次离散 } T\text{-有效除子}\}$$

这诱导一个 S-态射 $U \to \mathcal{D}iv^n(C/S)$。若 $n = g$, 则 P 给出的投射

$\mathcal{D}iv^n(C/S) \to \mathcal{P}ic^0(C/S)$ 在 $\mathcal{D}iv^0(C/S)$ 的一个 S-忠实平坦开子概形上的限制为同构。故由抽象废话可见诱导态射 $U \to \mathcal{P}ic^0(C/S)$ 给出 U 的一个 S-忠实平坦开子概形与 $\mathcal{P}ic^0(C/S)$ 的一个开子概形的同构。再由引理 II.1.6.i) 可见 $\mathcal{P}ic^0(C/S)$ 在 S 上平坦，从而为阿贝尔概形。我们称 $\mathcal{P}ic^0(C/S)$ 连同 $\mathrm{Jac}_{C/S}$ 为 C 的*雅克比概形*，记为 $\mathcal{J}ac(C/S)$。

令 $Z \subset \mathcal{J}ac(C/S)$ 为 $P \times_S C^{g-1}$ 在投射 $C^g \to \mathcal{P}ic^0(C/S) = \mathcal{J}ac(C/S)$ 下的像，则由命题 VII.4.1 和推论 VII.4.3 可见 Z 为 S-有效除子，且 $O_{\mathcal{J}ac(C/S)}(Z)$ 给出 $\mathcal{J}ac(C/S)$ 的一个主极化 $\phi_{C/S}$。我们下面来说明，$(\mathcal{J}ac(C/S), \phi_{C/S})$ 在 S-同构之下唯一决定 C。简记 $A = \mathcal{J}ac(C/S)$。当 $g = 0$ 时 $\tau_* O_C(P)$ 给出 C 到 $\cong \mathbb{P}^1_S$ 的局部同构，而当 $g = 1$ 时 $C \cong A$，故以下只需考虑 $g > 1$ 的情形。

由引理 1.2 在 $\mathcal{P}ic(A/S)$ 中有一个 $\hat{A}$-挠子 V 对应于 $\phi_{C/S}$。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{P}_{A/S}$ 在 $A \times_S V$ 上的限制。由推论 VII.2.2.vii) 可见 $\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{L}$ 是秩 1 局部自由的，从而给出一个 V-有效除子 $Z \subset A \times_S V$。令态射 $f : X = Z \times_V \overset{g-1}{\cdots} \times_V Z \to A^{g-1} \times_S V$ 为

$$(z_1, ..., z_{g-1}) \mapsto (\mathrm{pr}_1(z_1), \mathrm{pr}_1(z_1) + \mathrm{pr}_1(z_2), ..., \mathrm{pr}_1(z_1) + \mathrm{pr}_1(z_{g-1}), \mathrm{pr}_2(z_1)) \tag{1}$$

由命题 VII.4.1.ii) 可见 $\mathrm{pr}_{2...g} \circ f : X \to A^{g-2} \times_S V$ 是满态射，且存在稠密开子概形 $U \subset A^{g-2} \times_S V$ 使得有同构

$$X \times_{A^{g-2} \times_S V} U \cong C \times_S U \tag{2}$$

由此可见通过 $A^{g-2} \times_S \hat{A}$ 在 $A^{g-2} \times_S V$ 上的平移作用可将 (2) 的左边扩张成 $A^{g-2} \times_S V$ 上的一个曲线族 $\mathcal{C}$，且 $A^{g-2} \times_S \hat{A}$ 在 $A^{g-2} \times_S V$ 上的平移作用可以提升到 $\mathcal{C}$ 上，故 $C \cong \mathcal{C}/(A^{g-2} \times_S \hat{A})$。总之有

命题 1. 设 $\tau : C \to S$ 为诺特概形 S 上亏格 g 的光滑相对射影 (连通) 曲线族，带有 τ 的一个截口。则

i) $\mathcal{J}ac(C/S) := \mathcal{P}ic^0(C/S)$ 为亏格 g 的 S-阿贝尔概形。

ii) τ 的一个截口诱导的态射 $C^{g-1} \to \mathcal{P}ic^0(C/S)$ 的像 Z 为 S-有效除子，而 $\phi_{C/S} = \phi_{O_{\mathcal{J}ac(C/S)}(Z)}$ 为 $\mathcal{J}ac(C/S)$ 的主极化，且与 τ 的截口的选择无关。

iii) $(\mathcal{J}ac(C/S), \phi_{C/S})$ 在 S-同构之下唯一决定 C。

托莱里定理 (推论 Ⅶ.4.3) 启发我们将亏格 g 的曲线的模空间作为 $\mathcal{A}_{g,1}$ 的子空间而建立起来。

引理 1. 设 S 为诺特概形, A, B 为 S 上的两个相对维数 g 且带有 d^2 次极化的阿贝尔概形。则存在 S 的一个闭子概形 W 代表 $\mathfrak{Sch}$ 上的预层

$$T \mapsto \{f \in \mathrm{Mor}(T, S) | \text{存在极化阿贝尔概形的同构 } A \times_f T \cong B \times_f T\}$$

证. 令 $\mu_A, \mu_B : S \to \mathcal{A}_{g,d}$ 分别为 A, B 诱导的典范态射。易见 S 有一个极大闭子概形 W 使得 $\mu_A|_W = \mu_B|_W$。由抽象废话立见 W 的泛性。证毕。

对一个整数 $n \geqslant 3$ 简记 $A_n = \mathcal{A}_{g,1,n}$, $X_n = \mathcal{X}_{g,1,n}$。令 V_n 为 $\mathcal{P}ic(X_n/A_n)$ 中对应于泛主极化 $\phi_{g,1,n}$ 的 $\hat{X}_n$-挠子, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_{X_n/A_n}|_{X_n \times_{A_n} V_n}$。则由推论 Ⅶ.2.2.vii) 和命题 I.3.1 可见 $\mathrm{pr}_{2*}\mathcal{L}$ 是秩 1 局部自由的, 从而给出一个 V_n-有效除子 $Z_n \subset X_n \times_{A_n} V_n$。按 (1) 定义态射 $f_n : Y_n = Z_n \times_{V_n} \overset{g-1}{\cdots} \times_{V_n} Z_n \to X_n^{g-1} \times_{A_n} V_n$, 并令 $q_n = \mathrm{pr}_{2\dots g} \circ f : Y_n \to X_n^{g-2} \times_{A_n} V_n$。由平坦分层不难验证存在 A_n 的一个极大闭子概形 B_n 使得 $q_n \times_{A_n} \mathrm{id}_{B_n} : Y_n \times_{A_n} B_n \to X_n^{g-2} \times_{A_n} V_n \times_{A_n} B_n$是忠实平坦的。令 $U_n \subset X_n^{g-2} \times_{A_n} V_n \times_{A_n} B_n$ 为极大开子概形使得 $q_n \times_{A_n} \mathrm{id}_{B_n}$ 在 U_n 上的限制为亏格 g 的光滑曲线族, 简记这个曲线族为 C_n。由命题 1 可知 $\mathcal{J}ac(C_n/U_n)$ 为 U_n 上的主极化阿贝尔概形, 从而由引理 1 可知有 U_n 的一个极大闭子概形 W_n 使得 $\mathcal{J}ac(C_n/U_n)$ 与 Y_n 在 W_n 上的限制 (作为主极化阿贝尔概形) 相互同构。由抽象废话不难验证存在 $G_n = X_n^{g-2} \times_{A_n} \hat{X}_n \times_{A_n} B_n$ 在 U_n 上的一个作用, 且该作用可以提升到 C_n。由引理 V.2.1 即可见存在泛几何商 $\mathcal{M}_{g,n} = U_n/G_n$ 和 $\mathcal{C}_{g,n} = C_n/G_n$, 其中 $\mathcal{M}_{g,n}$ 可看作 A_n 的局部闭子概形, 且投射 $\mathcal{C}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 为亏格 g 的光滑相对射影曲线族。

对任意两个互素的整数 $m, n \geqslant 3$, 由抽象废话有投射 $\mathcal{M}_{g,mn} \to \mathcal{M}_{g,m} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$ 和 $\mathcal{M}_{g,mn} \to \mathcal{M}_{g,n} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$, 且仿照推论 4.1 的讨论可见这两个投射有泛几何推出 $T_{m,n}$。所有 $T_{m,n}$ 粘合起来给出一个 $\mathbb{Z}$-概形 $\mathcal{M}_g$, 它可以看作 $\mathcal{A}_{g,1}$ 的局部闭子概形。

定理 1. 概形 $\mathcal{M}_g$ 为亏格 g 的光滑射影曲线的粗糙模概形。

证. 设 $\tau: C \to S$ 为诺特概形 S 上亏格 g 的光滑相对射影曲线族，带有 τ 的一个截口 P。则由命题 1 可知 $J_C = \mathcal{J}ac(C/S)$ 为亏格 g 的 S-阿贝尔概形。

为简单起见不妨设 S 为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$-概形，其中 $m, n \geqslant 3$ 为互素的整数。由推论 1.4 可取有限平展态射 $S_m \to S$ (及 $S_n \to S$) 使得 $J_{C,m} = J_C \times_S S_m$ 有标高 m-结构 ($J_{C,n} = J_C \times_S S_n$ 有标高 n-结构)。令 $S_{mn} = S_m \times_S S_n$，则这两个标高结构给出 $J_{C,mn} = J_C \times_S S_{mn}$ 的一个标高 mn-结构。由定理 1.1 可知 $J_{C,m}$ 诱导一个态射 $S_m \to \mathcal{A}_{g,1,m}$，而由上述构造过程可见它经过 $\mathcal{M}_{g,m}$。同理有诱导态射 $S_n \to \mathcal{M}_{g,n}$ 和 $S_{mn} \to \mathcal{M}_{g,mn}$。注意 S 是投射 $S_{mn} \to S_m$ 与 $S_{mn} \to S_n$ 的推出 (命题 V.1.1)，由推论 1.4 即可见有诱导态射 $q: S \to \mathcal{M}_g$。

仿照推论 1.4 的讨论即可证明 $\mathcal{M}_g$ 的泛性 (习题 1)。证毕。

注 1. 关于 $\mathcal{M}_g$ 的性质已有很多深入的结果，例如当 $g > 1$ 时它在 $\mathbb{Z}$ 上的相对维数为 $3g - 3$ (参看 [M4, Theorem 5.11])。

2. 希尔伯特-布卢门塔尔模空间和 PEL 模空间

在 Ⅳ.1.1 中可看到，对于椭圆曲线常考虑“有复乘”的情形，即有特别大的自同态环的情形。对高维的阿贝尔簇，有特别大的自同态环的情形同样也是重要的课题。不过此时 “有复乘”的说法不很合适，例如一条有复乘的椭圆曲线和一条没有复乘的椭圆曲线的直积，其实一般是不作为“有复乘”考虑的对象。较好的术语是“有足够复乘”或“CM 型”，指的是一个 g 维阿贝尔簇 X 的自同态环有一个秩为 $2g$ 的交换子环 (由 Ⅶ.3.3 可见这是最大的可能的秩)。

设 X 是域 k 上的阿贝尔簇。易见任意 $f \in End(X)$ 作用于 $Lie(X)$ 上，因此 $End(X)$ 作用于 $Lie(X)$ 上，若取定 $Lie(X)$ 的一个非零元，这个作用就给出一个 k-线性空间的同态 $End(X) \otimes k \to Lie(X)$。

取定一个 g 次全实扩域 $F \supset \mathbb{Q}$，令 O_F 为 F 的整数环。考虑所有有 O_F 作用的 g 维阿贝尔簇 X (即 $End(X)$ 包含同构于 O_F 的子环) 的分类，详言之，对任一域 k 考虑所有三素组 (X, ϕ, ϵ)，其中 X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇，ϕ 为 X 的 d^2 次极化，$\epsilon: O_F \to End(X)$ 为单同态，满足相容性条件:

i) ϵ 的像在 ϕ 给出的 Rosati 对合 $\alpha \mapsto \phi^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi$ 下保持不变;

ii) ϵ 诱导 k-线性空间的同构 $O_F \otimes k \to Lie(X)$。

由定理 1.1 不难推出, 这样的三素组有一个粗糙模空间, 为 $\mathbb{Z}$ 上的拟射影概形 (习题 3), 称为一个希尔伯特布卢门塔尔模空间 (*Hilbert-Blumenthal moduli Space*)。

为建立精细模空间也可以加上标高结构, 不过与上节的情形有所不同: 对任意整数 n, O_F 作用于 $X[n]$ 上, 因此 $X[n]$ 有一个 O_F-模结构, 所以对标高 n-结构的定义, 我们一般是先固定 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ 的一个 O_F-模结构 M, 再定义一个标高 n-结构为一个 O_F-模同构 $X[n] \to M$。此外, n 可以换为 O_F 的一个理想 I, 记 $X[I]$ 为 I 中所有元的核的交, 固定一个 O_F-模 M, 定义 X 的一个标高 I-结构为一个 O_F-模同构 $X[I] \to M$。这样定义的标高结构比上节的定义细致。对极化也不一定是固定次数, 可以固定其核的结构, 这样的要求也比只对次数的要求更细致。

对任意域 k 考虑所有四素组 $(X, \phi, \epsilon, \lambda)$, 其中 X 为 k 上的 g 维阿贝尔簇, ϕ 为 X 的具有给定核结构的极化, $\epsilon : O_F \to End(X)$ 为满足上述两个条件的单同态, λ 为一个标高 I-结构, 满足上面两个相容性条件。所有这样的四素组有一个粗糙模概形, 是 $\mathbb{Z}$ 上的拟射影概形, 且当 I 足够好时为精细模概形。

上面的结构还没有涉及复乘 (仅涉及 O_F 的"实乘")。为引进复乘, 由 VII.3.3 中 $End(X) \otimes \mathbb{Q}$ 的结构分类, 可取其中一个类型的 $\mathbb{Q}$ 上的有限维单代数 D, 带有一个对合 $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$。令 $F \subset D$ 为中心。取 D 的一个极大 order O, 将上面要求的 ϵ 改为单同态 $\epsilon : O \to End(X)$, 并将相容性条件 i) 改为

i′) $\phi \circ \epsilon(\bar{\alpha}) = \widehat{\epsilon(\alpha)} \circ \phi$

对这样的三素组 (X, λ, ϵ) 也可以建立模概形, 称为 *PEL* 模空间, 详情与上面的希尔伯特-布卢门塔尔模空间类似, 这里从略。

习题

1. 将定理 1 的证明的细节补充完整。

2. 证明 $\mathcal{M}_2$ 同构于 $\mathcal{A}_{2,1}$ 的一个开子概形。

3. 建立希尔伯特-布卢门塔尔模空间的存在性定理。

参考文献

[B] L. Begueri: Schéma d'automorphismes. Application a l'étude d'extensions finies radicielles. Bull. Soc. Math. 93 (1969), 89-111

[BBM] P.Berthelot, L. Breen & W.Messing: *Théorie de Dieudonné cristalline II*. LNM 930, Springer-Verlag (1982)

[BO] P. Berthelot and A. Ogus: *Notes on Crystalline Cohomology*, Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton (1978)

[Bo] N. Bourbaki: *Algèbre Commutative*, Eléments de Math. 27, 28, 30, 31. Hermann (1961-1965)

[CL] 陈见柯、李克正: Dieudonne 模理论的直接建立,《中国科学数学》2013年第 43 卷第 11 期, 1071-1092

[dJ] J. de Jong: Moduli of abelian varieties and Dieudonné modules of finite group schemes (Thesis). Univ. of Utrecht (1992)

[dJO] J. de Jong & F. Oort - Purity of the stratification by Newton polygons. J. AMS 13 (2000), 209-241

[dS] P.J.S. De Salas: Automorphism scheme of a finite field extension. Trans. AMS Vol. 352, No.2, 595-608 (1999)

[Dem] M. Demazure: *Lectures on p-divisible Groups*, LNM 302. Springer-Verlag (1972)

[DG] M. Demazure, A. Grothendieck et al - Schemas en Groups (SGA 3), LNM 151-153. Springer-Verlag (1970)

[DGa] M. Demazure & P. Gabriel: *Groupes algébriques, I.* Masson, Paris and North-Holland Pub. Co., Amsterdam (1970)

[EGA] A. Grothendieck & J. Dieudonné: *Elémemts de Géométrie Algébrique* I-IV. Publ.Math. IHES 4(1960), 8(1961), 11(1961), 17(1963), 20(1964), 24(1965), 28(1966), 32(1967)

[F] W. Fulton: *Intersection Theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-

N.Y.-Tokyo (1984)

[Fr] P. Freyd: *Abelian Categories*. Harper & Row Pub. (1964)

[G] H. Grauert: *Mordell's Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper*. Publ. Math. I.H.E.S. (1965)

[GH] P. Griffiths & J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley (1978)

[GM] S.I. Gelfand & Yu.I. Manin: *Methods of Homological Algebra* (2nd ed.). Springer-Verlag (2003)

[H] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM52. Springer-Verlag, NY-Heidelberg-Berlin (1977). 中译本: R. 哈茨霍恩, 代数几何, 冯克勤、刘木兰、胥鸣伟译, 科学出版社 (1994)

[HI] K. Hashimoto and T. Ibukiyama - On the class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms, I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA, 27 (1980), 549-601; Part Ⅱ, ibid. 28 (1981), 695-699; Part Ⅲ, ibid. 30 (1983), 393-401

[Hi] Haruzo Hida: p-adic Automorphic Forms on Shimura Varieties. Springer Monographs in Mathematics. Springer (2004)

[I] J.-I. Igusa: A Fundamental Inequality in the Theory of Picard Varieties, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41 (1955), 318-320

[IKO] T. Ibukiyama, T. Katsura & F. Oort - Supersingular curves of genus two and class numbers. Compos. Math. 57 (1986), 127-152

[K] 桂利行: 代数幾何入門, 共立講座21 世紀の数学 (17). 共立出版株式会社 (1998)

[KM] Seán Keel and Shigefumi Mori: Quotient by groupoids. Annals of Math. 145 (1997), 193-213

[KO] T. Katsura & F. Oort - Supersingular abelian varieties of dimension two or three and class numbers. Adv. St. Pure Math. 10 (1987) (Algebr.

Geom., Sendai, 1985; Ed. T. Oda), Kinokuniya Co., Tokyo Japan, and North-Holland Co., Amsterdam (1987).

[La] S. Lang: *Abelian Varieties*. Interscience Pub. Inc., New York (1959)

[Laz] M. Lazard: *Commutative Formal Groups*, LNM 443. Springer-Verlag (1975)

[L1] 李克正: 交换代数与同调代数, 中国科学院研究生教学丛书. 科学出版社 (1998), 第二次印刷 (1999)

[L2] 李克正: 代数几何初步. 科学出版社 (2004)

[L3] 李克正:《群概形及其作用论讲义》(中国科学院晨兴数学中心 1996)

[L4] 李克正:《参量空间理论讲义》(中国科学院晨兴数学中心 2001)

[L5] 李克正:《晶体上同调初步》(北京大学 2003)

[L6] 李克正: 直线丛的类 (中国科学院晨兴数学中心 2003)

[L7] 李克正: 复环面与阿贝尔簇 (中国科学院晨兴数学中心 2004)

[L8] 李克正: 丢多涅模的结构 (中国科学院晨兴数学中心 2004)

[L9] 李克正: 射影一般线性群概形作用的商 (中国科学院晨兴数学中心 2005)

[L10] 李克正:《作为参量空间的志村簇》(浙江大学 2005)

[L11] 李克正: 推出与参量空间的构造 (中国科学院晨兴数学中心 2007)

[L12] 李克正:《超奇阿贝尔簇讲义》(中国科学院晨兴数学中心/首都师范大学 2008)

[L13] 李克正:《李群与李代数讲义》(中科院研究生院/首都师范大学 2003-2010)

[L-1] K. Li: Classification of supersingular abelian varieties. Math. Ann. 283 (1989), 333-351

[L-2] Ke-Zheng Li: Actions of group schemes (I). Compositio Math. 80, 55-74 (1991)

[L-3] Ke-Zheng Li: Push-out of schemes and some applications. Max-

Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 2000 (29)

[L-4] K. Li: Automorphism group schemes of finite field extensions. Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 2000 (28)

[L-5] Ke-Zheng Li: Vector fields and automorphism groups. 2004 代数幾何学シンポジューム记录 (2004), 119-126

[L-6] Ke-Zheng Li:Quotients of Actions by Linear Group Schemes,preprint (2006)

[L-7] Kezheng Li: A Geometric Proof of Mordell's Conjecture for Function Fields
http://arxiv.org/abs/math.AG/0701407 (2007)

[L-8] Ke-Zheng Li: The Grothendieck ring schemes of curves, preprint (2007)

[L-9] Ke-Zheng Li: Push-out of schemes. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 14 (2007), 531-565

[L-10] Ke-Zheng Li: Differential Operators and automorphism schemes. Science China Mathematics Volume 53 Number 9 (2010), 2363-2380

[L-11] Kezheng Li: A direct formulation of Dieudonné module theory http://arxiv.org/abs/1202. 2604 (2012)

[LN] S. Lang & A. Néron: Rational points of abelian varieties over function fields, Amer. J. Math. 81 (1959), 95-118

[LOZ] H.W. Lenstra jr, F. Oort & Yu.G. Zarhin: Abelian subvarieties. J. Algebra 180 (1996), 513-516

[LO] Ke-Zheng Li & Frans Oort: *Moduli of Supersingular Abelian Varieties*, LNM 1680. Springer (1998)

[LZ] 黎景辉、赵春来: 模曲线导引. 北京大学出版社 (2002)

[Ma] H. Matsumura: *Commutative Algebra*. W.A.Benjamin Co., New York (1970)

[Man] Yu. I. Manin - The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. Usp. Math. 18 (1963), 3-90; Russ. Math. Surveys 18 (1963), 1-80

[Me] W. Messing *The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups: with Applications to Abelian Schemes*, LNM 264. Springer-Verlag (1972)

[Mi] M. Miyanishi: Some remarks on a covering of an abelian variety, J. Math. Kyoto Univ. 7-1 (1967), 77-92

[M1] D. Mumford: *Curves and their Jacobians*. Univ. of Michigan Press (1975)

[M2] D. Mumford: *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Annals of Math. Studies 59. Princeton University Press, Princeton (1966)

[M3] D. Mumford - *Abelian varieties*, 2nd print. Tata Inst. Fund. Res. & Oxford Univ. Press (1974)

[M4] D. Mumford: *Geometric Invariant Theory*, 2nd ed., Ergebnisse. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982)

[M5] D. Mumford - The structure of the moduli spaces of curves and abelian varieties. In: Actes, Congrès international math. (1970), tome 1, 457-465. Paris: Gauthier-Villars (1971)

[MO] H. Matsumura & F. Oort: Representability of group functors and automorphisms of algebraic schemes. Invent. Math. 4 (1967), 1-25

[MS] V. B. Mehta and V. Srinivas: Varieties in Positive Characteristic with Trivial Tangent Bundle, Compositio Mathematica 64 (1987), 191-212

[N] R. Narasimhan: *Several Complex Variables*. University of Chicago Press (1971)

[Nak] Iku Nakamura: Complex parallelisable manifolds and their small deformations. J. Differential Geometry 10 (1975), 85-112

[O1] F. Oort - *Commutative group schemes*, LNM 15. Springer-Verlag (1966)

[O2] F. Oort - Endomorphism algebras of abelian varieties. In: *Algebr. Geom. and Commut. Algebra in Honor of M. Nagata* (Ed. H. Hijikata et al.), Kinokuniya Co. (1988), Vol. Ⅱ, 469-502.

[O3] F. Oort - Some questions in algebraic geometry, preprint

[O4] F. Oort - Newton polygon strata in the moduli space of Jacobian varieties. (preprint)

[O5] F. Oort - Foliations in moduli spaces of abelian varieties. J. AMS Vol. 17 No. 2 (2004), 267-296

[P] Richard Pink: *Finite group schemes.* Lecture course in WS, ETH, Zürich (2004/05)

[Ra] M. Raynaud: Schémas en groupes de type $(p, ..., p)$, Bull. Soc. math. France 102 (1974), 241-280

[Ro] M. Rosenlicht: Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math. 78 (1956), 401-443

[Sam] P. Samuel: Compléments à un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell, Publ. Math. I.H.E.S. tome 29 (1966), 55-62

[Sat] Satake: *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Kan Memorial Lectures, vol. 4. Iwanami Shoten, Tokyo (1980)

[S3.I] M. Demazure, A. Grothendieck et al - Schemas en Groups (SGA 3) I, LNM 151, Springer-Verlag (1970)

[SD] Swinnerton-Dyer: *Analytic Theory of Abelian Varieties.* Cambridge University Press (1974)

[Se] J.-P. Serre: Géométrie algébriques et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42

[Sh] G. Shimura - Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms. J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 33-65.

[TO] J. Tate & F. Oort: Group schemes of prime order, Ann. Sc. Ecole

Norm. Sup. 3 (1970), 1-21

[V] Eckart Viehweg: *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge·Band 30. Springer-Verlag (1995)

[Va] V.S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Prentice-Hall (1974)

[W] A. Weil: *Variétés Abéliennes et Courbes Algébriques*. Hermann (1948)

[Wa] H. C. Wang: Comples parallelisable manifold. Proc. AMS 5 (1954), 771-776

[Wat] W.C. Waterhouse: *Introduction to Affine Group Schemes*. Springer-Verlag (1979)

[X] Kejian Xu: On the elements of prime power order in K_2 of a number field. Acta Arithmetica 127 (2007), 199-203

[ZhangC1] 张超: Lazard 的一个定理 (首都师范大学 2009)

[ZhangC2] C. Zhang: Notes on deformation theory. CNU (2010)

[ZhaoT] T. Zhao: Grothendieck rings and Grothendieck modules of abelian tensor categories (M.A. thesis, CNU 2008)

中英术语索引

中　　文	英　　文	章节
超范德蒙德行列式	super-Vandermonde determinant	Ⅷ.3.3
超奇的	supersingular	Ⅶ.1.2
粗糙模概形	coarse moduli scheme	Ⅳ.1.2
粗糙模空间	coarse moduli space	Ⅳ.1.2
代表	represent	Ⅰ.1.4
单的 (阿贝尔簇)	simple (abelian variety)	Ⅶ.2.1
单的 (复环面)	simple (complex torus)	Ⅶ.5.1
单群概形	simple group scheme	Ⅱ.1.1
单生成的	simply generated	Ⅲ.4.2
导数	derivation	Ⅰ.2.1
德拉姆复形	de Rham complex	Ⅰ.2.3, Ⅲ.2.3
德利涅-芒福德紧致化	Deligne-Mumford compactification	Ⅺ.2.1
等化子	equalizer	Ⅳ.2.2, V.1.1
等价关系	equivalence relation	V.1.1
丢多涅晶体	Dieudonné crystal	Ⅷ.5.1
丢多涅模	Dieudonné module	Ⅷ.3.1
丢多涅模概形	Dieudonné module scheme	Ⅷ.3.3
丢多涅生成元	Dieudonné generator	Ⅷ.3.1
丢多涅元	Dieudonné element	Ⅷ.3.1
(阿贝尔概形的)对偶	dual (of an abelian scheme)	Ⅶ.2.1
F-源晶体	F-isocrystal	Ⅷ.5.1
(F, V)-晶体	(F, V)-crystal	Ⅷ.5.1
泛除子	universal divisor	Ⅰ.4.1
泛的 (等化子)	universal (equalizer)	V.1.1
泛的 (商)	universal (quotient)	V.1.1, V.1.2

中　文	英　文	章节
截尾维特概形	truncated Witt scheme	Ⅷ.2.2
截尾维特向量	truncated Witt vector	Ⅷ.2.2
截尾维特向量环	ring of truncated Witt vectors	Ⅷ.2.2
精细模概形	fine moduli scheme	Ⅳ.1.2
精细模空间	fine moduli space	Ⅳ.1.2
局部拟射影的	locally quasi-projective	Ⅰ.3.1
局部射影的	locally projective	Ⅰ.3.1
绝对夫罗贝纽斯态射	absolute Frobenius	Ⅱ.1.2
卡迪耶对偶	Cartier dual	Ⅱ.1.1, Ⅷ.4.2
可迁的 (作用)	transitive (action)	Ⅱ.2.1
l-进表示	l-adic representation	Ⅶ.3.1
莱夫谢茨条件	Lefschetz condition	Ⅶ.5.3
类型	type	Ⅺ.1.1
黎曼型	Riemann form	Ⅶ.5.3
李代数层	sheaf of Lie algebras	Ⅲ.1.2
李代数丛	Lie algebra bundle	Ⅲ.3.1
立方定理	Theorem of Cube	Ⅶ.1.1
良态射	nice morphism	Ⅴ.2.1
零分支	zero component	Ⅱ.1.1
m-正则的	m-regular	Ⅰ.3.3
模概形	module scheme	Ⅲ.3.1
目录空间	catalogue space	Ⅳ.2.3, Ⅺ.1.2
Néron-Severi 群	Néron-Severi group	Ⅵ.2.1
拟极化	quasi-polarization	Ⅷ.4.2
牛顿斜率	Newton slope	Ⅷ.5.1

中　文	英　文	章节
ρ-半稳定点	ρ-semistable point	Ⅵ.1.4
ρ-左不变的	ρ-left invariant	Ⅲ.2.2
Rosati 对合	Rosati involution	Ⅶ.3.3
弱几何等化子	weakly geometric equalizer	V.1.2
弱几何商	weakly geometric quotient	V.1.2
弱几何推出	weakly geometric push-out	V.1.2
S-截断的	S-transversal	I.4.2
S-同态	S-homomorphism	Ⅱ.1.2
S-无穷小群	S-infinitesimal group	Ⅱ.1.2
S-有效除子	S-effective divisor	I.4.1
S-支配的	S-dominant	V.1.2
S-作用	S-action	Ⅱ.2.1
塞尔对偶	Serre dual	Ⅷ.1.2, Ⅷ.4.2
塞尔-兰定理	Serre-Lang theorem	Ⅸ.2.4
甚特殊的	very special	Ⅶ.1.2, Ⅷ.5.2
数值等价的	numerically equivalent	I.4.2
数值类	numerical class	I.4.2
双代数	bialgebra	Ⅱ.1.1
西格尔模空间	Siegel moduli space	Ⅺ.1.1
西格尔模形式	Siegel modular form	Ⅺ.1.1
西格尔上半空间	Siegel upper-half space	Ⅺ.1.1
泰特模	Tate module	Ⅶ.3.1
泰特群	Tate group	Ⅶ.3.1
特殊的 (丢多涅模)	special (Dieudonné module)	Ⅷ.5.2

中　文	英　文	章节
希尔伯特概形	Hilbert scheme	Ⅳ.2.2
下降	descent	Ⅴ.3.2
线性表示	linear representation	Ⅸ.3.2
相对除子群	group of relative divisors	Ⅰ.4.1
相对丰富的	relatively ample	Ⅶ.2.1
相对夫罗贝纽斯态射	relative Frobenius	Ⅱ.1.2
相对极丰富的	relatively very ample	Ⅶ.2.1
相对拟射影的	relatively quasi-projective	Ⅰ.3.1
相对射影的	relatively projective	Ⅰ.3.1
相对微分层	sheaf of relative differentials	Ⅰ.2.1
相交重数	intersection multiplicity	Ⅰ.4.2
相交数	intersection number	Ⅰ.4.2
(作用的) 相容	compatibility (of actions)	Ⅱ.2.1
向量场	vector field	Ⅰ.2.1
像	image	Ⅴ.1.2
像闭包	image closure	Ⅴ.1.2
雅可比簇	Jacobian	Ⅶ.4.2
一般光滑的	generically smooth	Ⅳ.2.3
一般可迁的	generically transitive	Ⅹ.2.1
一般自由的	generically free	Ⅹ.2.1
移位态射 (移位同态)	Verschiebung	Ⅱ.1.2,Ⅵ.2.1,Ⅷ.2.2

符号索引

符　　号	意　　义	章节
$\mathrm{Aut}^{\mathrm{gs}}(G/S)$	G 的所有自同构组成的群	Ⅸ.1.3
$\mathcal{A}ut^{\mathrm{gs}}(X/S)$	阿贝尔概形的自同构概形	Ⅸ.1.3
$\mathfrak{Aut}^{\mathrm{gs}}_{X/S}$	阿贝尔概形的自同构群预层	Ⅸ.1.3
$\mathcal{B}_{g,d}$	阿贝尔簇的目录空间	Ⅺ.1.2
$\mathfrak{B}_{g,d}$	极化阿贝尔概形预层	Ⅺ.1.2
$\mathcal{B}^1_{g,d}$	目录空间上的泛阿贝尔概形	Ⅺ.1.2
$\mathcal{B}_{g,d,n}$	标高阿贝尔簇的目录空间	Ⅺ.1.3
$\mathfrak{B}_{g,d,n}$	标高阿贝尔概形预层	Ⅺ.1.3
$\mathcal{B}^1_{g,d,n}$	标高目录空间上的泛阿贝尔概形	Ⅺ.1.3
$\mathcal{C}_{g,d,n}$		Ⅺ.1.4
$\mathcal{C}^1_{g,d,n}$		Ⅺ.1.4
$c\dot{\times}x$	丢多涅元的标量乘	Ⅷ.3.1
$[D_1\cdots D_n]_S$	相对除子的相交数	Ⅰ.4.2
$d_f(s)$	态射 f 在点 s 的纤维维数	Ⅰ.3.1
$\mathcal{D}(f/S)$	同态 f 诱导的丢多涅模概形同态	Ⅷ.3.2
$D(G), D(G/k)$	丢多涅模	Ⅷ.3.1
$\mathcal{D}(G/S)$	丢多涅模概形	Ⅷ.3.2
$d_{\mathcal{L}}(\mathcal{F})$	$n!\chi_{\mathcal{L};O_X}$ 的 $n=\dim(X)$ 次项系数	Ⅰ.3.2
$D(X)$	阿贝尔簇的丢多涅模	Ⅷ.4.2
$\mathrm{DefAut}(T\times_S X/T)$	变形 T-自同构群	Ⅸ.2.1
$\deg(\mathcal{L})$	$d_{\mathcal{L}}(O_X)$	Ⅰ.3.2
$\mathrm{Der}_S(O_X,\mathcal{M})$	O_S-导数模	Ⅰ.2.1
$\mathcal{D}er_S(O_X,\mathcal{M})$	O_S-导数模层	Ⅰ.2.1
$Der_S(O_X,O_X)$	X 的 O_S-导数李代数	Ⅰ.2.1
$Der_S(O_X,O_X)^\rho$	ρ-左不变李代数层	Ⅲ.2.2

符　号	意　义	章节
$\mathrm{Diff}(G/S)$	左不变微分算子环	Ⅲ.1.2
$Diff(G/S)$	左不变微分算子层	Ⅲ.1.2
$Diff^n(G/S)$	阶 $\leqslant n$ 的左不变微分算子层	Ⅲ.1.2
$\mathcal{D}iff^n(G/S)$	微分算子丛	Ⅲ.3.1
$\mathcal{D}iff^n_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})$	$\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的阶 $\leqslant n$ 的 O_S-微分算子层	Ⅰ.2.1
$\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})$	$\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的阶 $\leqslant n$ 的 O_S-微分算子模	Ⅰ.2.1
$\mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})$	$\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的 O_S-微分算子层	Ⅰ.2.1
$\mathrm{Diff}_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})$	$\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的 O_S-微分算子模	Ⅰ.2.1
$Diff(O_X/S)$	X 的 O_S-微分算子代数层	Ⅰ.2.1
$Diff(O_X/S)^\rho$	ρ-左不变微分算子层	Ⅲ.2.2
$Diff^n(O_X/S)$	X 的阶 $\leqslant n$ 的 O_S-微分算子模	Ⅰ.2.1
$Diff^n(O_X/S)^\rho$	阶 $\leqslant n$ 的 ρ-左不变微分算子层	Ⅲ.2.2
$\mathrm{Div}(X/S)$	相对除子群	Ⅰ.4.1
$\mathrm{Div}_+(X/S)$	S-有效除子半群	Ⅰ.4.1
$\mathcal{D}iv_{X/S}$	除子概形	Ⅳ.2.3
$\mathcal{D}iv^\chi_{X/S}$	除子概形	Ⅳ.2.3
$\mathfrak{Div}_{X/S}$	除子预层	Ⅳ.2.3
$\mathfrak{Div}^\chi_{X/S}$	除子预层	Ⅳ.2.3
DR_ρ	ρ 的德拉姆复形	Ⅲ.2.3
$E_w(Z)$	艾森斯坦级数	Ⅺ.1.1
$\mathcal{E}nd(X/S)$		Ⅳ.2.3
$\underline{f}$	态射 f 代表的预层态射	Ⅰ.1.4
F_S	绝对夫罗贝纽斯	Ⅱ.1.2
$F_{X/S}$	相对夫罗贝纽斯	Ⅱ.1.2
$F^n_{X/S}$		Ⅱ.1.2

符　号	意　义	章节
$f \times_S \mathrm{id}_g$	态射 f 的拉回	II.2.1
f_x	丢多涅元 x 对应的 G 到 W_n 的同态	VIII.3.1
$\mathcal{F}ix(\rho, Y)$	ρ-不变泛子群概形	IX.3.1
$\mathfrak{Fix}_{\rho,Y}$	ρ-不变子群预层	IX.3.1
$\mathbb{G}_{a/\mathbb{Z}}$	加群概形	II.1.1
$\mathbb{G}_{a/S}$	$\mathbb{G}_{a/\mathbb{Z}} \times S$	II.1.1
G^D	卡迪耶对偶	II.1.1
$G[F^n]$	$\ker(F^n_{X/S})$	II.1.2
$\mathfrak{G}_k$	有限型 k-群概形的范畴	III.1.2
$\mathfrak{G}^1_k$	$\mathfrak{G}_k$ 中夫罗贝纽斯为零的对象子范畴	III.1.2
$\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$	乘群概形	II.1.1
$\mathbb{G}_{m/S}$	$\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}} \times S$	II.1.1
$G[n]$	$\ker(n_G)$	II.1.2
$\mathbb{G}_{n,m}$	格拉斯曼空间	IV.2.1
G^{op}		VI.2.2
$G_{r,s}$		VIII.4.2
G_S	群 G 的离散 S-群概形结构	II.1.1
G^t	p-可除群 G 的塞尔对偶	VIII.1.2
$GL_{n/\mathbb{Z}}$	一般线性群概形	II.1.1
$GL_{n/S}$	$GL_{n/\mathbb{Z}} \times S$	II.1.1
$GL_{X,\mathbb{V}(\mathcal{E})/S}$	向量丛的线性自同构群概形	IX.3.2
$\mathcal{H}$	上半复平面	XI.1.1
$\mathcal{H}_{g,d}$		XI.1.2
$\mathcal{H}^0_{g,d}$		XI.1.2
$\mathcal{H}^n_{g,d}$		XI.1.2

符　号	意　义	章节
$h^i_{\mathcal{F}}(s)$	$\mathcal{F}$ 在点 s 的纤维同调维数	I.3.1
$H \ltimes N$	半直积	VI.1.6
$H_{r,s}$		VIII.5.2
$H'_{r,s}$		VIII.5.2
$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$	希尔伯特概形	IV.2.2
$\mathfrak{Hilb}^{\chi}_{\mathbb{P}^n}$		IV.2.2
$\mathcal{H}ilb^{\chi}_{X/S}$	希尔伯特概形	IV.2.3
$\mathcal{H}ilb_{X/S}$	希尔伯特概形	IV.2.3
$\mathcal{H}om_S(X,Y)$		VIII.3.2
$\mathfrak{Hom}_{X,Y/S}$		VIII.3.2
i_{nm}		VIII.2.2
$i(Y_1,Y_2,P)$	相交重数	I.4.2
$\mathcal{I}d(f/S,X)$		IX.3.1
$\mathcal{I}d(\rho,Y)$	ρ-平凡泛子群概形	IX.3.1
$\mathfrak{Id}_{\rho,Y}$	ρ-平凡子群预层	IX.3.1
$\mathcal{I}so_S(X,Y)$		IV.2.3
$\mathfrak{Iso}_{X,Y/S}$		IV.2.3
$j(\gamma,Z)$	雅可比行列式	XI.1.1
$Jac(C)$	曲线 C 的雅可比簇	VII.4.2
$\mathcal{J}ac(C/S)$	雅克比概形	XI.2.1
$K_{\mathcal{L}}$	$\ker(\phi_{\mathcal{L}})$	VII.2.1
$\ker(f)$	同态的核	II.1.2
$[\mathcal{L}_1\cdots\mathcal{L}_n]_S$	可逆层的相交数	I.4.2
$\mathfrak{L}^1_k$	k 上有限维 p-李代数的范畴	III.1.2
$\lvert\mathcal{L}/S\rvert$	线性系	I.4.1
L_ϕ	L_{ϕ,id_X}	VII.3.3

符　　号	意　　义	章节
$o, o_G, o_{G/S}$	单位截口 (零截口)	Ⅱ.1.1
$O_{n/\mathbb{Z}}$	正交群概形	Ⅱ.1.1
$p_{m,n}$		Ⅺ.1.5
$P^n_{X/S}$	X 在 S 上阶 $\leqslant n$ 的相对微分层	Ⅰ.2.1
$P_{X/S}$		Ⅰ.2.1
$P'_{X/S}$		Ⅰ.2.1
$\mathcal{P}_{X/S}$	庞加莱层	Ⅵ.2.1
$PGL_{n/\mathbb{Z}}$	射影一般线性群概形	Ⅱ.1.1
$\mathrm{Pic}(C)$	曲线 C 的皮卡群	Ⅰ.4.1
$\mathrm{Pic}(X/S)$	相对皮卡群	Ⅰ.4.1
$\mathcal{P}ic(X/S)$	皮卡概形	Ⅵ.2.1
$\mathfrak{Pic}_{X/S}$	相对皮卡群预层	Ⅵ.2.1
$\mathcal{P}ic^0(X/k)$		Ⅵ.2.1
$\mathcal{P}ic^\tau(X/k)$		Ⅵ.2.1
$\mathrm{Pic}^\chi(X/S)$		Ⅵ.2.1
$\mathcal{P}ic^\chi(X/S)$		Ⅵ.2.1
$\mathfrak{Pic}^\chi_{X/S}$		Ⅵ.2.1
q_{mn}		Ⅷ.2.2
$\tilde{q}_{mn}$		Ⅷ.3.2
$r_{\mathcal{F}}(s)$	$\mathcal{F}$ 在点 s 的秩	Ⅰ.3.1
$r(M)$	(丢多涅模的) 秩	Ⅷ.5.2
r_X	特征 p 的域上阿贝尔簇的 p-秩	Ⅶ.1.2
$S_0(M)$		Ⅷ.5.2

符　　号	意　　义	章节
W_n	$\mathcal{W}_n \otimes k$	Ⅷ.2.2
$\mathcal{W}_n$	截尾维特概形	Ⅷ.2.2
$W_n(R)$	环 R 的截尾维特向量环	Ⅷ.2.2
$w_n(x_0, ..., x_n)$	维特向量的代数表达式	Ⅷ.2.1
$W_{n,m}$	$\mathcal{W}_{n,m} \otimes k$	Ⅷ.2.2
$\mathcal{W}_{n,m}$	$\mathcal{W}_n \otimes \mathbb{F}_p[F^{m+1}]$	Ⅷ.2.2
$\mathcal{W}_{\infty,m}$		Ⅷ.3.2
$\underline{X}$	X 代表的预层	Ⅰ.1.4
$\hat{X}$	对偶阿贝尔簇	Ⅵ.2.1
$X_f \times_g T$	概形的纤维积	Ⅱ.2.1
$X^{(p)}$		Ⅱ.1.2
X/W	(等价关系的) 商	Ⅴ.1.1
$x \dotplus y$	丢多涅元的加法	Ⅷ.3.1
$\mathcal{X}_{g,d,n}$	模空间上的泛阿贝尔概形	Ⅺ.1.4
$\alpha, \alpha_G, \alpha_{G/S}$		Ⅱ.1.1
α'		Ⅲ.1.1
$\bar{\alpha}$	Rosati 对合	Ⅶ.3.3
$\bar{\alpha}_L$	可逆层 $\mathcal{L}$ 所给出的 Rosati 对合	Ⅶ.3.3
α_{p^n}		Ⅱ.1.1, Ⅱ.1.2
$\langle \alpha, \beta \rangle_L$	可逆层 $\mathcal{L}$ 所给出的二次型	Ⅶ.3.3
$\alpha_\rho, \alpha_{G,X}$		Ⅱ.2.2
α'_ρ		Ⅲ.2.2
$\alpha(G)$	α-层	Ⅲ.4.1
$\Delta_X, \Delta_{X/S}$	对角态射	Ⅱ.1.1
η_L	p 次幂映射	Ⅲ.1.2

符　　号	意　　义	章节
$\iota, \iota_G, \iota_{G/S}$	逆	II.1.1
$\lambda_{\mathcal{A}_{g,d,n}}$	$\mathcal{X}_{g,d,n}$ 的泛标高 n-结构	XI.1.4
$\lambda_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$	$\mathcal{B}^1_{g,d,n}$ 的泛标高 n-结构	XI.1.3
$\lambda_{\mathcal{C}_{g,d,n}}$	$\mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 的泛标高 n-结构	XI.1.4
λ_n	标高 n-结构	XI.1.3
$\lambda_r(x_0, y_0, ..., x_r, y_r)$		I.2.2
μ_{p^n}		II.1.1, II.1.2
μ_X	阿贝尔簇 X 到 $\hat{\hat{X}}$ 的典范同构	VII.2.2
μ_X	X 到 $Alb(X)$ 的典范态射	VII.4.1
π	投射	II.1.1
ρ	作用	II.2.1
$\rho_{X/S}$	自同构群概形的泛作用	IX.1.1
τ, τ_n	泰希米勒提升	VIII.2.1, VIII.2.2
$\tilde{\phi}$		VIII.3.2
$\phi_{\mathcal{A}_{g,d,n}}$	$\mathcal{X}_{g,d,n}$ 的泛极化	XI.1.4
$\phi_{\mathcal{B}_{g,d}}$	$\mathcal{B}^1_{g,d}$ 的泛极化	XI.1.2
$\phi_{\mathcal{B}_{g,d,n}}$	$\mathcal{B}^1_{g,d,n}$ 的泛极化	XI.1.3
$\phi_{\mathcal{C}_{g,d,n}}$	$\mathcal{C}^1_{g,d,n}$ 的泛极化	XI.1.4
$\phi_{C/S}$	$\mathcal{J}ac(C/S)$ 的主极化	XI.2.1
$\phi_{\mathcal{L}}$	可逆层诱导的阿贝尔簇到其对偶的同态	VII.2.1
$\phi_m(n)$	(m 维) 欧拉函数	XI.1.5
ϕ_n		IX.2.2
$\phi_n(x_0, y_0, ..., x_n, y_n)$	维特概形的加法定义多项式	VIII.2.1
$\tilde{\phi}_n(x_0, y_0, ..., x_n, y_n)$		VIII.3.2

符　号	意　义	章节
$\Phi_{X/S}$	自同构群概形上的泛自同构	IX.1.1
$\varphi_p X$	阿贝尔簇 X 的巴索蒂-泰特群	VIII.1.1
$\chi_{\mathcal{L};\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$ 对可逆层 $\mathcal{L}$ 的希尔伯特多项式	I.3.2
$\chi_{\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_r;\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$ 对多个可逆层的希尔伯特多项式	I.3.2
$\chi_{\mathcal{L}}$	$\chi_{\mathcal{L};\mathcal{O}_X}$	I.3.2
$\tilde{\psi}$		VIII.3.2
$\psi_n(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$	维特概形的乘法定义多项式	VIII.2.1
$\tilde{\psi}_n(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$		VIII.3.2
$\omega_{G/S}$	不变微分层	III.1.1
$\Omega^{\cdot}_{X/S}$	$X \to S$ 的德拉姆复形	I.2.3